

Relativité Générale: un aperçu

S. KICHENASSAMY

Laboratoire de Gravitation et Cosmologie Relativistes
Université Pierre et Marie Curie
URA 769, CNRS, Tour 22–12, 4ème étage, Boîte 142
4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05*

RÉSUMÉ. Ce bref aperçu tente de dégager les acquis de la Relativité Générale et de situer les problèmes actuels.

ABSTRACT. We present a brief survey of General Relativity, emphasizing its main achievements and the background of current frontiers.

Introduction.

La Relativité Générale étend la théorie newtonienne à un double point de vue:

- la relativité galiléenne, déjà supplantée, en raison du caractère relatif de la simultanéité à distance, par la relativité restreinte, s'efface au profit d'une équivalence de descriptions locales; l'espace et le temps newtoniens, absorbés par l'espace-temps de Minkowski, laissent la place à une variété fondamentale dont l'espace tangent est minkowskien, et qui est invariante par difféomorphisme.
- la gravitation est décrite non par la théorie newtonienne d'action à distance mais par une théorie de champ, comme l'Électrodynamique de Maxwell, avec une différence de taille: le champ de gravitation ne remplit pas l'espace-temps, comme le champ électromagnétique; il est l'espace-temps lui-même, puisqu'il détermine la métrique spatio-temporelle; l'espace-temps de la Relativité restreinte apparaît dès lors comme une variété V_4 avec le maximum d'isométries, et de courbure nulle.

* Adresse électronique (*e-mail*): kichenas@ccr.jussieu.fr

Le problème fondamental est donc la détermination de la variété espace-temps V_4 , douée d'une structure lorentzienne et d'élément linéaire:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$$

dans un système de coordonnées locales $\{x^a, a \text{ ou indice latin} = 0, 1, 2, 3\}$, compatible avec la présence de divers champs physiques ou de distributions d'impulsion-énergie; les g_{ab} ont une double signification:

- ce sont les composantes de la métrique telles que:

$$ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b, \quad \eta_{ab} = \delta_{ab} - 2\delta_a^0\delta_b^0$$

où les ω^a forment un corepère dont le dual $\{e_a\}$ détermine en chaque point un repère local orthonormé servant à conférer à toute grandeur mathématique une signification physique (e_0 désigne la quadrivitesse de l'observateur local); l'existence d'un tel champ de repères orthonormés impose la nullité dans V_4 des caractéristiques d'Euler-Poincaré et de Stiefel-Whitney.

- les g_{ab} sont les potentiels de gravitation qui se substituent à l'unique potentiel newtonien, du fait que la densité newtonienne de matière doit déjà dans le cadre de la Relativité restreinte apparaître comme la composante (00) d'un tenseur T_{ab} d'ordre deux.

Il s'ensuit que l'équation de Poisson est généralisée par les équations d'Einstein:

$$G_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (\text{E})$$

où $G_{ab} = R_{ab} - 1/2Rg_{ab}$, R_{ab} = tenseur de Ricci de V_4 , R = courbure scalaire.

Le tenseur T_{ab} est généralement représenté par:

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + u_a q_b + u_b q_a + (p + \zeta\theta)h_{ab} + \pi_{ab} + \tau_{ab}$$

où $u^a u_a = -1$, $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$, $u_a q^a = 0$, $\pi_{ab} u^b = 0$, μ = densité d'énergie, u^a = vitesse locale de la matière, q^a = courant de chaleur, π_{ab} = tenseur de viscosité, ζ = coefficient volumique de viscosité, $\theta = \nabla_a u^a$ = taux de dilatation, τ_{ab} = tenseur d'impulsion-énergie dû aux champs physiques présents.

À l'extérieur de la matière ($T_{ab} = 0$), $G_{ab} = 0$ sont les équations du vide .

Lorsque la distribution de matière-énergie décrit un système de frontière S , la solution intérieure doit être raccordée à la solution du vide, de manière que la métrique induite et la seconde forme fondamentale se raccordent à travers S .

Etude sommaire des équations d'Einstein.

Les équations (E) ne sont pas indépendantes car, en vertu des identités de Bianchi, on a:

$$\nabla_a G^{ab} = 0.$$

Le système (E) est donc sous-déterminé. Il en résulte d'autre part que T_{ab} est conservatif:

$$\nabla_a T^{ab} = 0.$$

On en déduit les équations du mouvement des distributions de matière-énergie considérées.

L'existence des solutions de (E) dans le cas du vide, conduit à poser le *problème de Cauchy*: déterminer g_{ab} au voisinage d'une hypersurface S du genre espace (e.g. $x^0 = \text{const.}$), connaissant g_{ab} et $\partial_0 g_{ab}$ sur S .

Or l'analyse des équations (E) montre que les dérivées $\partial_{00} g_{0a}$ ne figurent dans aucune de ces équations et que le système (E) se divise en deux groupes:

- l'un formé des quatre équations aux conditions initiales:

$$G_{0a} = 0 \tag{C}$$

ne contenant que les données de Cauchy et des quantités qui s'en déduisent sur S ;

- l'autre de six équations d'évolution:

$$G_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha \text{ ou indice grec} = 1, 2, 3).$$

Les variétés caractéristiques gravitationnelles sont déterminées par

$$g^{00} = 0, \text{ ou si } S : f(x^a) = \text{const.}, g^{ab} \nabla_a f \nabla_b f = 0.$$

Dans le cas analytique, on montre que:

- $G_{0a} = 0$ se propage au voisinage de S pour une solution de $G_{\alpha\beta} = 0$;

- $G_{\alpha\beta} = 0$ admet, lorsque S n'est pas caractéristique, une solution physiquement unique, i.e. modulo une transformation de coordonnées conservant numériquement les données de Cauchy.

Dans le cas non analytique, le problème est résolu toutes les fois qu'on peut extraire de (E), ou bien un système hyperbolique de Leray ou bien un système symétrique hyperbolique au sens de Friederichs, en utilisant un système de coordonnées harmoniques ($\nabla_a \nabla^a x^b = 0$); la détermination des données de Cauchy vérifiant (C) doit être effectuée au préalable en pratique.

Le problème de Cauchy caractéristique a servi, dans le cas analytique, à préciser l'étude du rayonnement gravitationnel, bien que d'un point de vue observationnel ce soient les équations linéarisées qui ont servi en pratique. Dans le cas non analytique, les méthodes de Leray ou de Friederichs semblent s'étendre.

REMARQUE. Dans le cas, peu réaliste en Relativité générale, d'un système isolé, la détermination des "conditions asymptotiques" soulève des difficultés du fait que l'espace-temps ne détermine pas une arène; le passage à l'infini s'effectue alors en considérant une variété physique (\bar{V}, \bar{g}_{ab}) représentant le voisinage de la masse isolée, qui soit immergée conformément dans une variété non physique ($V, g_{ab} = \Omega^2 \bar{g}_{ab}$) et en définissant les points à l'infini de \bar{V} comme appartenant à la frontière de \bar{V} déterminée par $\Omega = 0$.

Solutions approchées.

Ces solutions s'obtiennent en perturbant une métrique de base et ont souvent conduit à des résultats intéressants. La question naturelle qui se pose alors est de savoir si toute solution des équations (E) linéarisées peut s'obtenir par linéarisation d'une famille à un paramètre de solutions exactes de (E). Cette stabilité par linéarisation s'obtient si le problème de Cauchy est bien posé et si les équations (C) sont stables. Des conditions supplémentaires doivent être imposées lorsque la variété admet un champ de Killing.

Lorsque la métrique qu'on perturbe est celle de Minkowski,

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \phi_{ab},$$

et l'équation linéarisée devient

$$G_{ab}^{(1)} = -1/2 \partial^c \partial_c \psi_{ab} = \kappa T_{ab}$$

où $\psi_{ab} = \phi_{ab} - 1/2\phi\eta_{ab}$.

Applications:

a) La limite newtonienne est obtenue sous les hypothèses de champ faible, de vitesse faible des sources et de pression négligeable devant la densité de masse-énergie; on obtient:

$$\Delta\psi_{00} = -\kappa\rho$$

où Δ est le laplacien usuel; les autres équations sont identiquement nulles. Cela donne, avec des conditions asymptotiques convenables,

$$\phi_{ab} = -(\eta_{ab} + 2u_a u_b)U$$

où U est une solution de l'équation de Poisson. On note que cette solution apparaît comme une limite singulière des solutions à un paramètre de (E).

b) L'équation linéarisée, avec le choix des coordonnées harmoniques $\partial^b\psi_{ab} = 0$ et de la jauge de rayonnement $\phi_{0\alpha} = 0$, admet dans le vide des solutions ondes planes qui représentent des ondes gravitationnelles avec deux états de polarisation; leur détection fait l'objet d'actives recherches, ou bien en mesurant la force de "marée" donnée par l'équation de la déviation géodésique, ou bien par des méthodes d'interférométrie.

c) L'étude du système solaire a été également effectuée en développant une métrique du type Schwarzschild (formalisme PPN); elle montre que seule la Relativité générale permet d'expliquer de manière cohérente toutes les observations connues.

Solutions exactes.

Ces solutions admettent généralement un groupe à un ou plusieurs paramètres d'isométries globales ou sont engendrées à partir de l'une d'entre elles par une technique particulière, e.g. par une transformation de Lie-Bäcklund. Nous indiquons ici les plus importantes d'entre elles.

Solution a symétrie sphérique:

Cette célèbre solution du vide, due à Schwarzschild, est asymptotiquement plate et nécessairement statique (théorème de Birkhoff); elle rend compte d'un certain nombre de données observationnelles que la

théorie newtonienne ne pouvait expliquer de manière cohérente: avance du périhélie de Mercure, décalage vers le rouge du spectre des raies, courbure des rayons lumineux au voisinage des masses gravitantes et existence corrélative de lentilles gravitationnelles, retard de l'écho-radar dû à la présence du champ de gravitation.

Son extension maximale dans le vide conduit à un trou noir d'où ni lumière, ni particule ne peuvent émerger; dans le cas de l'effondrement d'une étoile à symétrie sphérique, $r = 2m$ constitue un horizon-événement (ou horizon limite) qui enferme le trou noir avec au centre une courbure singulière. Sa topologie est déterminée par deux espaces asymptotiquement plats réunis par un pont (pont d'Einstein-Rosen). Cet horizon est aussi un horizon de Killing, car le vecteur de Killing change de genre (temps \rightarrow espace).

La solution intérieure à symétrie sphérique a également fait l'objet de nombreuses études conduisant à l'effondrement des masses sous l'effet de la contraction gravitationnelle et à l'existence possible de trous noirs.

Solution à symétrie axiale:

La solution stationnaire à symétrie axiale, due à Kerr, décrit le champ d'une masse en rotation permanente, bien que la solution intérieure correspondante ne soit pas connue. Son extension maximale conduit à une famille de trous noirs en rotation; dans ce cas, les horizons limite et de Killing ne coïncident pas et enferment une ergosphère dont on peut en principe extraire de l'énergie.

Solution cosmologique:

La solution spatialement isotrope et homogène de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker fournit le modèle standard de la Cosmologie moderne; elle décrit un univers en expansion avec à l'origine un "big-bang" que semblent confirmer le fond de rayonnement noir cosmologique à 3 degrés K et les taux d'abondance d'éléments primordiaux. La singularité initiale est cependant cachée par l'horizon-particule (ou horizon actuel) qui constitue également une frontière des domaines causaux, en deçà de laquelle des violations de causalité peuvent se produire en donnant naissance à divers objets nouveaux tels les cordes cosmiques.

Ce modèle est naturellement trop schématique; signalons seulement quelques uns des autres modèles étudiés: ceux de Bianchi, de Sitter, Einstein-Strauss, Gödel, Kasner etc...

Singularités et censure cosmique:

Ces solutions exactes singulières posent de nombreux problèmes, du fait que le modèle d'univers est défini par une métrique régulière: la définition de la singularité procède dès lors de géodésiques nulles ou du genre temps, de longueur affine bornée, ce qui exclut les singularités dépendant du choix des coordonnées ou celles pour lesquelles les scalaires de courbure sont infinis en un point de la frontière des domaines de cartes locales.

D'autre part, l'existence des horizons-événements occultant les singularités "nues" ou celle des horizons de Cauchy limitant le domaine de dépendance des données initiales conduisent à se demander, avec Penrose, s'il faut postuler un censeur cosmique qui empêche les singularités d'apparaître; de toute manière, il convient de se rappeler que l'espace-temps n'est plus une "scène universelle" dans laquelle on peut rêver les constituants de l'univers.

Quantification du champ de gravitation.

Bien qu'un argument du type Bohr-Rosenfeld rende impossible la mesure précise du champ de gravitation au moyen d'une particule d'épreuve, la conciliation de la Relativité générale et des théories quantiques s'est poursuivie suivant l'une ou l'autre des deux voies suivantes: la quantification covariante de Lorentz ou la quantification hamiltonienne.

Les premières tentatives covariantes postulent un "background" minkowskien et quantifient l'écart de la métrique physique par rapport à la métrique de Minkowski; mais les méthodes perturbatives afférentes ne sont pas renormalisables en raison de l'invariance de la théorie par difféomorphisme. L'élimination des divergences bosoniques par l'introduction de fermions a conduit alors à chercher une sortie par la Supergravité, d'autant que celle-ci apparaît comme une limite à basse énergie des Supercordes, supposées unifier toutes les forces fondamentales sans que l'espace-temps ne joue de rôle significatif; malheureusement, les séries perturbatives deviennent hautement divergentes, bien que les termes individuels restent finis; d'où les différentes tentatives pour construire une théorie non perturbative.

L'approche canonique commence avec le formalisme hamiltonien d'Arnouitt-Deser-Misner de la Relativité générale; mais la méthode de quantification usuelle échoue, laissant à l'équation de Wheeler-deWitt

le soin de révéler certains rapports entre les méthodes de quantification de Dirac et de Feynman. L'introduction des variables d'Ashtekar: un repère et une connection self-duale dans un 3-espace, ont suscité un grand espoir, celui de développer une gravité quantique non perturbative fondée sur la quantification de Dirac, puisque de cette manière on pouvait exprimer les contraintes sous forme polynômiale. Cette tentative rencontre cependant des difficultés majeures: choix de la variable temps et de la notion subséquente de produit intérieur, respect de l'invariance par difféomorphisme.

En guise de conclusion.

La Relativité générale apparaît non seulement comme l'aboutissement naturel de la Physique newtonienne et de la propagation des ondes, mais aussi comme la représentation la plus cohérente des phénomènes physiques, qui cependant bouleverse les cadres d'espace et de temps hérités du sens commun. L'interprétation de la théorie repose sur l'interdépendance des mesures locales dans la variété fondamentale, judicieusement appelée variété des observateurs par E. Cartan. Mais l'inertie des physiciens encore attachés au temps newtonien fait que les progrès sont lents, et une meilleure compréhension des conceptions nouvelles introduites par Einstein demeure inscrite dans l'avenir.

Références.

Ces indications bibliographiques ont pour but de donner une idée du développement de la Relativité générale, du point de vue conceptuel et technique; elles sont loin d'être exhaustives. Un survol moderne de la théorie se trouve dans [6, chap. 6]. Les débuts de la théorie sont analysés dans [2, vols. 1, 3, 5]; les volumes du centenaire d'Einstein [4] et [5] passent en revue ses développements jusqu'en 1980; ses fondements sont en particulier analysés dans [7] et [8]; la classification systématique des solutions exactes est entreprise dans [9] et s'est poursuivie depuis; le développement conceptuel de la gravité quantique est passé en revue dans [2, vol 2]. Les divers autres ouvrages généraux éclairent divers aspects de la théorie.

- [1] Darmais, G., 1927 Les équations de la gravitation einsteinienne, Mém. Sc. Math., fasc. 25, Gauthier-Villars, Paris.

- [2] Einstein Studies: vol. 1, 1989, Einstein and the History of General Relativity, D. Howard and J. Stachel eds.; vol. 2, 1991, Conceptual Problems of Quantum Gravity, A. Ashtekar and J. Stachel eds.; vol. 3, 1992, Studies in the History of General Relativity, J. Eisenstaedt and A. Kox eds.; vol. 5, The Attraction of Gravitation, J. Earman, M. Janssen and J. D. Norton eds. Birkhauser, Boston.
- [3] Fock, V., 1959, The Theory of Space, Time and Gravitation, Pergamon, New-York.
- [4] Hawking, S. W. and Israel, W. (Eds.), 1979, General Relativity and Einstein Centenary Survey, Cambridge.
- [5] Held, A. (Ed.), 1980, General Relativity and Gravitation, 2 vol, Plenum, New-York.
- [6] Kichenassamy, Satyanad, 1996, Nonlinear Wave Equations, M. Dekker, New-York.
- [7] Kichenassamy, S., 1967, in: Symposia in Theoretical Physics, vol. 5, Alladi Ramakrishnan Ed. Plenum, New-York.
- [8] Kichenassamy, S., 1968, dans: Relativité et Quanta: les Grandes Théories de la Physique Moderne, O. Costa de Beauregard et al., Masson et Cie, Paris.
- [9] Kramer, D., Stephani, H., Hertl, E. and MacCallum, M. (E. Schmutzer, Ed.), 1980, Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Cambridge University Press.
- [10] Lichnerowicz, A., 1990, Relativity and Mathematical Physics dans: Albert Einstein, d'Inverno (Ed.).
- [11] Mavridès, S., 1973, L'Univers Relativiste, Masson, Paris.
- [12] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., 1973, Gravitation, Freeman, San Francisco.
- [13] Papapetrou, A., 1974, Lectures on General Relativity, Reidel, Dordrecht.
- [14] Tonnelat, M. A., 1964, Les Vérifications Expérimentales de la Relativité Générale, Masson, Paris.
- [15] Synge, J. L., 1960, Relativity, The General Theory, North-Holland, Amsterdam.
- [16] Wald, R. M., 1984, General Relativity, Univ. of Chicago Press.