Sur les cavités résonnantes prises comme étalons de temps

Georges Lochak

Fondation Louis de Broglie
23 Quai de Conti, 75006 Paris

RÉSUMÉ. On analyse la différence entre deux étalons de temps constitués, d'une part, par une cavité électromagnétique résonante et, d'autre part, par une "horloge d'Einstein" qui égrène le temps par "tops" successifs. La variance relativiste de la fréquence de phase de l'onde est à l'inverse du retard des horloges calculé par Einstein mais, comme la fréquence mesurée par un observateur en mouvement est, en fait, une fréquence Doppler, il se trouve que, finalement, il lit la même heure sur les deux types d'horloges.

ABSTRACT. We analyse the difference between two kinds of time standards : a resonant electromagnetic cavity, on one side, and an "Einstein clock" with periodic "beeps", on the other side. The relativistic variance of a phase frequency of a wave is the inverse of the Einstein time dilatation, but actually, in a moving frame, we do not observe time standards but Doppler frequencies so that, finally, we read the same hour on the two kinds of clocks.

Considérons, dans un repère au repos R, deux miroirs parfaits parallèles, séparés par une distance l et, entre ces deux miroirs, une onde lumineuse stationnaire obéissant à l'équation des ondes (où la vitesse c est un invariant) :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

Une telle onde peut s'écire, en supposant que son amplitude s'annule sur les miroirs et en ne prenant que le fondamental :

$$\psi = \exp i\frac{\pi c}{l}(t + \frac{x}{c}) - \exp i\frac{\pi c}{l}(t - \frac{x}{c}) \tag{2}$$

soit :

$$\psi = 2i \exp \frac{i\pi c}{l} t \sin \frac{\pi}{l} x \tag{3}$$

Voyons comment elle apparaît à un observateur situé dans un référentiel R' animé d'une vitesse uniforme v par rapport à R parallèlement à la direction de propagation des ondes. Le temps et l'espace seront notés t' et x' dans R', avec les relations de Lorentz :

$$t = \frac{t' - v/c^2 x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t' = \frac{t + v/c^2 x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4}$$

D'où les formules :

$$t - \frac{x}{c} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}(t' - \frac{x'}{c}), \quad t + \frac{x}{c} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(t' + \frac{x'}{c}) \tag{5}$$

où apparaissent les facteurs figurant dans les fréquences Doppler. En introduisant ces formules dans (2) nous aurons :

$$\psi = \exp i \frac{\pi c}{l} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(t' + \frac{x'}{c}) - \exp i \frac{\pi c}{l} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}(t' - \frac{x'}{c}) \tag{6}$$

soit :

$$\psi = \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta)(t' + \frac{x'}{c}) - \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta)(t' - \frac{x'}{c}) \tag{7}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \psi = {} & \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(t' + \frac{x'}{c}) \exp \frac{-i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}\beta(t' + \frac{x'}{c}) \\ & - \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(t' - \frac{x'}{c}) \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}\beta(t' - \frac{x'}{c}) \end{aligned} \tag{8}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \psi = {} & \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(t' - \frac{\beta}{c}x') \\ & [\exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{x'}{c} - \beta t') - \exp \frac{-i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{x'}{c} - \beta t')] \end{aligned} \tag{9}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\psi = 2i \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(t' - \frac{\beta}{c}x') \sin[\frac{\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(\frac{x'}{c} - \beta t')] \qquad (10)$$

ou encore:

$$\psi = 2i \exp \frac{i\pi c}{l\sqrt{1-\beta^2}}(t' - \frac{\beta}{c}x') \sin[\frac{\pi}{l\sqrt{1-\beta^2}}(x' - vt')] \qquad (11)$$

Ces formules, qui redonnent (3) lorsque $\beta = 0$, montrent que l'observateur en mouvement, qui se trouve dans le repère R', voit une onde dont la phase se propage avec la vitesse $V = c/\beta$ de de Broglie, avec une modulation d'amplitude qui elle, se meut à la vitesse de la cavité par rapport à l'observateur R'. On remarque que *la fréquence de phase de l'onde est plus grande que la fréquence au repos* :

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\pi c}{l} \qquad (12)$$

car, en raison de la contraction de Lorentz, la distance entre les deux miroirs, est plus petite vue du repère en mouvement R' que du repère R, au repos par rapport à la cavité :

$$l' = l\sqrt{1-\beta^2} \qquad (13)$$

On le voit sur les formules (10) et (11). Le facteur en sinus, dans (11), montre que l'amplitude de l'onde s'annule sur les miroirs, comme dans le système propre, mais dans R' ils sont animés de la vitesse v et leur distance est contractée selon la loi (13). Le fait que, dans le repère en mouvement, la phase de l'onde varie plus vite que dans le repère lié à la cavité pouvait se voir sans calcul en remarquant que l'équation des ondes (1) étant invariante par la transformation de Lorentz (4), il existe, dans le repère en mouvement R', une solution stationnaire identique à (3), mais exprimée avec les variables primées :

$$y = 2i \exp \frac{i\pi c}{l'} t' \sin \frac{\pi}{l'} x' \qquad (14)$$

et comme la longueur l' subit la contraction (13), on retrouve la formule (12).

On peut se demander d'où provient ce paradoxe, qu'une cavité résonnante prise comme étalon de temps semble ne pas subir le retard des horloges d'Einstein, et même se comporter à l'inverse de ce qu'on pourrait attendre. En fait, elle subit bel et bien le retard, car elle n'échappe pas à la transformation de Lorentz du temps, mais elle le fait d'une manière indirecte. En effet, qu'est-ce que le retard des horloges ? C'est le fait que si, dans un certain repère R de coordonnées t, x, deux événements se produisent en un *même point* x à des instants t_1 et t_2, séparés par un intervalle $\Delta t = t_2 - t_1$, le même intervalle mesuré vu d'un repère R' aura, d'après (4), une valeur $\Delta t'$:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{15}$$

Supposons qu'on installe dans chaque repère des horloges identiques qui égrènent le temps par intervalles égaux τ. Si l'horloge dans le repère R égrène n intervalles, un observateur lié à ce repère dira qu'il s'est écoulé un temps $t = n\tau$, mais un observateur R', en mouvement par rapport à lui, dira que le temps mesuré par R est égal :

$$t' = \frac{n\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{16}$$

Si l'observateur R' compare ce temps à celui qu'il mesure en comptant le *même nombre* d'intervalles τ sur sa propre horloge, il trouvera un temp $n\tau$ et il dira que l'horloge de R' retarde parce que le temps étalon τ de R est trop long, ou encore que sa fréquence d'horloge est plus petite que la sienne puisque R' lui attribue la fréquence :

$$\nu_1 = \sqrt{1-\beta^2}\,\nu \tag{17}$$

Bien entendu, R en dira autant sur R'. Ce raisonnement classique repose sur ce que Brillouin [1] appelait une *horloge d'Einstein*, qui égrène le temps par intervalles égaux : en somme, c'est une horloge qui fait "tic-tac". Brillouin soulignait fortement qu'une cavité résonnante comme un laser, dont la fréquence est celle d'une onde stationnaire, est une horloge d'un autre type.

Nous reviendrons au problème de la mesure du temps dans des référentiels en mouvement, mais nous ferons auparavant une remarque sur les deux types d'horloge. Les propriétés d'une horloge d'Einstein sont décrites par le vecteur intervalle d'univers $\{x_0 = ct, \mathbf{r}\}$ qui, comme tout vecteur d'espace-temps, satisfait à la loi de transformation suivante dont les formules de Lorentz (4) sont un cas particulier ($r_{//}$ est la composante de $\mathbf{r}$ parallèle à la vitesse $\mathbf{v} = \beta c$) :

$$\begin{aligned} x_0 =& \frac{x'_0 - \beta \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad r_{//} = \frac{r'_{//} - \beta x'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ x'_0 =& \frac{x_0 + \beta \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad r'_{//} = \frac{r_{//} + \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{18}$$

D'autre part, dans un rayonnement, la fréquence et le vecteur d'onde définissent un vecteur d'univers $\{k_0 = \nu/c, \mathbf{k} = \mathbf{n}/\lambda\}$ (où $\mathbf{n}$ est le vecteur unité). Ce vecteur obéit aux mêmes relations (18) que le vecteur coordonnées $\{ct, \mathbf{r}\}$, mais avec cette différence que ce dernier a pour quatrième composante le **temps**, tandis que le vecteur d'onde d'univers a pour quatrième composante la **fréquence**. Il ne faut donc pas s'étonner si deux quatrièmes composantes subissent des transformations analogues, (12) et (15), et que *la fréquence d'une onde se transforme comme un intervalle de temps et non comme son inverse*, comme la fréquence d'une horloge d'Einstein. Toutefois, la fréquence d'Einstein conserve un sens dans la cavité.

En effet, considérons un point quelconque d'abscisse x_0 lié au référentiel de la cavité et qui est donc animé de la vitesse v par rapport à l'observateur R'. Si l'origine des coordonnées de R et de R' coïncident à l'instant $t' = t = 0$, à un instant ultérieur t', l'observateur R' verra ce point en :

$$x' = vt' + x_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{19}$$

Si, maintenant, l'observateur R' fixe son attention sur la vibration de l'onde en ce point, il verra le phénomène décrit en introduisant dans (11) la valeur (19), soit :

$$\psi = 2i \exp i(\frac{\pi c}{l}\sqrt{1-\beta^2}t' - \frac{\pi\beta}{l}x_0) \sin\frac{\pi}{l}x_0 \tag{20}$$

Au mileu de la cavité ($x_0 = l/2$), nous aurons plus simplement :

$$\psi = 2i \exp i(\frac{\pi c}{l}\sqrt{1-\beta^2}t' - \frac{\pi\beta}{2}) \tag{21}$$

Donc R' voit, en tout point lié au système R, une vibration qui n'a pas la fréquence (12) de l'onde mais la fréquence (17) d'une horloge d'Einstein. En somme, nous avons un objet, la cavité résonnante, qui est siège d'une onde stationnaire et se meut à la vitesse v par rapport à un observateur R'. La formule (20) ou (21) montre que celui-ci voit, en tout point lié à la cavité, une vibration qui s'y trouve en quelque sorte "enfermée" et dont la fréquence ν_1 obéit à la loi d'Einstein (17) ; mais en même temps, il voit se propager une onde à la vitesse de phase $V = c/\beta$ de de Broglie, dont la fréquence ν varie selon la loi (12), donc à l'inverse de ν_1. L'onde glisse le long de la cavité, puisque leurs vitesses sont différentes, mais ce glissement compense la différence de fréquences, de sorte que tout point de la cavité reste à tout instant synchrone et en phase avec la vibration de l'onde au même point.

Ceci n'est autre, dans un cas un peu différent, que la *loi de l'accord des phases* de de Broglie [2] car, *mutatis mutandis*, les conditions sont les mêmes : de Broglie attachait au système propre d'une particule (ponctuelle au lieu d'être étendue comme ici) une fréquence d'horloge synchrone et en phase avec une onde stationnaire ; pour un observateur en mouvement, cette onde est progressive, comme l'onde (11), et se propage à la vitesse $V = c/\beta$ avec la fréquence (12). Bien que les fréquences et les vitesses soient différentes, *l'horloge reste en phase avec l'onde* pour l'observateur en mouvement, résultat auquel de Broglie attachait une importance particulière. Cela étant, il serait naïf de regarder les calculs précédents comme une "explication" de la mécanique ondulatoire, car la véritable idée est d'attacher une fréquence à un corpuscule. Nous avons seulement utilisé le raisonnement cinématique de de Broglie.

Revenons maintenant à la cavité et à la mesure du temps et demandons-nous laquelle des deux fréquences (12) ou (17) sera vue par l'observateur en mouvement R'. En fait, aucune des deux, car l'observateur peut lire l'horloge de différentes manières . Prenons d'abord la manière théoriquement la plus simple et qui correspond à certaines expériences. Elle consiste à recevoir une onde émise par la cavité elle-même à travers une légère fuite de l'un des miroirs (c'est le cas du laser) : cette onde est l'une des ondes progressives de la décomposition (6). Selon que l'observateur voit la cavité s'éloigner ou se rapprocher de lui, il verra l'une des deux ondes :

$$\psi = \exp i \frac{\pi c}{l} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} (t' + \frac{x'}{c})$$

ou

$$\psi = \exp i \frac{\pi c}{l} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} (t' - \frac{x'}{c}) \tag{22}$$

La véritable fréquence observée est donc une fréquence Doppler qui dépend de la direction et du sens du mouvement relatif par rapport à la cavité. Dans le cas général, la fréquence se déduit de la formule obtenue à partir de la formule (18) appliquée au vecteur d'onde :

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \tag{23}$$

où θ est l'angle du mouvement par rapport à la direction de propagation de l'onde. On retrouve bien les deux fréquences qui figurent dans (22) pour $\theta = \pi$ (la cavité s'éloigne) et $\theta = 0$ (la cavité se rapproche). Il y a un cas remarquable, c'est celui où $\theta = \pi/2$, quand le mouvement est transverse, car on a :

$$\nu' = \nu\sqrt{1-\beta^2} \tag{24}$$

On pourrait croire qu'on observe alors le ralentissement des horloges d'Einstein, mais ce serait une interprétation inexacte car la cavité n'est pas une horloge d'Einstein et la formule (24) exprime en réalité l'effet Doppler transversal. En fait, il n'y a pas *une* fréquence reçue par l'observateur en mouvement, mais *des* fréquences possibles, qui dépendent du mouvement relatif de l'horloge et sont définies par la formule (23).

On pourrait voir là une différence radicale entre la lecture de l'heure à distance sur une cavité résonnante et sur une horloge d'Einstein, mais ce n'est pas vrai car, ainsi que le fait remarquer Fock dans son traité de relativité [3], ce n'est pas la fréquence d'horloge (17) que mesure l'observateur en mouvement. En effet, il n'enregistre pas les "tops" de l'horloge à l'instant où ils sont émis. Dans le meilleur des cas, en supposant qu'ils sont émis par radio ou sous la forme d'un signal lumineux, il les recevra avec un retard r/c (r étant la distance à l'instant de l'émission).

Supposons, par exemple, que l'horloge d'Einstein s'éloigne. L'observateur R' ne recevra pas le n-ième top de l'horloge à l'instant :

$$t_n = \frac{n\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25}$$

mais à l'instant :

$$t_n^* = (1 + \frac{v}{c})t_n = (1 + \frac{v}{c})\frac{n\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = n\tau\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \tag{26}$$

Il s'ensuit donc que l'observateur ne mesurera pas la fréquence d'horloge d'Einstein (17) mais la fréquence Doppler :

$$\nu_n^* = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{27}$$

Prenons le cas, apparemment plus compliqué, d'une horloge "atomique". En fait, les signaux qu'on reçoit sont ceux d'une horloge à quartz corrigée par un étalon atomique. Ce sont ces signaux que reçoivent les réveils-matin ou les montres-bracelet corrigés par radio qu'on trouve dans le commerce. On a donc un oscillateur local dont la fréquence est transportée par une onde radio. Quel que soit le type de modulation, le signal s'intègre à la décomposition de Fourier de l'onde et ce qui vient d'être dit est vrai pour chaque fréquence, donc pour le signal tout entier. Si le possesseur d'une telle montre se met en mouvement à grande vitesse, il recevra une correction horaire modifiée par effet Doppler, mais ce sera sans grande incidence sur sa vie quotidienne.

Remerciements. Je remercie vivement Christian Cormier Delanoue avec qui j'ai eu de nombreuses discussions sur le sujet traité ici, qui sont à l'origine de ce petit travail. Je remercie également Jean Salmon et Nikias Stavroulakis pour les remarques qu'ils m'ont faites.

Références

[1] L. Brillouin, *Relativity reexamined*, Academic Press, N.Y., 1970.
[2] L. de Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta*, Réédition de la Fondation Louis de Broglie, Paris, 1992.
[3] V. Fock, *La théorie de l'espace, du temps et de la gravitation* (en russe), Moscou, 1955.

(Manuscrit reçu le 11 octobre 1994)