Relativité : quelques problèmes anciens sous un angle nouveau

S. Kichenassamy

Laboratoire de Gravitation et Cosmologie Relativistes
Université Pierre et Marie Curie
URA 769, CNRS, Tour 22–12, 4ème étage, Boîte 142
4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05*

RÉSUMÉ. On examine trois problèmes qui reflètent certaines survivances des notions galiléennes et qui ne tiennent pas suffisamment compte du caractère relatif de la simultanéité à distance : rotation uniforme, précession de Thomas, et "invariance" de la section efficace de diffusion.

ABSTRACT. We review three problems related to the relativity of simultaneity at a distance: uniform rotation, Thomas precession and the "invariance" of the scattering cross section; their usual treatment is not completely free of the pre-relativistic thinking.

Introduction.

L'Histoire des Sciences, notamment l'Histoire de la Relativité Générale, montre que la recherche s'est développée, non pas en suivant des allées bien tracées, mais en suivant des chemins sinueux dessinés au gré des vents; il s'ensuit que parfois des impasses subsistent au mépris de la cohérence mutuelle des théories admises, et que d'anciennes interprétations occultent la lumière apportée par les nouvelles idées. Nous examinons dans la suite trois problèmes qui illustrent cette observation; ils se rattachent tous les trois au caractère relatif de la simultanéité à distance : survivance de la description galiléenne de la rotation uniforme, interprétation de la précession de Thomas, "invariance relativiste" de la section efficace de collision.

* Adresse électronique (*e-mail*): `kichenas@ccr.jussieu.fr`

Le problème de la rotation:

Le seau de Newton [28] a servi à établir que la rotation uniforme est, à la différence de la translation, un "mouvement véritable," dont les effets peuvent être observés dans un système tournant : ainsi naquit le débat sur le caractère absolu ou relatif des théories du mouvement, de l'espace, et du temps.

En effet, en Physique newtonienne, le mouvement de translation (resp. rotation) uniforme est conçu comme une translation (resp. rotation) dépendant du temps, de l'espace en lui-même, où l'espace $E_3(t)$ au temps t se déduit de l'espace absolu par une transformation linéaire, en raison du caractère absolu de la simultanéité.

Après l'avènement de la Relativité Restreinte et du caractère relatif de la simultanéité à distance, l'espace cesse d'être absolu, et la translation uniforme se traduit non plus par un changement d'origine dépendant du temps, mais par une *rotation hyperbolique* dans un plan du genre temps. Qu'en est-il de la rotation uniforme? La rotation du type galiléen continue à survivre avec ses faiblesses, bien que Trocheris [33] ait proposé, dès 1949, une alternative relativiste substituant à la rotation euclidienne dépendant du temps une *rotation hyperbolique* locale. L'émergence de cette transformation relativiste de rotation (TRR) ainsi que ses conséquences, notamment dans l'étude des pulsars, sont examinées dans la Section 3.

Précession de Thomas:

La précession de Thomas fut une grande surprise en tant qu'effet relativiste car, même à des vitesses faibles, elle rendait compte du facteur 2 nécessaire à la structure des multiplets des spectres atomiques, dans le cadre du couplage spin-orbite.

L'explication usuelle de cet effet se fonde :

a) ou bien sur une approche cinématique qui la relie à la non-commutativité des transformations spéciales de Lorentz (TSL) [31], [32] ou de manière équivalente à "l'holonomie physique [34],"

b) ou bien sur une approche dynamique du mouvement d'une particule à spin dans un champ électromagnétique homogène, suivant laquelle on déduit de l'orthogonalité du vecteur-spin et de la quadri-vitesse de la particule, la propagation (de Fermi-Walker) du vecteur-spin [3,4,10,12].

Cependant, ces deux manières d'aborder la précession de Thomas se rattachent à la relativité de la simultanéité à distance : en effet, à l'ordre le plus bas en $\beta = v/c$, les hypersurfaces de simultanéité ne sont pas invariantes de Lorentz, et les axes d'espace des repères considérés changent de direction; il s'ensuit qu'ils doivent subir une rotation, qui apparaît à la suite d'une série de transformations spéciales de Lorentz dont le produit laisse invariant l'axe des temps.

D'autre part, la transformation infinitésimale de Lorentz qui applique la tangente en un point de la ligne d'univers d'une particule sur celle au point voisin induit le transport de Fermi-Walker des axes d'espace : d'où l'unité d'explication des deux approches qui découlent en définitive de la relativité de la simultanéité à distance. Ces considérations font l'objet de la Section 4.

Invariance relativiste de la section efficace:

On sait depuis Møller [27] que la théorie de la diffusion ("scattering") introduit le postulat "commode" de l'invariance relativiste de la section efficace de collision σ, fondée sur la définition galiléenne de la vitesse relative des particules en collision; cette vitesse est en effet déterminée par la *différence* (sic) des tri-vitesses des particules, mesurées par un même observateur. Cette définition dépend, on le sait, de l'observateur considéré, et ignore le fait que les espaces associés à l'observateur et aux particules ne sont pas déduits l'un de l'autre par une transformation de $SO(3)$. Elle peut être justifiée si l'on accepte de se restreindre à une classe d'observateurs convenablement définie [8]. Mais l'invariance relativiste de σ en toute généralité ne peut être qu'un leurre. Sans doute faudra-t-il revenir sur les *a priori* qui ont motivé l'introduction de ce pseudo-invariant.

Espace-temps.

Espace et temps newtoniens:

L'espace-temps newtonien est le produit direct d'un espace euclidien E_3 invariant par le groupe orthogonal $SO(3)$ (à six paramètres), par la droite réelle $\{t : t \in \mathbb{R}\}$, représentant le temps absolu. $E_3 = E_3(t)$ est le lieu des événements simultanés à tout instant t. Il est indépendant de t.

Mouvements:

Le mouvement détermine une appliction de $E_3(t)$ dans $E_3(t + dt)$, i.e. de E_3 dans lui-même.

La translation correspond à un changement d'origine spatiale dépendant du temps :

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + a^{\alpha}(t) \tag{1}$$

dans un système de coordonnées cartésiennes $\{x^{\alpha}\}$, où α, ou tout indice grec, prend les valeurs 1, 2, 3. La translation uniforme, définie par $\dot{a}^{\alpha} = da^{\alpha}/dt = 0$, ne peut être détectée par une expérience interne au système de référence en mouvement S', qui utilise les coordonnées $x^{\alpha'} = x'^{\alpha}$ et $t' = t$. Le principe galiléen de relativité en résulte : "la loi du mouvement $\vec{f} = md\vec{v}/dt$ est invariante par les transformations du type $t' = t$, $x^{\alpha'} = x^{\alpha} + a^{\alpha}t$, $a^{\alpha} = \text{const.}$"

Le mouvement de rotation laissant invariant un point fixé détermine une rotation euclidienne

$$x'^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta}(t)x^{\beta}, \quad t' = t, \quad R^{\alpha}_{\beta} \in SO(3). \tag{2}$$

Soit S' de coordonnées $x^{\alpha'} = x'^{\alpha}$ en rotation par rapport à S autour de leur origine commune. Une particule P de vitesse v^{α} par rapport à S a par rapport à S' la vitesse

$$v'^{\alpha'} = R^{\alpha'}_{\beta}v^{\beta} + \dot{R}^{\alpha'}_{\beta}x^{\beta}, \tag{3}$$

de sorte qu'une particule au repos par rapport à S' a par rapport à S la vitesse

$$v^{\alpha} = -\omega^{\alpha}_{\beta}x^{\beta} = -R^{\alpha}_{\gamma'}\dot{R}^{\gamma'}_{\beta}x^{\beta}, \tag{4}$$

où $R^{\alpha'}_{\sigma}R^{\sigma}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$. On a :

$$R^{\alpha'}_{\sigma}\dot{v}^{\sigma} = \dot{v}'^{\alpha'} + (\dot{\omega}^{\alpha'}_{\gamma'} + \omega^{\alpha'}_{\sigma'}\omega^{\sigma'}_{\gamma'})x^{\gamma'} + 2\omega^{\alpha'}_{\gamma'}v'^{\gamma'}. \tag{5}$$

Il s'ensuit qu'un corps tournant non soumis à des forces appliquées ($\dot{v}'^{\alpha'} = 0$) a cependant une accélération, somme des accélérations fictives centrifuge et de Coriolis. Leur détection à l'aide d'effets internes à S' a conduit au caractère absolu de la rotation.

Lorsque $\dot{\omega}^{\alpha}_{\beta} = 0$, la rotation est uniforme; les transformations du type $t' = t$, $x^{\alpha'} = R^{\alpha'}_{\beta}(t)x^{\beta}$, avec $\omega^{\alpha}_{\beta} := R^{\alpha}_{\sigma'}\dot{R}^{\sigma'}_{\beta} = \text{const.}$ forment le groupe galiléen de rotation. La vitesse d'un point fixe de S' est une fonction linéaire des coordonnées x^{α} :

$$v^{\alpha} = -\omega^{\alpha}_{\beta}x^{\beta}. \tag{6}$$

Espace-temps de Minkowski:

Considérons un espace-temps de Minkowski M_4 rapporté à des coordonnées x^a où a, ou tout indice latin, prend les valeurs 0, 1, 2, 3, et soit $\mathbf{e}_a = e_a{}^k \partial_k$ ($\partial_k = \partial/\partial x^k$) une base orthonormée telle que

$$\eta_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab} - 2\delta_a^0 \delta_b^0. \tag{7}$$

La cobase $\theta^a = dx^k e_k{}^b$ est définie par

$$\theta^a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_a^b; \quad e_a{}^k e_k{}^b = \delta_a^b. \tag{8}$$

Les composantes physiques de toute grandeur géométrique sont les projections sur la base ou la cobase (e.g., un vecteur A^k a pour composantes physiques $A^a = A^k e_k{}^a$). Lorsque $E_a{}^k = \delta_a{}^k$, les coordonnées (cartésiennes) déterminent directement les composantes physiques.

Le groupe de Lorentz est déterminé par le groupe des transformations orthogonales de M_4, i.e. celles préservant la métrique $\eta_{ab}\theta^a\theta^b$. On a donc

$$\theta^{a'} = L^{a'}{}_b \theta^b; \quad \mathbf{e}_{a'} = \mathbf{e}_b L^b{}_{a'}, \tag{9}$$

et $\eta_{a'b'} = \eta_{cd} L^c{}_{a'} L^d{}_{b'}$. $\theta^0 = 0$ et $\theta^\alpha \neq 0$ entraînent $\theta^{0'} \neq 0$, i.e., le caractère relatif de la simultanéité à distance. Les concepts d'espace et de temps absolus sont donc caducs.

La transformation de Lorentz $L = L(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ envoyant la quadri-vitesse $\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}$ d'un repère F sur la quadri-vitesse $\mathbf{E}_0 = \mathbf{v}$ d'un autre repère $\bar{F}$, et laissant invariant le 2-plan orthogonal à $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, s'obtient en effectuant une symétrie par rapport au 3-plan orthogonal à $\mathbf{u}$:

$$\delta_h^k + 2u^k u_h,$$

suivie d'une autre par rapport au 3-plan orthogonal à $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$:

$$\delta_h^k + \frac{(u^k + v^k)(u_h + v_h)}{1 + \gamma},$$

où $\gamma = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. On a donc

$$L^a{}_b = \delta^a{}_b + \frac{(v^a + u^a)(v_b + u_b)}{1 + \gamma} - 2v^a u_b. \tag{10}$$

La 3-vitesse de F par rapport à $\bar{F}$ est $\beta^\alpha = \gamma^{-1} u^k E_k{}^\alpha$, avec

$$E_\alpha{}^k = (\delta_\alpha{}^\sigma + (\gamma - 1)\hat{\beta}_\alpha \hat{\beta}^\sigma) e_\sigma{}^k - \gamma \beta_\alpha e_0{}^k, \tag{11}$$

où $\hat{\beta}^\alpha = \beta^\alpha / |\beta^\sigma|$. Le 3-espace engendré par $e_\alpha{}^k$ est transformé par L non en lui-même, mais en celui engendré par $E_\alpha{}^k$; c'est l'expression de la relativité du 3-espace, i.e. de la non-invariance de l'hypersurface de simultanéité.

D'autre part, $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{E}_\alpha = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha$ exprime que la 3-vitesse $\bar{\beta}^\alpha$ de $\bar{F}$ par rapport à F est l'opposé de β^α, la vitesse de F par rapport à $\bar{F}$.

Transformation infinitésimale de Lorentz et transport de Fermi-Walker:

a) $L(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ détermine une transformation infinitésimale lorsque $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ avec $\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} = 0$, assurant $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -1$. Lorsque l'incrément $\delta \mathbf{u}$ est égal à $\dot{\mathbf{u}}\, ds$, le point désignant d/ds et non plus d/dt, on a

$$\delta e_a{}^k = \dot{e}_a{}^k ds = (u^k \dot{u}_h - u_h \dot{u}^k) e_a{}^h ds, \tag{12}$$

de telle sorte que $L(u + \dot{u}\, ds, u)$ effectue une propagation de Fermi-Walker des axes d'espace le long de la ligne d'univers $\{l_u\}$ tangente à $u^k(s)$.

Un vecteur entraîné $p^k = p^a e_a{}^k$ est transformé en $p^k + \dot{p}^k ds$ tel que

$$\dot{p}^k = (u^k \dot{u}_h - u_h \dot{u}^k) p^h. \tag{13}$$

b) D'autre part, soit $L + \dot{L} ds$ la transformation envoyant $u + \dot{u} ds$ sur $v = Lu$. On a

$$\dot{v}^k = L^k{}_h \dot{u}^h + \dot{L}^k{}_h u^h = 0, \tag{14}$$

et

$$\dot{E}_\alpha{}^k = \Omega^k{}_h E_\alpha{}^h, \qquad \Omega^k{}_h v^h = 0, \tag{15}$$

où

$$\Omega^k{}_h = [\dot{\gamma}(v^k u_h - v_h u^k) + (u^k \dot{u}_h - u_h \dot{u}^k) - \gamma(v^k \dot{u}_h - v_h \dot{u}^k)]/(1+\gamma). \tag{16}$$

Un vecteur entraîné P^k est transformé suivant

$$\dot{P}^k = \Omega^k{}_h \tilde{P}^h, \qquad \tilde{P}^k := (\delta^k{}_h + v^k v_h) P^h, \tag{17}$$

soit encore, en composantes physiques,

$$\dot{P}^\alpha = \Omega^\alpha{}_\beta P^\beta, \qquad \Omega^\rho{}_\sigma = \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\beta^\rho \Gamma_\sigma - \beta_\sigma \Gamma^\rho) \tag{18}$$

où $\Gamma^\alpha = \dot{\beta}^k E_k{}^\alpha$.

Il en résulte que tout vecteur P entraîné avec F (*qu'il soit orthogonal ou non à* $\mathbf{u}$) subit le transport de Fermi-Walker suivant $\{l_u\}$, et la partie spatiale de son image subit la rotation $\Omega^\alpha{}_\beta$ par rapport à (E_α).

Le problème de la rotation relativiste.

Rotation galiléenne et relativité resteinte:

On sait que la rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de l'axe des z (donc de vitesse $\mathbf{v} = (0, \omega r, 0)$) dans un système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) ne conserve pas la métrique de M_4; l'élément linéaire par rapport à S

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{19}$$

devient, lors d'une transformation galiléenne de rotation (TGR), par rapport au système tournant S'

$$ds'^2 = -\gamma^{-2}(dx^{0'})^2 + 2\frac{\omega r'}{c} d\varphi' dx^{0'} + dr'^0 + r'^2 d\varphi'^2 + dz'^2 = \eta_{a'b'}\theta^{a'}\theta^{b'}, \tag{20}$$

avec $\theta^{0'} = \gamma^{-1}dx^{0'} + \gamma\omega r'^2 d\varphi'$, $\theta^{\alpha'} = (dr', \gamma r' d\varphi', dz')$, et $\gamma^{-2} = (1 - \omega^2 r^2/c^2)$. On observe que $\theta^{0'}$ n'est pas une différentielle exacte et que $d\sigma'^2 = \eta_{\alpha'\beta'}\theta^{\alpha'}\theta^{\beta'}$ n'a pas la forme euclidienne ($\theta^{2'} = \gamma r' d\varphi'$), ce qui, semble-t-il, a convaincu Einstein de la nécessité de la géométrie non euclidienne en présence des mouvements accélérés.

Faiblesses de la TGR:

(1) La limitation relatiste des vitesses ($v < c$) réduit le domaine de validité de la TGR à $r < c/\omega$, ce qui, dans le cas d'un disque tournant, réduit le rayon, et dans le cas des pulsars, limite la magnétosphère de l'étoile par le “cylindre de lumière,” où $\omega r = c$. D'où la recherche d'un groupe de transformations conduisant à une dépendance non linéaire entre la vitesse et la distance [14].

(2) La compatibilité entre rigidité et rotation a fait l'objet de nombreuses discussions après la remarque d'Ehrenfest suivant laquelle un corps rigide ne peut être mis en rotation, puisqu'un cercle de rayon constant devrait avoir sa circonférence contractée.

(3) La non-covariance de l'Electrodynamique par la TGR n'a fort curieusement été considérée qu'avec la formulation du paradoxe d'Oppenheimer-Schiff [29] (en 1939) : un condensateur chargé au repos ne crée aucun champ à l'extérieur, par rapport à un observateur, qu'il soit au repos ou en rotation. Quelques tentatives ont été effectuées pour lever le paradoxe :

a) en introduisant à côté du courant **J** dû à la rotation un courant supplémentaire **j** dû aux masses distantes, via la modification de la métrique [29];
b) en faisant apparaître un effet local non inertiel de la rotation sur le champ électromagnétique [15,25];
c) en restaurant la covariance de l'Electrodynamique par l'usage de la transformation instantanée de Lorentz $TIL(\alpha)$ où $\alpha = \omega r/c$ [7]; ce procédé est incohérent car il admet à la fois la loi relativiste de composition des vitesses, l'additivité des vitesses angulaires, et la relation linéaire $v = \omega r$ (c.-à-d. la loi galiléenne de composition des vitesses).

(4) La rotation galiléenne, ou parfois la TIL, est également utilisée pour rendre compte des caractéristiques du rayonnement des pulsars.

Dans les modèles de corotation [23,35] correspondant à des courtes périodes ($P < 1$ sec.), les sources de rayonnement sont situées dans une région de la magnétosphère de l'étoile en rotation, voisine du cylindre de lumière, de telle sorte que les caractéristiques du rayonnement apparaissent comme les effets relativistes d'une source en mouvement très rapide. Outre les faiblesses de la TGR, ces modèles nécessitent de refermer à l'infini les lignes du champ magnétique pour éviter des pertes d'énergie à travers le cylindre de lumière.

Dans les modèles de magnétosphère tournante [2,24], adaptés à de plus longues périodes, on considère la rotation d'une distribution rigide de sources et de champs dans la magnétosphère, de telle sorte que les grandeurs physiques soient constantes par rapport à l'observateur en corotation (condition quasi-statique); le quadri-potentiel obéit alors à une équation qui change de type (elliptique $\rightarrow$ hyperbolique) à la traversée du cylindre de lumière.

Rotation relativiste:

Ces difficultés de la TGR peuvent être surmontées et une alternative existe depuis que Trocheris [33] a découvert en 1949 une nouvelle transformation pour le mouvement de rotation, en s'affranchissant du caractère non holonome du temps; cette transformation a été retrouvée par Takeno [30] lors de son étude du disque tournant, en postulant une loi de groupe pour ces transformations.

(1) La *transformation relativiste de rotation* (TRR) devant se réduire à la TGR pour de faibles vitesses, Trocheris considère la transformation infinitésimale de Lorentz au voisinage d'un point P, correspondant à la vitesse de rotation ωr autour de l'axe des z :

$$\begin{aligned} dr' &= dr \quad ; \quad d\varphi' = d\varphi - \alpha\, dx^0 \\ dz' &= dz \quad ; \quad dx^{0'} = dx^0 - \alpha r\, d\varphi, \end{aligned} \tag{21}$$

où $\alpha = \omega r/c$ et ajoute à l'expression de $dx^{0'}$ le terme $-2\alpha\varphi\, dr$ pour en faire une différentielle exacte. Le générateur devient ainsi

$$X^a = (-\frac{r^2\varphi}{c}, 0, -x^0, 0),$$

et l'on a par intégration

$$\begin{aligned} r' &= r \quad ; \quad \varphi' = \varphi \cosh\alpha - (x^0/r)\sinh\alpha \\ z' &= z \quad ; \quad x^{0'} = x^0\cosh\alpha - r\varphi\sinh\alpha \end{aligned} \tag{22}$$

avec les conditions initiales r = const., z = const., à $t = \varphi = 0$. Il est clair que cette transformation est locale, en ce sens que le système transformé S' est attaché au point fixé par les conditions initiales : S' est le repère instantanément lié au point tournant; ce n'est pas un système d'inertie étendu lié au corps tournant. $TRR(\alpha)$ est bien la généralisation naturelle de $TIL(\alpha)$ et se réduit à TGR pour $\alpha \ll 1$.

Le générateur X^a a été obtenu par Takeno en postulant que

a) les transformations forment un groupe;
b) $\eta(\omega, r) := v/r$ coïncide avec ω pour des vitesses faibles;
c) les vitesses obéissent à la composition relativiste, et les η à la composition correspondante.

L'application qu'il en fait au disque tournant est cependant biaisée par le fait qu'il a négligé de tenir compte de ce que r = const. lors de la TRR [17].

(2) On voit maintenant que la 4-vitesse u^a est :

$$(\cosh\alpha, 0, r^{-1}\sinh\alpha, 0)$$

et que $v = c\tanh\alpha$ n'est jamais supérieure à la vitesse de la lumière. La *vitesse angulaire* de rotation

$$\omega^a = \eta^{abcd} u_b \nabla_c u_d = \omega \delta_3^a \tag{23}$$

est un invariant conforme.

REMARQUE: On peut également concevoir que le corps tournant est associé à la congruence à un paramètre r des courbes tangentes à u^a: le repère de Frenet-Serret correspondant est

$$\begin{aligned} {E_p}^a = (u^a = \cosh\alpha\, \delta_0^a + \frac{\sinh\alpha}{r}\delta_2^a, n^a = \delta_1^a, \\ b^a = \sinh\alpha\, \delta_0^a + \frac{\cosh\alpha}{r}\delta_2^a, c^a = \delta_3^a). \end{aligned} \tag{24}$$

La TRR résout les difficultés soulevées par la TGR :

- La TRR conserve la métrique minkowskienne et l'espace local est simplement euclidien.
- L'absence de limitation de la vitesse exclut toute restriction sur le domaine de validité de la TRR et rejette le cylindre de lumiére à l'infini.
- La covariance de l'Electrodynamique est garantie [21] puisque le système S du laboratoire et le système instantané de rotation S' sont liés par une rotation hyperbolique; le paradoxe d'Oppenheimer-Schiff est résolu de la même manière qu'avec $TIL(\alpha)$, sans toutefois l'ambiguité de l'anholonomie.
- En Physique des pulsars, le rejet à l'infini du cylindre de lumière élimine toute les difficultés dûes à cette notion:

a) Dans le modèle de corotation, la source peut donc être située en un point quelconque de la magnétosphère; la largeur du faisceau est généralement plus petite dans le cas relativiste et le flux d'énergie plus important [19];

b) Dans le modèle de magnétosphère en rotation, la TRR évite la difficulté du changement de type de l'équation du potentiel [20].

Précession de Thomas.

Considérons le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique F^{ab}, et soit s^a son vecteur de polarisation de Bargmann-Wigner orthogonal à la quadri-vitesse u^a de l'électron, et tel que son moment magnétique soit $w^a = (ge/2m)s^a$, où g est le facteur de Landé.

La précession de Larmor par rapport au repère F lié à $\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}$ est donnée par

$$\dot{s}^a_L = -h^a{}_c h^b{}_d F^{cd} w_b; \qquad h^a{}_b = \delta^a{}_b + u^a u_b, \tag{25}$$

et le transport de Fermi-Walker correspondant à $\dot{u}^a = -(e/m)F^a{}_c u^c$ donne, d'après (13),

$$\dot{s}^a_{FW} = -\frac{e}{2m}(u^a F_b{}^c - F^{ac}u_b)u_c s^b. \tag{26}$$

La précession totale est

$$\dot{s}^a = -\frac{e}{2m}(gF^{ab} + (g-2)F^{cb}u^a u_c)s_b. \tag{27}$$

C'est l'équation BMT, où le terme dû à la précession de Thomas provient simplement du transport de Fermi-Walker de s^a.

Dans les *applications aux spectres atomiques*, la détermination de la précession se fait dans le système du noyau atomique [9,16] que nous identifions maintenant à $\bar{F}$ associé à $E_0{}^a = v^a$. On obtient alors, en utilisant essentiellement (18), que la précession totale est :

$$\begin{aligned}\omega^\lambda{}_\rho = &-(e/2m)\varepsilon^\lambda{}_{\rho\sigma}\frac{gB^\sigma - (\beta, \mathbf{E})^\sigma}{1+\gamma} \\ &+ (g-2)(e/2m)\varepsilon^\lambda{}_{\rho\sigma} \\ &[\frac{\gamma^2(\beta,(\beta,\mathbf{B}))^\sigma}{1+\gamma} + \gamma(\beta,\mathbf{E})^\sigma]\end{aligned} \tag{28}$$

où $(\mathbf{a},\mathbf{b})^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$ correspond au produit vectoriel habituel; en outre, on a $E^\alpha = \bar{F}^{\alpha 0}$ et $B^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\bar{F}_{\beta\gamma}$, où $\bar{F}^{ab}$ sont les composantes physiques du champ électromagnétique par rapport au repère $\bar{F}$; elles sont données par $\bar{F}^{ab} = L^a{}_c L^b{}_d F^{cd}$.

La formule (28) rapportées aux coordonnés cartésiennes est celle que l'on trouve dans les traités usuels; on en déduit que l'énergie du couplage spin-orbite est réduite par un facteur 1/2.

On voit donc que la précession de Thomas résulte de la non-équipollence des axes d'espace liés aux repères F et $\bar{F}$, i.e. de la relativité de la simultanéité à distance. Aucun postulat supplémentaire n'est nécessaire. Ce calcul illustre l'intérêt des bases orthonormées pour l'interprétation physique en Relativité, quand on connaît les paradoxes et les assertions incorrectes qu'on a pu faire avec la seule utilisation des bases-coordonnées.

Invariance relativiste de la section efficace.

Définition de la section efficace:

Considérons par rapport à S la collision de deux faisceaux de particules $n_1^a = (n_0 u^a)_1$ et $n_2^a = (n_0 u^a)_2$. Le nombre $d\nu$ de chocs dans le volume dV pendant de temps dt définit [22] la section efficace σ et s'écrit

$$d\nu = \sigma v_{12} n_1 n_2 \, dV \, dt,$$

où v_{12} est la vitesse relative de 2 par rapport à 1, et n_1 et n_2 les densités des particules par rapport à S. Notons que σ est aussi définie en substituant à $d\nu$ la probabilité de transition élémentaire.

L'invariance de $d\nu$, de $dV\,dt$, et de ${n^a}_1 n_{a2} = n_1 n_2 (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$ conduit à

$$\sigma v_{12} (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^{-1} = \text{ invariant.}$$

La variance de σ dépend donc de la définition adoptée pour la vitesse relative.

Définition de la vitesse relative:

La définition *relativiste* $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_R$ en fait un invariant, avec

$$v_R^2 = 1 - ({u^a}_1 u_{a2})^{-2} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)^2}{(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}.$$

On a alors

$$\sigma (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^{-1} = \text{ invariant.}$$

La section efficace n'est donc pas à proprement parler un invariant relativiste.

La définition $v_{12} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| =$ *vitesse mesurée par un observateur extérieur* conduit, lorsque $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont colinéaires, comme dans le cas du système CM du centre d'impulsions, à

$$\sigma = \text{ invariant.}$$

Il a donc paru "commode" à Møller [27] et, à sa suite, aux physiciens de la diffusion ("scattering") d'utiliser cette pseudo-invariance de σ, le calcul des probabilités de transition étant souvent effectué dans le système CM; d'autre part, l'expression de $\mathbf{v}_R$ montre que cette définition peut être maintenue dans tout système où $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = 0$, i.e. dans tout système dont la quadrivitesse est une combinaison linéaire de $u^a{}_1$ et $u^a{}_2$ [8].

Problème. La non-invariance relativiste de $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ suffit cependant à constater que $n_2' v_{12}' dV' \neq n_2 v_{12} dV$ par rapport aux deux systèmes S et S' : le nombre de particules 2 mises en jeu dans la collision n'est pas le même dans les descriptions de la même collision par S et S'!

De même, dans l'étude de l'effet Compton inverse, on est conduit [1,6] à attribuer à la lumière la vitesse $c - v\cos\theta$ (sic).

Pourquoi, contre toute attente de cohérence, des raisons de "commodité" poussent toujours des physiciens à adopter la pseudo-invariance relativiste de la section efficace, je crains fort que cela ne demeure longtemps un mystère du cheminement de la pensée en Physique théorique.

Références

[1] A. I. Akhiezer et V. B. Berestetski 1962, *Elements of Quantum Electrodynamics*, London Oldbourne Press.
[2] H. Ardavan 1981, Astrophys. J. **251**, 674.
[3] H. Bacry 1962, Nuovo Cim. **26**, 1164.
[4] V. Bargmann, L. Michel et V. L. Telegdi 1959, Phys. Rev. Lett. 435.
[5] R. Becker, *Electromagnetic Fields and Interactions*, Dover, 1982.
[6] G. R. Blumenthal et R. J. Gould 1970, Rev. Mod. Phys. **42**, 237.
[7] J. F. Corum 1977, J. Math. Phys. **21**, 2360.
[8] J. Ehlers 1975, dans *General Relativity and Cosmology*, Int. School of Phys. E. Fermi, Course 47, R. K. Sachs (ed.), Academic Press, NY.
[9] R. M. Eisberg 1967, *Fundamentals of Physics*, Wiley and sons, NY.
[10] J. I. Frankel 1926, Zeit. für Phys. **37**, 243.
[11] W. H. Furry 1955, Am. J. Phys. **23**, 517
[12] R. H. Good, Jr. 1965, Phys. Rev. **125**, 2112.
[13] J. D. Hamilton 1981, Canad. J. Phys. **59**, 213.

[14] E. L. Hill 1946, Phys. Rev. **69**, 488, et 1947, Phys. Rev. **71**, 318.
[15] W. M. Irvine 1964, Physica **30**, 1160.
[16] J. D. Jackson 1975, *Classical Electrodynamics*, 2nd. ed., Wiley and sons, NY.
[17] S. Kichenassamy 1961, Bol. Univ. Parana, Fis. Teor. Brasil *1*, no. 1.
[18] S. Kichenassamy et R. A. Krikorian 1978, C. R. Acad. Sci. Paris **286B**, 127.
[19] S. Kichenassamy et R. A. Krikorian 1991, Astrophys. J. **371**, 277.
[20] S. Kichenassamy et R. A. Krikorian 1994a, Astrophys. J. **431**, 715.
[21] S. Kichenassamy et R. A. Krikorian 1994b, J. Math. Phys. **35**, 5726.
[22] L. Landau et E. Lifschitz 1970, *Théorie du champ*, Mir, Moscou.
[23] W. H. McCrea 1972, Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. **157**, 359.
[24] L. Mestel 1973, Astrophysics and Space Science **24**, 289.
[25] T. C. Mo 1970, J. Math. Phys. **11**, 2589.
[26] C. Møller 1945, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matem.-Fys. Meddeleser **23**, no. 1.
[27] C. Møller 1962, *Theory of Relativity*, Oxford, Clarendon Press.
[28] Sir I. Newton 1687, *Principia, Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*, trad.: Andrew Motte, révisée par F. Cajori, Univ. of California Press, London 1931.
[29] L. I. Schiff 1939, Proc. Natl. Acad. Sci. **25**, 391.
[30] H. Takeno 1952, Prog. Theor. Phys. **7**, 367.
[31] L. H. Thomas 1926, Nature **117**, 514.
[32] L. H. Thomas 1927, Phil. Mag. & J. of Science B**3**, 1.
[33] M. G. Trocheris 1949, Phil. Mag. **40**, 1143.
[34] H. Urbantke 1990, Amer. J. Phys. **58**, 747.
[35] V. V. Zheleznyakov 1971, Astrophysics and Space Science **13**, 87.

(Manuscrit reçu le 24 juin 1996)