# Variance relativiste de la température et théorie cinétique des gaz

Jean Salmon

Fondation Louis de Broglie
23, Quai Conti, 75006 Paris

RESUME. Le but de cet article est la détermination de la variation de la température dans le cas d'un gaz parfait au moyen de la théorie cinétique. L'expression de la fonction de distribution du gaz est obtenue quand le tube contenant le gaz est en mouvement. La formule proposée par de Broglie et Planck est retrouvée lorsque le travail de pression dans la contraction de Lorentz est introduit.

*ABSTRACT. The aim of this paper is the determination of the relativistic variation of the temperature in the case of a perfect gas by kinetic theory. The expression of the distribution function of gas is obtained when the tube containing the gas is moving. The formula proposed by de Broglie and Planck is find again when the work of the pressure in the Lorentz contraction is introduced.*

## 1. Introduction

Dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte, il convient d'examiner le problème de la variation de la température d'un corps lorsque celui-ci passe de l'état de repos à un état de mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $v$. Ce corps peut être un solide rigide ou un gaz contenu dans un tube cylindrique.

Dans le cas d'un corps solide, on peut estimer que celui-ci contient au repos une quantité de chaleur $Q_0$ et qu'en mouvement celle-ci varie comme une énergie interne.

Désignant par $c$ la vitesse de la lumière, la quantité de chaleur devient $Q$ avec

$$Q = Q_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \tag{1}$$

C'est en particulier la formule proposée par les physiciens Ott [1], Arzeliès [2], Möller [3], Costa de Beauregard [4] et Christian Cormier [5].

On peut au contraire ajouter le travail des forces nécessaires au passage de l'état de repos à l'état de mouvement et obtenir l'équation

$$Q = Q_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \tag{2}$$

C'est la formule proposée par Von Laue [6], Planck [7], Einstein [8], Guessous [9], Lochak [10] et de Broglie [11].

L'entropie étant un invariant relativiste dans une transformation réversible, les températures $T_0$ au repos et $T$ en mouvement, suivent les mêmes lois que les quantités de chaleur.

On est donc en présence de deux formules contradictoires, soit

$$T = T_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \tag{3}$$

$$T = T_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \tag{4}$$

Nous allons reprendre le problème dans le cas du gaz parfait dans le cadre de la théorie cinétique.

Van Kampen [12] l'a étudié du point de vue thermodynamique et a montré qu'il fallait distinguer le cas où on tient compte du mouvement des parois du cas où celui-ci est négligé.

Nous retrouverons cette différence en théorie cinétique.

Nous considérons une masse de gaz contenue dans une enceinte cylindrique de longueur $l$ et de surface de base $S$. Le tube est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $v$ parallèlement à son axe.

Nous considérons, pour simplifier, que le gaz est à une dimension, ce qui signifie que les molécules de masse $m$ se déplacent parallèlement à l'axe du tube que nous prenons comme axe $Ox$.

Le gaz est assez dilué pour que le rôle des forces interparticulaires soit négligeable. Désignons par $N$ le nombre de molécules contenues dans le tube et par $n$ la densité particulaire, soit $n$ avec

$$n = \frac{N}{lS} \tag{5}$$

La contribution des forces interparticulaires à la pression est négligeable si, en désignant par $\sigma$ le diamètre des molécules, on a

$$n\sigma^3 <<< 1 \tag{6}$$

Il en est bien ainsi aux pressions usuelles.

Par exemple, pour l'Argon $\sigma$ est voisin de $9, 10^{-10} m$ tandis qu'à la pression de $10^5 Pascal$, on a $n$ voisin de $10^{25}$ particules par $m^3$. D'où

$$n\sigma^3 \simeq 2,7 10^{-4} <<< 1 \tag{7}$$

Le gaz peut donc être assimilé à un gaz parfait.

Lorsque le tube est au repos, la vitesse d'une molécule est désignée par $w_0$. Lorsque le tube est en mouvement à la vitesse $v$, elle demeure $w_0$ par rapport à un repère lié au tube.

Pour un observateur fixe, elle devient $w$. En physique non relativiste, on a

$$w = w_0 + v \tag{8}$$

et en physique relativiste

$$w = \frac{w_0 + v}{1 + \frac{vw_0}{c^2}} \tag{9}$$

Il convient maintenant de déterminer la fonction de distribution des molécules dans un tube au repos.

Nous désignons par $m_0$ la masse au repos d'une molécule, par $w_0$ sa vitesse et par $p_0$ sa quantité de mouvement. $K_0$ est la constante de Boltzmann et $T_0$ la température du gaz. $t$ désigne le temps et $c$ la vitesse de la lumière. En présence d'un potentiel extérieur $V(x)$, l'expression de l'Hamiltonien est

$$H = [m_0^9 c^4 + p^2 c^2]^{1/2} + V(x) \tag{10}$$

On a les relations

$$p_0 = \frac{m_0 w_0}{[1 - \frac{w_0^2}{c^2}]^{1/2}} \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_0} = \frac{c^2 p_0}{[m_0^9 c^4 + p^2 c^2]^{1/2}} \tag{12}$$

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{13}$$

L'équation cinétique du gaz des molécules est en désignant par $F(t, x_0, p_0)$ la fonction de distribution et en supposant le gaz assez dilué pour que le rôle des collisions soit négligeable (13) (14)

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_0}\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial F_0}{\partial p_0} = 0 \tag{14}$$

Soit encore

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + [\frac{cp_0}{(m_0^9 c^4 + p_0^9)^{1/2}}]\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p_0} = 0 \tag{15}$$

Introduisons maintenant $w_0$ à la place de $p_0$. Il vient

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + w_0\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}(1 - \frac{w_0^2}{c^2})^{3/2}\frac{1}{m_0}\frac{\partial F_0}{\partial w_0} = 0 \tag{16}$$

Aux températures usuelles, on a

$$K_0 T_0 <<< m_0 c^2 \tag{17}$$

d'où en désignant par $\overline{w_0^2}$ la valeur moyenne de $w_0^2$

$$\frac{\overline{w_0^2}}{c^2} <<< 1 \tag{18}$$

L'équation cinétique (16) peut être approximée par l'expression non relativiste

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + w_0\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_0} = 0 \tag{19}$$

A l'équilibre on trouve la solution

$$F_0 = (\frac{m_0}{2\pi K_0 T_0})^{1/2} e^{-\frac{1}{K_0 T_0}[\frac{m_0 w_0^2}{2} + V]} \tag{20}$$

Soit en l'absence de potentiel la forme Maxwellienne

$$F_0 = (\frac{m_0}{2\pi K_0 T_0})^{1/2} e^{-\frac{m_0 w_0^2}{2K_0 T_0}} \tag{21}$$

Avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_0 dw_0 = 1 \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_0 w_0^2 F_0 dw_0 = \frac{1}{2} K_0 T_0 \tag{23}$$

## 2. Cas du tube en mouvement en physique non relativiste

Le tube est en mouvement à la vitesse $v$, d'où

$$w = w_0 + v \tag{24}$$

Dans le repère du tube, la fonction de distribution est $F_0(w_0)$, avec

$$F_0 = (\frac{m_0}{2\pi K_0 T_0})^{1/2} e^{-\frac{m_0 w_0^2}{2K_0 T_0}} \tag{25}$$

Pour un observateur fixe, elle devient $F(w)$ avec par suite de la conservation des molécules

$$F_0(w_0) dw_0 = F(w) dw \tag{26}$$

d'où

$$F(w) = (\frac{m_0}{2\pi K_0 T_0})^{1/2} e^{-\frac{m_0}{2K_0 T_0}(w-v)^2} \tag{27}$$

La température $T_0$ est définie au moyen de l'énergie cinétique relative moyenne $\overline{E}_{CR}$, d'où la formule

$$\frac{1}{2} K_0 T_0 = \overline{E}_{CR} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_0 (w-v)^2 F(w) dw \tag{28}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_0 T_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_0}{2} (w^2 - 2vw + v^2) F(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_0}{2} w^2 F(w) dw - \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned} \tag{29}$$

Désignons par $\overline{E}_{CA}$ l'énergie cinétique absolue moyenne et par $E_{cm}$ la quantité $m_0 v^2/2$. On a

$$\frac{1}{2}K_0 T_0 = \overline{E}_{CA} - E_{cm} \tag{30}$$

Désormais la température $T$ sera définie par la formule

$$\frac{1}{2}K_0 T = \overline{E}_{CA} - E_{cm}. \tag{31}$$

Elle est égale à $T_0$ pour un tube fixe.

## 3. Cas du tube au repos en physique relativiste

$E_{cm}$ est encore nul. L'énergie cinétique absolue a pour expression

$$E_{CA} = m_0 c^2[(1 - \frac{w^2}{c^2})^{-1/2} - 1] \tag{32}$$

d'où

$$\frac{1}{2}K_0 T = \int_{-\infty}^{+\infty} m_0 c^2[(1 - \frac{w^2}{c^2})^{-1/2} - 1](\frac{m_0}{2\pi K_0 T_0})^{1/2} e^{-\frac{m_0 w^2}{2K_0 T_0}} dw. \tag{33}$$

Mais on a imposé

$$\frac{\overline{w^4}}{c^4} << \frac{\overline{w^2}}{c^2} << 1 \tag{34}$$

On peut écrire

$$m_0 c^2[(1 - \frac{w^2}{c^2})^{-1/2} - 1] \simeq \frac{1}{2} m_0 w^2 \tag{35}$$

et en reportant dans (33) il vient

$$T = T_0 \tag{36}$$

## 4. Cas du tube en mouvement en physique relativiste

Le tube se déplace à la vitesse $v$ et on suppose que

$$\frac{v^4}{c^4} << \frac{v^2}{c^2} << 1 \tag{37}$$

L'énergie cinétique absolue est

$$E_{CA} = m_0c^2[(1 - \frac{w^2}{c^2})^{-1/2} - 1] \tag{38}$$

et l'énergie cinétique moyenne

$$E_{cm} = m_0c^2[(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} - 1] \tag{39}$$

La température est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}K_0T = m_0c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] F(w)dw \\ - m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]\end{aligned} \tag{40}$$

avec

$$F(w)dw = F_0(m_0)dm_0 \tag{41}$$

$$w = \frac{w_0 + v}{1 + \frac{vw_0}{c^2}} \tag{42}$$

d'où la formule

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}K_0T = m_0c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left[1 - \frac{1}{c^2}\frac{(w_0+v)^2}{(1 + \frac{vw_0}{c^2})^2}\right] - 1\right] \\ \left(\frac{m_0}{2\pi K_0T_0}\right)^{1/2} e^{-\frac{m_0w_0^2}{2K_0T_0}}\, dw_0 - m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]\end{aligned} \tag{43}$$

Il semble qu'on puisse approximer les énergies cinétiques par les termes du premier ordre, soit

$$E_{CA} \simeq \frac{1}{2}m_0(\frac{(w_0+v)^2}{(1 + \frac{vw_0}{c^2})^2}) \tag{44}$$

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{45}$$

Il vient aussi en développant en série $(1 + vw_0/c^2)^{-2}$ et en tenant compte des approximations

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}K_0T =& (\frac{m_0}{2\pi K_0T_0})^{1/2}\frac{m_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(w_0^2 + 2vw_0 + v^2) \\ & (1 - \frac{2vw_0}{c^2} + 3\frac{v^2w_0^2}{c^4})e^{-\frac{m_0w_0^2}{2K_OT_0}}dw_0 - \frac{1}{2}m_0v^2\end{aligned} \tag{46}$$

Soit

$$\frac{1}{2}K_OT = \frac{1}{2}K_0T_0(1 - \frac{4v^2}{c^2}) \tag{47}$$

Mais cette formule n'est pas exacte.

En effet on néglige ainsi un terme en $v^2/c^2$ provenant du second terme du développement de $(1 - w^2/c^2)^{-1/2}$. Il faut utiliser pour $E_{CA}$ l'expression

$$E_{CA} = \frac{1}{2}m_0(\frac{w_0 + v}{1 + \frac{vw_0}{c^2}})^2 + \frac{3}{8}\frac{m_0}{c^2}(\frac{w_0 + v}{1 + \frac{vw_0}{c^2}})^4 \tag{48}$$

qui dans le cadre des approximations imposées peut se réduire à

$$\begin{aligned} E_{CA} = \frac{m_0}{2}(m_0^2 + 2vw_0 + v^2)(1 - \frac{2vw_0}{c^2} + \frac{v^2w_0^2}{4}) \\ + \frac{3}{8}\frac{m_0}{c^2}(w_0^4 + 4w_0^3v + 6w_0^2v^2 + 4w_0v^3 + v^4) \\ (1 - \frac{4vw_0}{c^2} + \frac{6v^2w_0^2}{c^4}) \end{aligned} \tag{49}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{K_0T}{2} = \Big(\frac{m_0}{2\pi K_0T_0}\Big)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} m_0\Big[\Big(\frac{w_0^2 + 2vw_0 + v^2}{2}\Big) \\ \Big(1 - \frac{2vw_0}{c^2} + \frac{v^2w_0^2}{4}\Big) + \frac{3}{8}(w_0^4 + 4w_0^3v + 6w_0^2v^2 + 4w_0v^3 + v^4) \\ \Big(1 - \frac{4vw_0}{c^2} + \frac{6v^2w_0^2}{c^4}\Big)\Big]dw_0 - \Big[\frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}\Big] \end{aligned} \tag{50}$$

En se limitant aux termes en $v^2/c^2$ il subsiste

$$\frac{1}{2}K_0T = \frac{1}{2}K_0T_0[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}] \tag{51}$$

Cette formule ne tient pas compte du travail des forces de pression dans la contraction du tube de $l_0$ à $l$. Cette contraction s'écrit

$$l = l_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \simeq l_0(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{52}$$

Examinons les quantités de chaleur mises en jeu dans cette contraction.

Soit un tube rempli d'un gaz dilué à température basse. Ignorons les effets quantiques et annulons la température. Apportons par les parois une quantité de chaleur qui porte le gaz à la température $T_0$ soit $Q_O$. L'énergie interne du gaz est $Q_0$. Mettons le tube en mouvement à la vitesse $v$.

Pour l'observateur fixe la température devient $T'_0$ avec d'après (51)

$$T'_0 = T_0(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{53}$$

et l'énergie interne du gaz devient $Q'_0$ avec

$$Q'_0 = Q_0[1 + \frac{1}{2}\frac{v^3}{c^2}] \tag{54}$$

Introduisons le travail $W$ des forces de pression. L'énergie interne du gaz devient $Q$ et d'après le premier principe de la Thermodynamique, on a

$$Q'_0 = Q_0[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}] = Q + W \tag{55}$$

La contraction du tube entraîne une compression adiabatique du gaz d'un volume $V_0$ à un volume $V$ avec

$$\frac{V}{V_0} = \frac{l}{l_0} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \simeq (1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{56}$$

Le gaz étant à une dimension, le degré de liberté est égal à l'unité et la constante $\gamma$ caractéristique du phénomène est

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 3 \tag{57}$$

La pression étant un invariant relativiste on a, en désignant par $p'$ cette pression :

$$W = -\int_{V_0}^{V} p'dV = \frac{1}{\gamma - 1}[p'V - p'_0 V_0] \tag{58}$$

Or

$$p'_0 V_0^3 = p' V^3 \tag{59}$$

Par suite

$$W = \frac{1}{2}p'_0 V_0\Big[\frac{p'V}{p'_0 V_0} - 1\Big] = \frac{1}{2}p'_0 V_0\Big[(\frac{V_0}{V})^2 - 1\Big] = \frac{p'_0 V_0}{2}\Big[(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1} - 1\Big] \tag{60}$$

Soit

$$W \simeq \frac{p_0' V_0 v^2}{2c^2} \tag{61}$$

Or

$$Q_0 = \frac{p_0' V}{2} \tag{62}$$

Et finalement

$$Q = Q_0(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{63}$$

La température $T$ est par suite donnée par la formule

$$T = T_0(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{64}$$

Ce qui est le début du développement de la formule Planck-de Broglie

$$T = T_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \tag{65}$$

## Conclusion

L'étude de la variance relativiste de la température d'un gaz parfait par la théorie cinétique conduit à une diminution de celle-ci selon la formule

$$T = T_0(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{66}$$

N.B. - Nous remercions Messieurs Cormier et Dutheil pour d'utiles entretiens.

## Références

[1] Ott H., Z. Phys. 175 (1963) 70.
[2] Arzeliès H., Nuovo Cimento 35 (1965) 72.
[3] Möller C., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selk 36 (1968) 16.
[4] Costa de Beauregard O., *La théorie de la relativité restreinte*, Masson Paris (1949).
[5] Cormier Delanoue C., Ann. Fond. L. de Broglie 19 (1994) 259.
[6] Von Laue M., Ann. der Phys. 23 (1907) 989.
[7] Planck M., Ann. der Phys. 76 (1908) 1.
[8] Einstein A., Jh. Radwakt, Electronik 4 (1907) 411.
[9] Guessous A., *Louis de Broglie, sa conception du monde physique*, Gauthier-Villars Paris (1973).

[10] Lochak G., Ann. Fond. L. de Broglie 18 (1993) 345.
[11] De Broglie L., Cahiers de Physique (1948) 1 - 11.
[12] Van Kempen N.G., Phys. Rev. 173 (1968) 295.
[13] Wu, *Kinetic Theory of Gases and Plasmas*, Addison-Wesley.
[14] De Broglie L., *Diverses Questions de Mécanique et de Thermodynamique classique et relativiste*, Springer.

*(Manuscrit reçu le 30 juin 1995)*