Sur les fondements de la relativité restreinte

Nikias Stavroulakis

Solomou 35,
152 33 Chalandri, Grèce

RÉSUMÉ. La notion de temps dans un référentiel cartésien est susceptible d'une infinité de définitions. En partant d'une horloge de référence, placée à un point Q arbitrairement choisi, on établit d'abord la définition la plus simple possible qui donne lieu à ce qu'on appelle le temps fondamental relatif au point Q. D'autres définitions en résultent moyennant des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ dans lesquels les coordonnées des points de l'espace figurent comme paramètres. Le changement d'horloge de référence entraîne de nouvelles définitions de temps de la même façon. On examine de plus près la définition spécifique proposée par Einstein en relativité restreinte, et finalement on analyse les deux implications immédiates de la transformation de Lorentz, à savoir le ralentissement des horloges et la contraction de Lorentz. Celle-ci ne semble pas avoir une vraie signification physique.

ABSTRACT. The notion of time in a Cartesian system can be defined in infinitely many ways. The simplest of them, which we call the fundamental time, is defined with respect to a clock placed at an arbitrary chosen point Q. Other definitions are deduced from it by using diffeomorphisms of $\mathbb{R}$ in which the coordinates of the points of the space are involved as parameters. The change of reference point implies new definitions in the same way. We examine closely the definition proposed by Einstein in the theory of special relativity, and finally we analyse carefully the two immediate implications of the Lorentz transformation, namely the time dilation and the length contraction. This last does not seem to have a true physical meaning.

1. Le temps fondamental et le temps d'Einstein dans un référentiel cartésien

Dans son ouvrage "Méthodes mathématiques de la mécanique classique", V. Arnold [1] commence par introduire les notions de base de la mécanique classique sans se préoccuper de leurs origines géométriques et physiques. Il identifie d'abord "l'univers" (ou "l'espace-temps") à une variété affine A^4 et le temps à une application linéaire $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de l'espace vectoriel des translations sur "l'axe réel du temps". Il définit ensuite la simultanéité de deux événements $a \in A^4$ et $b \in A^4$ par la condition que cette application linéaire s'annule en $(a - b)$. Finalement, en munissant chacun des sous-espaces d'événements simultanés de la structure euclidienne ordinaire, il définit "l'espace de Galilée", qui est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Cependant, l'approche formelle d'Arnold laisse en suspens nombre de problèmes significatifs et surtout de questions soulevées par la notion de temps. En effet, nos connaissances géométriques élémentaires, complétées par la puissance de notre imagination, nous permettent de concevoir plutôt facilement l'idée d'un référentiel cartésien, de sorte que, si l'on fixe une valeur x_0 de l'abscisse x, par exemple, on n'a aucune difficulté d'attribuer à l'ensemble des points (x_0, y, z) une représentation géométrique en l'identifiant à un plan parallèle à yOz. Or, si l'on se place dans "l'espace-temps" des points (t, x, y, z) et si l'on fixe une valeur t_0 du temps t, on ne peut plus se faire une image de l'ensemble des points (t_0, x, y, z) qui représentent des événements simultanés, d'après la définition. Du point de vue formel auquel on se place, il s'agit de l'introduction d'une application $F_{t_0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe à tout point $P \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées x, y, z, la valeur fixée t_0,

$$F_{t_0}(P) = F_{t_0}(x, y, z) = t_0,$$

mais cela ne nous apprend absolument rien sur les interprétations physiques de cette association. La physique classique se dérobe aux problèmes relatifs à l'application F_{t_0} en acceptant implicitement l'idée d'ubiquité : On s'imagine un être omniprésent qui fait correspondre instantanément la valeur t_0 du temps à tous les points de l'espace. Comme on le sait, c'est Einstein qui a le premier essayé d'éliminer l'idée métaphysique d'ubiquité en définissant la notion de simultanéité dans un référentiel cartésien $Oxyz$ sur la base d'un ensemble d'hypothèses parmi lesquelles il convient surtout de noter :

a) Un observateur lié au référentiel $Oxyz$ est à même de connaître la distance entre deux points quelconques de $Oxyz$.

b) Il existe une infinité d'horloges parfaites et identiques placées aux points du référentiel $Oxyz$.

Il est difficile de définir ce que c'est qu'une horloge et encore plus difficile de définir ce que c'est qu'une horloge parfaite. Nous nous confions surtout à notre expérience qui nous a conduit à sélectionner des mouvements périodiques spécifiques permettant d'introduire une unité de temps.

c) Les photons (les signaux électromagnétiques) se propagent dans le vide suivant des lignes droites.

d) La vitesse, calculée par la méthode de Fizeau, de tout rayonnement électromagnétique dans le vide est une constante universelle, notée c.

On ne saurait utiliser la définition habituelle de la vitesse, car elle présuppose l'interprétation traditionnelle de la famille des applications $F_t, -\infty < t < +\infty$, à savoir celle basée sur l'idée d'ubiquité. Or le calcul de la vitesse de la lumière par la méthode de Fizeau utilise uniquement le temps indiqué par une seule horloge, de sorte qu'il est indépendant de toute interprétation de $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

La "synchronisation des horloges", proposée par Einstein, équivaut à une interprétation spécifique des applications F_t, bien que celles-ci n'y soient pas mentionnées explicitement, leur détermination étant introduite de façon indirecte. En fait la formulation initiale d'Einstein [2] comporte une certaine confusion relative à la constante c qui est introduite sans rapport avec la méthode de Fizeau ou avec d'autres méthodes similaires : "La conséquence résultant des équations de Maxwell-Lorentz que la lumière se propage dans le vide avec la vitesse c (principe de constance de la vitesse de la lumière) –du moins par rapport à un système d'inertie déterminé K– doit ainsi être considérée comme bien établie. D'après le principe de relativité restreinte, nous devons considérer ce résultat comme également valable pour tout autre système d'inertie ... On peut, pour compléter la définition du temps, employer le principe de constance de la vitesse de la lumière dans le vide. Qu'on imagine disposées en des points du système K des horloges au repos, qui sont de construction identique et réglées d'après le schéma suivant. Si un rayon lumineux est envoyé d'une de ces horloges U_m, au moment où elle marque le temps t_m, à travers l'espace vide à une horloge U_n, dont la distance de la première est r_{mn}, le temps marqué par U_n au moment de l'arrivée du rayon lumineux devra être

$$t_n = t_m + \frac{r_{mn}}{c}.$$

Le principe de constance de la vitesse de la lumière affirme alors que ce réglage des horloges ne peut pas conduire à des contradictions".

La dernière phrase n'est pas claire et dissimule en fait quelques difficultés de la théorie comme nous allons l'expliquer en cherchant à mettre en évidence ses interprétations possibles. Pour la commodité des raisonnements, on notera $U(P)$ l'horloge placée au point P. Si l'on veut l'assimiler à une horloge ordinaire, on doit supposer que, en partant d'une origine fixée, les marques du cadran croissent (resp. décroissent) d'une période après chaque tour dans le sens positif (resp. dans le sens négatif) : l'ensemble des marques de l'horloge doit s'identifier à la droite réelle.

Cela dit, on pourrait penser d'abord que l'affirmation d'Einstein sur l'absence de contradictions exprime la transitivité de "l'opération de synchronisation". Mais celle-ci n'est pas transitive. En effet, soient $P, P', P"$ trois points quelconques, et considérons un signal lumineux émis par P suivant $\overrightarrow{PP'}$ à l'instant t, marqué par $U(P)$. Alors l'horloge $U(P')$ sera réglée de façon à marquer le temps

$$t' = t + \frac{||\overrightarrow{PP'}||}{c}$$

à l'instant de réception de ce signal. Ensuite considérons un autre signal émis par P' suivant $\overrightarrow{P'P"}$ au même instant t'. L'horloge $U(P")$ sera aussi réglée de façon à marquer le temps

$$t" = t' + \frac{||\overrightarrow{P'P"}||}{c} = t + \frac{||\overrightarrow{PP'}|| + ||\overrightarrow{P'P"}||}{c}$$

à l'instant de réception de ce deuxième signal. Pour que la transitivité en question soit réalisée, il faut qu'un troisième signal émis par P suivant $\overrightarrow{PP"}$ au premier instant t, marqué par $U(P)$, soit reçu au point $P"$ à l'instant $t"$. Or, d'après la convention faite, ce dernier signal sera reçu au point $P"$ à l'instant

$$\bar{t}" = t + \frac{||\overrightarrow{PP"}||}{c}$$

et l'on a manifestement

$$\bar{t}" \leq t",$$

l'égalité ne pouvant être vraie que si le point P' appartient au segment rectiligne joignant P à $P"$.

Il en résulte que l'opération proposée par Einstein ne peut être conçue que par rapport à une horloge fixée une fois pour toutes, par exemple, par rapport à l'horloge $U(O)$ placée à l'origine du référentiel. On utilisera donc la constante c, déduite de la méthode de Fizeau, et des signaux lumineux émis exclusivement par l'origine O. La "synchronisation" des horloges $U(O)$ et $U(P)$ signifie alors que la deuxième est réglée de façon à marquer le temps

$$t + \frac{||\overrightarrow{OP}||}{c}$$

à l'instant de réception d'un signal lumineux émis par O à l'instant t, marqué par $U(O)$.

Cette façon de définir la correspondance entre les indications des horloges n'est pas non plus claire. Le réglage de l'horloge s'obtient en déplaçant l'aiguille, sans déranger le rythme de l'horloge, une seule fois pour la mettre sur l'indication voulue. Par conséquent on doit prendre en considération une seule valeur t_0 et mettre l'aiguille de $U(P)$ sur l'indication

$$t_0 + \frac{||\overrightarrow{OP}||}{c}$$

à l'instant de réception d'un signal émis par O à l'instant t_0, marqué par $U(O)$. Mais alors, peut-on affirmer que $U(P)$ marquera, quelle que soit la valeur $t \neq t_0$, le temps

$$t + \frac{||\overrightarrow{OP}||}{c}$$

à l'instant de réception d'un signal émis par O à l'instant t ?

A première vue la question paraît plutôt naïve, et l'on dira que la réponse est certainement oui, ce qui est d'ailleurs nécessaire pour l'absence de contradictions, évoquée par Einstein. Cependant cela ne résulte pas de nos hypothèses. En fait l'horloge $U(P)$ étant déjà réglée, *il n'appartient qu'à l'expérience de nous faire connaître la réponse.* Faute de résultats expérimentaux, la réponse affirmative à la question posée peut être considérée comme postulat admis implicitement dans toutes les situations où le relativité restreinte est censée être applicable. Cependant une telle justification de la "synchronisation einsteinienne" est loin d'être satisfaisante et l'on ne saurait la passer sous silence.

On veut se fonder sur la propagation des signaux pour définir le temps, tout en supposant que celui-ci soit déjà défini localement par une infinité d'horloges parfaites et identiques placées aux points du référentiel. Cela laisse croire à l'existence d'un rapport entre la propagation des signaux d'une part et les propriétés postulées des horloges –à savoir leur perfection indéfinissable et leur présumée identité– d'autre part. Or, dans le contexte actuel, les signaux servent uniquement à transmettre les dates d'un point à l'autre, de sorte que, à la réflexion, on peut tout faire en partant d'une seule horloge placée en un point fixé, par exemple à l'origine du référentiel. On n'a même pas besoin de la supposer "parfaite", et, pour la distinguer de l'horloge d'Einstein $U(O)$, on la notera $H(O)$. Alors on peut envisager le problème sous un autre aspect :

En supposant que l'on dispose uniquement de l'horloge $H(O)$, placée à l'origine du référentiel $Oxyz$, définir le temps en tout autre point P moyennant les signaux lumineux (les photons) émis par O suivant $\overrightarrow{OP}$.

La réalisation d'un tel programme est beaucoup plus facile à concevoir que le réglage des horloges fictives d'Einstein. En effet, chaque signal étant porteur de sa date d'émission t, l'instant de sa réception au point P attribue de lui-même le temps t au point P aussi. La succession des signaux lumineux émis par O suivant $\overrightarrow{OP}$ transporte donc automatiquement du point O au point P le temps indiqué par l'horloge $H(O)$. On peut même concrétiser la réception de chaque signal par un enregistrement de la date d'émission correspondante, et alors la succession des enregistrements ainsi obtenus réalisera a posteriori une horloge, notée $H(P)$, au point P. Nous dirons que l'ensemble des indications de $H(P)$ constitue *la datation fondamentale* au point P (sous-entendu : par rapport à $H(O)$). Celle-ci donne lieu à une propriété très simple :

Un signal émis par O suivant $\overrightarrow{OP}$ à l'instant t, marqué par $H(O)$, sera reçu au point P à l'instant t aussi, marqué par $H(P)$.

L'ensemble des horloges $H(P), P \in \mathbb{R}^3$, donne une première –et même la plus simple possible– définition du temps dans le référentiel $Oxyz$. Nous dirons qu'il définit *le temps fondamental* ou, plus précisément, le temps fondamental par rapport à l'horloge $H(O)$. Par rapport à ce temps, la fonction de propagation radiale des photons émis par O se réduit à la coordonnée temporelle, de sorte que la vitesse de propagation correspondante est infinie. En ce qui concerne les applications F_t, que nous noterons maintenant F_{ot}, puisqu'elles sont conçues par rapport à $H(O)$, leur définition dans le cadre du temps fondamental est immédiate :

Quelle que soit la valeur $t \in \mathbb{R}$ et quel que soit le point $P \in \mathbb{R}^3$, considérons un photon émis par O suivant $\overrightarrow{OP}$ à l'instant t, marqué par $H(O)$. Alors la valeur $F_{ot}(P) = t$ doit être conçue comme étant l'instant de passage de ce photon par P.

L'introduction du temps fondamental rend caduque l'hypothèse d'existence préalable d'une infinité d'horloges. Mais il y a plus : Toutes les définitions possibles du temps relativement à $H(O)$, s'obtiennent à partir du temps fondamental. En effet, puisque la datation fondamentale en chaque point P constitue un ensemble d'indications s'identifiant, en tant qu'objet mathématique, à la droite réelle, toute autre datation s'obtient au moyen d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}$, les coordonnées de P pouvant naturellement y figurer comme paramètres. En particulier, si, quel que soit le point P, on choisit le difféomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par la translation

$$t \to t + \frac{r}{c} \quad , \quad r = ||\overrightarrow{OP}||,$$

ce qui revient à remplacer chaque indication t de la datation fondamentale au point P par la valeur

$$t + \frac{r}{c},$$

on obtient une autre datation, qu'il convient d'appeler *datation d'Einstein.* Par rapport à celle-ci, un signal émis par O à l'instant t sera reçu au point P à l'instant

$$t + \frac{r}{c}$$

et cela quelle que soit la valeur t. *Nous voyons que l'introduction de la datation fondamentale permet de lever la difficulté signalée tout à l'heure.*

Bornons-nous maintenant à la datation d'Einstein par rapport à $H(O)$. Le temps étant mesuré en chaque point P par les nouvelles indications

$$t + \frac{r}{c} \quad , \quad r = ||\overrightarrow{OP}||,$$

il convient de noter $H(P, E)$ l'horloge en P munie de la datation d'Einstein. L'ensemble des horloges $H(P, E), P \in \mathbb{R}^3$, définit donc le temps d'Einstein dans le référentiel $Oxyz$ par rapport à l'horloge $H(O)$.

Considérons maintenant un signal émis par O et reçu au point P à l'instant t_P, marqué par $H(P, E)$. Alors l'instant d'émission, marqué par $H(O)$, de ce signal est l'indication

$$t = t_P - \frac{r}{c} \quad , \quad r = ||\overrightarrow{OP}||,$$

de sorte que l'expression

$$t_P - \frac{r}{c}$$

est la fonction de propagation radiale (relativement au temps d'Einstein) des signaux émis par O. En tant qu'expression mathématique, cette fonction s'identifie à la fonction de propagation classique des mêmes signaux. En ce qui concerne la vitesse correspondante de propagation radiale, elle s'obtient en posant $t = Cte$, ce qui donne

$$dt_P - \frac{dr}{c} = 0 \quad , \qquad \text{d'où} \quad \frac{dr}{dt_P} = c.$$

Considérons finalement les applications $F_t, t \in \mathbb{R}$, qui, de façon plus précise, seront notées maintenant $F_{ot}, t \in \mathbb{R}$. Alors, la valeur t étant fixée et quel que soit le point P, la valeur $F_{ot}(P) = t$ est définie de la façon suivante : Considérons un signal émis par O suivant $\overrightarrow{OP}$ à l'instant $t - r/c$, marqué par $H(O)$. Soit t_P l'instant de réception, marqué par $H(P, E)$, de ce signal au point P. Alors on pose $F_{ot}(P) = t_P$. Cette valeur est évidemment égale à $t - r/c + r/c = t$.

2. Les référentiels de la relativité restreinte

On pourrait penser que le référentiel $Oxyz$ muni des horloges $H(P, E), P \in \mathbb{R}^3$, qui définissent le temps d'Einstein par rapport à l'horloge de référence $H(O)$, est le type standard de référentiel en relativité restreinte. Mais il n'en est pas ainsi.

Tout d'abord le choix de l'origine O et de l'horloge $H(O)$ n'a rien d'obligatoire. Quel que soit le point $Q \in \mathbb{R}^3$, on peut y placer une horloge $H(Q)$ et en déduire ensuite un temps fondamental et un temps d'Einstein par rapport à $H(Q)$, ce qui entraîne aussi une nouvelle détermination des applications F_t –que l'on notera maintenant F_{Qt}– par rapport au point

Q. Or l'établissement de la relativité restreinte *présuppose* l'existence d'un temps universel d'Einstein dans le sens suivant :

On peut placer en chaque point $P \in \mathbb{R}^3$ une horloge $U(P, E)$ munie d'une datation telle que, pour tout point fixé P, toutes les horloges $U(P', E), P' \neq P$, possèdent la datation d'Einstein par rapport à $U(P, E)$.

Cela signifie que, quels que soient les points P et P', un signal émis par P suivant $\overrightarrow{PP'}$ à un instant t, marqué par $U(P, E)$, sera reçu au point P' à l'instant

$$t' = t + \frac{||\overrightarrow{PP'}||}{c},$$

marqué par $U(P', E)$.

Puisque l'expression

$$t' - \frac{||\overrightarrow{PP'}||}{c}$$

est la fonction classique de propagation des signaux émis par le point P, on peut exprimer la même propriété en disant que le temps universel d'Einstein assure la validité universelle de cette fonction (tout comme le temps classique qui est basé sur l'idée d'ubiquité).

La définition du temps universel d'Einstein n'entraîne pas sa réalisation effective contrairement au cas du temps défini par rapport à $H(O)$. Regardons de plus près la situation en considérant de nouveau les horloges $H(P, E)$ qui définissent le temps d'Einstein relativement à $H(O)$, ce qui entraîne en particulier la validité de la fonction de propagation classique des signaux émis par O. Or les datations des horloges $H(P, E)$ étant déjà fixées, on n'y peut rien changer, de sorte que l'existence du temps universel d'Einstein impose une condition très restrictive :

Pour que le temps universel d'Einstein existe, il faut et il suffit que, quel que soit le point $P \neq O$, les horloges $H(P', E), P' \neq P$, possèdent la datation d'Einstein par rapport à $H(P, E)$.

Cela veut dire qu'un signal lumineux émis par P suivant $\overrightarrow{PP'}$ à un instant $u(P)$, marqué par $H(P, E)$, doit parvenir au point P' à l'instant

$$u(P') = u(P) + \frac{||\overrightarrow{PP'}||}{c}, \tag{1}$$

marqué par $H(P', E)$.

Or les indications $u(P)$ et $u(P')$ sont conditionnées par des signaux émis par O à des instants t et t', marqués par $H(O)$ et tels que

$$u(P) = t + \frac{||\overrightarrow{OP}||}{c} \qquad , \qquad u(P') = t' + \frac{||\overrightarrow{OP'}||}{c},$$

de sorte que la relation (1) entraîne

$$t' = t + \frac{||\overrightarrow{OP}|| - ||\overrightarrow{OP'}|| + ||\overrightarrow{PP'}||}{c}.$$

En définitive, pour que $H(P', E)$ possède la datation d'Einstein par rapport à $H(P, E)$, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :

Quelle que soit la valeur $t \in \mathbb{R}$, un signal lumineux émis par P suivant $\overrightarrow{PP'}$ à l'instant

$$t + \frac{||\overrightarrow{OP}||}{c},$$

marqué par $H(P, E)$, atteint le point P' au même instant, marqué par $H(P', E)$, qu'un signal lumineux émis par O suivant $\overrightarrow{OP'}$ à l'instant

$$t + \frac{||\overrightarrow{OP}|| - ||\overrightarrow{OP'}|| + ||\overrightarrow{PP'}||}{c}$$

marqué par $H(O)$.

Dans le contexte où l'on se place, cette condition n'est pas susceptible de justification théorique. Puisque toutes les horloges $H(P, E)$ sont déjà munies de la datation d'Einstein par rapport à $H(O)$, il appartient à l'expérimentation de nous faire connaître sa validité ou sa fausseté. Toutefois sa validité semble évidente lorsque P' coïncide avec O (expérience de Fizeau) ou lorsque P se trouve sur le segment rectiligne joignant O à P', mais il ne s'agit pas alors d'une vérification au sens strict : Dans le premier cas le signal émis par P est le signal réfléchi, émis initalement par O, et dans le deuxième cas le signal émis par P est le signal émis par O, considéré sur son trajet de P à P'. La relativité restreinte, en acceptant la validité universelle de la condition précitée, introduit implicitement un postulat complémentaire. Celui-ci s'insère dans l'ensemble d'hypothèses qui entraîne la métrique de Minkowski.

Cela dit, la démarche d'Einstein n'est pas dépourvue de points faibles, mais on est en droit d'espérer après tout qu'elle nous débarrassera complètement de l'idée d'ubiquité. Cependant il n'en est pas ainsi. Il est même naturel de se demander si le terme "synchronisation des horloges" est bien choisi.

Considérons, pour fixer les idées, deux événements "simultanés", (t, P_1) et (t, P_2), $P_1 \neq P_2$. Alors si l'observateur considéré se trouve au point P_2, il voit l'horloge $H(P_2, E)$ marquer le temps t, mais il n'a aucun moyen de voir aussi $H(P_1, E)$ marquer t, car il ne peut pas être informé de l'événement (t, P_1) avant que $H(P_2, E)$ marque le temps

$$t + \frac{||\overrightarrow{P_1P_2}||}{c}.$$

Or on dit souvent que l'observateur effectue à l'instant t une observation simultanée en P_1 et P_2 (comme dans le cas de l'observation des extrémités d'une règle), ce qui est manifestement impossible. Il en résulte d'abord que la cohérence logique du modèle d'Einstein n'est pas assurée tant que l'on se borne à la considération d'un seul observateur. Cette constatation est déjà sous-jacente à la mise en correspondance des indications des horloges. Il faut donc supposer qu'à tout point du référentiel $Oxyz$ soit associé non seulement une horloge mais aussi un observateur. Alors l'instant t sera l'indication t observée par tous les observateurs sur leurs horloges correspondantes. Cette hypothèse améliore le modèle d'Einstein et permet en particulier de concevoir les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ qui définissent le mouvement d'un point matériel dans $Oxyz$: Pour chaque valeur de t, les nombres $x(t), y(t), z(t)$ sont les coordonnées d'un point P tel que l'observateur qui s'y trouve voit son horloge marquer t et que le point matériel considéré coïncide avec P à cet instant. Cependant la difficulté de fond subsiste toujours : Si $P_1 \neq P_2$, aucun observateur ne peut observer à l'instant t de son temps propre les deux événements (t, P_1) et (t, P_2) à la fois. Par conséquent lorsqu'il s'agit, en particulier, du mouvement d'un point matériel, seul un échange a posteriori des observations faites par les divers observateurs peut le faire connaître. Bien entendu, cette constatation concerne tout phénomène dont l'extension spatiale n'est pas négligeable. Mais alors les événements (t, P_1) et (t, P_2) par rapport à qui sont-ils simultanés ? Il semble que la seule réponse possible consiste à dire : Par rapport à la théorie d'Einstein. Celle-ci remplace donc l'être omniprésent de la physique classique.

La situation qui vient d'être signalée se rattache à un problème de nature plutôt philosophique concernant la "réalité" d'un événement se produisant "maintenant à distance". Dans un débat qui a opposé B. Lucien [3] à C.W. Rietdijk [4], celui-ci défend l'idée que "in order to maintain physical consistency in agreement with observations "here and now", it is unavoidable to also accept the reality of specific events at a distance at specific times in an inertial system". Il explicite cette assertion dans le cas d'un signal émis par le soleil et reçu sur la terre : "The observer W is at rest in an intertial system on the earth ... W looks at his watch at $t = 0$, he says : "The sun... now emits the light I shall receive at $t = 500sec$". At receiving such light (or a special signal S)... he correctly says : S has really been emitted by (an instrument on) the sun... when I saw $t = 0$ on my watch, in order that it could reach me now... Now the crucial point is : given the distance sun-earth = 150 million km, the (instrument on the) sun must very realistically have emitted S at my $t = 0$ in order to deliver S... at my $t = 500sec$ because $c = 300000km/sec$ for me".

Bien entendu il est tout à fait normal de parler philosophiquement du problème de la réalité objective, mais les assertions : "S has *really* been emitted by the sun when I saw $t = 0$ on my watch", "the sun must very *realistically* have emitted S at my $t = 0$", n'ont, à proprement parler, aucun sens. Ce que l'observateur W peut affirmer est ceci : "*En vertu de l'hypothèse de la synchronisation einsteinienne des horloges*, l'instant d'émission du signal S, que j'ai reçu à l'instant $t = 500sec$ de mon temps propre, est l'instant $t = 0$ du temps propre de l'observateur (de l'appareil) sur le lieu d'émission (le soleil)".

Il convient d'ajouter que rien n'impose a priori le choix du temps d'Einstein dans le référentiel considéré. L'acceptation inconditionnelle de la définition einsteinienne du temps dissimule la distinction entre deux conceptions différentes de la vitesse de la lumière dans le vide :

D'une part la vitesse constante c qui résulte de la méthode de Fizeau, les mesures étant supposées effectuées dans le vide, et l'espace étant supposé homogène et isotrope.

D'autre part la vitesse de propagation qui dépend de l'interprétation physique des applications F_{ot} ou, en d'autres termes, de la datation choisie des horloges. Nous savons déjà que la datation fondamentale entraîne une vitesse de propagation infinie.

3. Généralisation de la définition du temps par rapport à l'horloge $H(O)$

Le temps d'Einstein résulte du temps fondamental au moyen d'un difféomorphisme spécifique :

$$t \to t + \frac{r}{c},$$

mais rien n'empêche l'introduction d'autres difféomorphismes. Une première généralisation consiste à choisir une fonction C^∞ croissante $\phi(r)$ telle que $\phi(0) = 0$, et à remplacer ensuite, quel que soit le point P, l'indication t de la datation fondamentale au point P par la nouvelle valeur :

$$t + \phi(r).$$

Alors, en tout point P, l'intervalle de temps entre deux événements quelconques se conserve quand on passe de la datation fondamentale à la nouvelle datation :

$$(t' + \phi(r)) - (t + \phi(r)) = t' - t.$$

Cette condition est conforme à nos habitudes classiques, mais n'est pas obligatoire. D'ailleurs elle est incompatible avec des situations rencontrées couramment en relativité générale. C'est pourquoi nous devons prendre en considération les difféomorphismes généraux tout en respectant naturellement un minimum de conditions assurant la validité physique du changement de datation. Compte tenu du cadre restreint de notre étude qui présuppose en particulier la structure euclidienne de l'espace et la propagation rectiligne des signaux lumineux, nous allons nous limiter à la considération d'un difféomorphisme défini par une fonction de (t, r) (au lieu de (t, x, y, z)), ce qui donne le changement de datation :

$$t_P = \xi(t, r) \quad , \quad r = ||\overrightarrow{OP}||.$$

Le choix de la fonction $\xi(t, r)$ est dans une large mesure arbitraire, mais doit quand même satisfaire à quelques conditions générales :

a) $\xi(t, r)$ est de classe C^∞

b) $\xi(t, 0) = t$

c) $\xi(t, r)$ est strictement croissante par rapport à t, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \xi(t, r)}{\partial t} > 0,$$

car, si l'on considère une succession de photons émis par O suivant une demi-droite OA, ceux-ci vont passer par tout point de OA dans le même ordre.

d) Pour chaque valeur fixée de r, $\xi(t,r)$ tend vers $-\infty$ lorsque $t \to -\infty$ et vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$,

e) $\xi(t,r)$ est croissante (mais pas forcément strictement croissante) par rapport à r, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \xi(t,r)}{\partial r} \geq 0$$

Notons $H(P,\xi)$ l'horloge en P munie de la nouvelle datation. Alors l'ensemble des horloges $H(P,\xi), P \in \mathbb{R}^3$, définit un nouveau temps dans le référentiel $Oxyz$ par rapport à $H(O)$. A ce temps correspond une fonction de propagation relative à $H(O)$ et conjointement une détermination de la famille des applications $F_{ot}, t \in \mathbb{R}$. En effet, la troisième condition permet de résoudre l'équation

$$t_P = \xi(t,r)$$

par rapport à t, ce qui donne :

$$\pi(t_P, r) = t.$$

La fonction $\pi(t_P, r)$ qui en résulte est la fonction de propagation par rapport à $H(O)$, à savoir la fonction qui définit l'instant d'émission t d'un signal émis par O au moyen de l'instant t_P de son arrivée sur la sphère $||\overrightarrow{OP}|| = r$ et de la distance r.

En ce qui concerne les applications $F_{ot}, t \in \mathbb{R}$, leur détermination s'obtient de la façon suivante : Fixons une valeur t et considérons un point quelconque P. Alors un signal émis par O suivant $\overrightarrow{OP}$ à l'instant $\pi(t,r)$, marqué par $H(O)$, sera reçu au point P à un instant t_P, indiqué par $H(P,\xi)$, et l'on posera

$$F_{ot}(P) = t_P$$

Naturellement cette valeur est égale à

$$\xi(\pi(t,r), r) = t.$$

Par conséquent, la valeur t étant fixée, en faisant varier r, on associe le temps t à tous les points de l'espace. Suivant la définition d'Arnold, on serait alors tenté de dire que, pour deux points quelconques, P_1 et P_2, les événements (t, P_1) et (t, P_2) sont simultanés. Or cette notion de simultanéité est associée à l'application

$$F_{ot} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

qui est susceptible d'une infinité de déterminations en correspondance avec les déterminations possibles de $\xi(t, r)$. On ne saurait donc attribuer à la notion de simultanéité une signification objective. On ne saurait non plus réserver une place à part à la simultanéité einsteinienne. Au lieu des termes : "événements simultanés" et "synchronisation des horloges", qui sont utilisés en relativité restreinte, il serait préférable de dire : "définition du temps d'après Einstein".

A la fonction $\xi(t, r)$ correspond aussi une vitesse de propagation de la lumière dans le vide suivant les demi-droites issues de O. En effet, l'instant d'émission t étant fixé, on a

$$dt_P = \frac{\partial \xi(t, r)}{\partial r} dr,$$

d'où la vitesse en question

$$\frac{dr}{dt_P} = \frac{1}{\frac{\partial \xi(t,r)}{\partial r}}$$

Si la vitesse de propagation se réduit à une constante $\alpha > 0$, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial \xi(t, r)}{\partial r} = \frac{1}{\alpha},$$

il en résulte

$$\xi(t, r) = \frac{r}{\alpha} + h(t),$$

et puisque $\xi(t, 0) = t$, on a $h(t) = t$, d'où

$$\xi(t, r) = t + \frac{r}{\alpha}.$$

Revenons au cas général. La loi de propagation des signaux lumineux émis par O et la fonction de propagation correspondante se rapportent au temps des horloges $H(P, \xi)$.

Comment peut-on définir, par rapport à ce même temps, la loi de propagation des signaux lumineux émis par un point quelconque $P \neq O$?

Dans le cas particulier du temps d'Einstein relativement à $H(O)$, nous avons vu que nos hypothèses de base ne nous permettent pas d'obtenir une telle définition, de sorte que, normalement, nous devons avoir recours à l'expérience.

La même réponse est manifestement valable dans le cas général.

Cependant la relativité restreinte, afin de construire la métrique de Minkowski, anticipe les résultats expérimentaux en postulant que la loi de propagation des signaux lumineux émis par O :

$$t_P = t + \frac{r}{c}$$

ne se modifie pas si l'on change de point de référence.

Cette hypothèse est corroborée par l'expérience de Fizeau, mais elle est certainement fausse dans le cas général. Pour le voir raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons que, quel que soit le point $P \neq O$, un signal lumineux émis par P suivant $\overrightarrow{PP'}$ à l'instant t, marqué par l'horloge $H(P, \xi)$, sera reçu au point P' à l'instant

$$\xi(t, ||\overrightarrow{PP'}||),$$

marqué par $H(P', \xi)$.

Or supposons en particulier que P' coïncide avec O, et considérons un signal lumineux émis par O à l'instant t, marqué par $H(O)$, et effectuant ensuite un trajet aller et retour après une réflexion sur un miroir placé au point P. Ce signal sera d'abord reçu au point P à l'instant $t_P = \xi(t, r)$, marqué par $H(P, \xi)$, et ensuite au point O à l'instant

$$\xi(t_P, ||\overrightarrow{PO}||) = \xi(t_P, r),$$

marqué par $H(O)$. Puisque l'expérience de Fizeau entraîne

$$\xi(t_P, r) = t + \frac{2r}{c},$$

la fonction $\xi(t, r)$ doit être telle que

$$\xi(\xi(t, r), r) = t + \frac{2r}{c}.$$

Cette condition est spécifiquement vérifiée par la fonction $t + \frac{r}{c}$, mais non pas par d'autres expressions de $\xi(t, r)$.

4. Remarques sur les métriques spatio-temporelles

Tout ce qui a été dit précédemment se rattache strictement à la considération d'un référentiel cartésien sans aucun rapport avec les métriques spatio-temporelles. Comme on le sait, celles-ci ont été introduites par Einstein en tant que généralisations de la métrique de Minkowski, afin de rendre compte des phénomènes gravitationnels, mais on peut aussi les introduire a posteriori de façon axiomatique, c'est-à-dire en postulant que toute situation physique s'insère dans le cadre d'une métrique spatio-temporelle judicieusement choisie :

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}(v^0, v^1, v^2, v^3) dv^i dv^j$$

par rapport à laquelle les lignes d'univers des photons sont les géodésiques isotropes.

L'écriture ci-dessus présuppose que les variables v^1, v^2, v^3 représentent les coordonnées des points de l'espace par rapport à un certain référentiel spatial. En ce qui concerne la coordonnée temporelle $v^0 = t$, on dit toujours qu'elle est indiquée par des horloges placées aux points de l'espace, mais cela ne nous apprend rien sur la notion de temps dans le référentiel considéré. On ne peut pas mettre partout des horloges au hasard pour obtenir la mesure du temps. On doit disposer des moyens permettant de mettre en rapport les indications des horloges et, en particulier, d'associer chacune des valeurs du temps à tous les points de l'espace. D'après ce qui a été déjà vu, on doit construire, par des opérations se déroulant dans l'espace, une famille d'applications $F_t, t \in \mathbb{R}$, telle que, quelle que soit la valeur fixée t du temps, on ait $F_t(v^1, v^2, v^3) = t$ pour tout point (v^1, v^2, v^3) de l'espace. La construction faite dans le cas d'un référentiel cartésien est encore essentiellement valable :

On fixe un point Q et l'on y place une horloge $H(Q)$, qui sert d'horloge de référence, à partir de laquelle *on construit* d'autres horloges en suivant les mouvements des photons émis par Q sur les géodésiques isotropes correspondantes. A la différence de ce qui a été fait précédemment, celles-ci sont définies par la métrique elle-même qui constitue maintenant *la donnée primitive dans la détermination de toutes* *les relations spatio-temporelles.* Bien entendu il ne faut pas sous-estimer les difficultés mathématiques du problème, car les géodésiques isotropes s'obtiennent au moyen d'un système d'équations différentielles. Il n'en reste pas moins qu'en considérant la succession des photons, émis par Q, qui passent par un point donné P, on définit une horloge $H(P)$ par transmission du temps indiqué par $H(Q)$. Cela permet de définir la loi de propagation des signaux lumineux émis par Q et ensuite la fonction de propagation correspondante. Alors la famille des applications $F_{Qt}, t \in \mathbb{R}$, s'obtient de la façon déjà expliquée.

La loi de propagation des signaux lumineux émis par un point et conjointement la famille des applications $F_t, t \in \mathbb{R}$, est susceptible d'une infinité de définitions : En premier lieu –sans changement du point de référence Q– en partant de la loi initialement obtenue, on en trouve d'autres moyennant des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ dans lesquels les coordonnées des points de l'espace figurent comme paramètres. Parmi ces difféomorphismes il convient de signaler celui qui définit *le temps fondamental*, la conception la plus simple du temps par rapport à $H(Q)$.

En deuxième lieu, en changeant de point de référence, on peut répéter toutes les opérations déjà faites par rapport à un point quelconque de l'espace.

Cela dit, nous savons que la définition du temps dans un référentiel cartésien (sans métrique spatio-temporelle) entraîne une difficulté relative au changement d'horloge de référence : La loi de propagation, relativement au temps des horloges $H(P, \xi)$, des signaux lumineux émis par O, ne nous apprend rien au sujet de la loi de propagation, relativement à ce même temps, des signaux lumineux émis par un autre point.

Or la donnée d'une métrique spatio-temporelle permet de déterminer la loi de propagation des signaux lumineux émis par un point quelconque par rapport à un temps déjà défini. Par conséquent la difficulté signalée ne subsiste plus, mais le problème se présente manifestement sous une autre forme : Choisir la métrique spatio-temporelle de façon à rendre compte correctement de la totalité des phénomènes étudiés, donc aussi de la propagation des signaux lumineux émis par un point quelconque.

Notons enfin que, dans certaines situations, il ne suffit pas de prendre en considération une seule horloge de référence. Lorsqu'il s'agit de la propagation d'ébranlements électromagnétiques ou gravitationnels à partir d'une ligne ou d'une surface en déformation, toutes les horloges rencontrées par cette ligne ou cette surface seront prises comme horloges de référence. Les problèmes qui s'y rattachent sont assez délicats et sortent du cadre du présent article.

5. Sur l'interprétation de la transformation de Lorentz

La définition de la "simultanéité einsteinienne" en relativité restreinte a été motivée par le problème de l'interprétation physique de la transformation de Lorentz. Bien que ce problème ait été résolu par Einstein, il ne cesse pas de susciter des débats et des controverses, et surtout en ce qui concerne le ralentissement des horloges et la contraction de Lorentz. Nous allons analyser ces deux conséquences de la théorie afin d'en clarifier quelques difficultés conceptuelles. Il en résultera en particulier que, malgré une opinion générale, la contraction des longueurs ne semble pas avoir une vraie signification physique.

Soient

$$f(v,t,x) = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad g(v,t,x) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ,$$
$$\left(v = Cte \quad , \quad |v| < c \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}\right)$$

ce qui permet d'écrire la transformation de Lorentz sous la forme :

$$t' = f(v,t,x) \quad , \quad x' = g(v,t,x) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z,$$

et sa réciproque :

$$t = f(-v,t',x') \quad , \quad x = g(-v,t',x') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z'.$$

Il s'agit d'une bijection linéaire de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^4$, qui peut être conçue mathématiquement de deux façons différentes :

D'une part on peut considérer (t,x,y,z) et (t',x',y',z') comme deux points distincts de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à une base fixe.

D'autre part on peut considérer $(t,x,y,z,)$ et (t',x',y',z') comme représentants d'un même point de $\mathbb{R}^4$ par rapport à deux bases distinctes.

Aucune de ces deux manières de concevoir la transformation n'a de signification physique. Une interprétation physique n'est concevable qu'au moyen d'opérations se déroulant entièrement dans l'espace affine euclidien à trois dimensions. Cette constatation nous conduit au schéma suivant :

En premier lieu on considère le référentiel cartésien $Oxyz$, noté R et supposé immobile, auquel on associe le temps t d'Einstein.

En deuxième lieu le temps t ainsi introduit joue le rôle de paramètre définissant la famille des référentiels $R'_t : O'_t x'y'z'$ dont l'origine se déplace par rapport à R avec la vitesse constante v, qui sera supposée positive dans la suite. Le référentiel R'_t sera aussi muni du temps t' d'Einstein.

En troisième lieu, pour chaque valeur de t, le passage de R à R'_t se réalise au moyen de la transformation affine :

$$x' = g(v,t,x) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z$$

où (x,y,z) et $(x',y',z') = (g(v,t,x),y,z)$ sont les coordonnées d'un même point par rapport à deux bases distinctes.

En quatrième lieu, chacun des deux observateurs, qui sont associés aux points superposés (x,y,z) et (x',y',z'), voit les deux horloges correspondantes marquer les indications t et $t' = f(v,t,x)$. Il s'agit là d'une expérience de pensée dont la signification n'est pas claire. Les valeurs du temps telles qu'elles figurent dans la transformation de Lorentz ne sont pas mesurées modulo une période, comme c'est le cas des horloges comportant une aiguille tournant devant un cadran, mais parcourent l'ensemble des nombres réels. Par conséquent, dans le modèle d'Einstein, chaque horloge doit indiquer le temps par des inscriptions se succédant sur un écran. Ce sont alors les inscriptions t et $t' = f(v,t,x)$ qui sont vues par les deux observateurs en question lors de la superposition des points (x,y,z) et $(x',y,'z')$. Cette vision mutuelle et instantanée, bien que pratiquement irréalisable, se trouve à la base de l'interprétation de la transformation de Lorentz.

Nous savons déjà que le modèle d'Einstein nécessite la prise en considération d'une infinité d'observateurs dans chaque référentiel. A plus forte raison cette hypothèse est indispensable pour pouvoir interpréter le passage d'un référentiel à l'autre. Dans son exposé sur la relativité restreinte, L. de Broglie [5] a bien souligné sa nécessité pour rendre compte du ralentissement des horloges :

"Si *les observateurs* du système A comparent constamment l'indication de l'horloge mobile avec celles des horloges fixes...", et aussi pour introduire l'onde de phase :

"Nous pouvons nous placer à un autre point de vue en supposant que *les observateurs* du système A observent simultanément à un même instant de leurs temps propres *toutes* les horloges du système B".

Cela dit, nous allons analyser de façon détaillée le ralentissement des horloges et la contraction des longueurs afin de mettre en évidence la totalité des hypothèses qui interviennent dans ces deux conséquences de la théorie. Pour simplifier, nous ne tiendrons pas compte des coordonnées y, z qui ne se modifient pas.

a/ Sur le ralentissement des horloges

Fixons un point x'_0 dans le référentiel R'_t. Alors à tout événement (t', x'_0) en ce point correspond dans R l'événement

$$(t,x) = (\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \frac{x'_0 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}).$$

Soient t'_1 et t'_2, avec $t'_1 < t'_2$, deux valeurs de t' et considérons les événements correspondants, (t_1, x_1) et (t_2, x_2), ce qui donne

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2 - x_1 = \frac{v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

d'où en particulier

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Le calcul de la "dilatation du temps"

$$\frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

nécessite la prise en considération de deux observations dans R et d'une transmission d'information du premier observateur au deuxième, comme nous allons l'expliciter.

Soient $Ob(x'_0)$, $Ob(x_1)$, $Ob(x_2)$ respectivement les observateurs en x'_0, x_1, x_2. Lors de la superposition des points x'_0 et x_1, l'observateur $Ob(x_1)$ voit sa propre horloge marquer le temps t_1 et l'horloge de $Ob(x'_0)$ marquer le temps t'_1. Sur l'instant même il envoie alors, au moyen d'un signal électromagnétique, cette information à l'observateur $Ob(x_2)$ qui la recevra à l'instant

$$\bar{t}_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c}$$

de son temps propre. La superposition des points x'_0 et x_2 se réalisera à l'instant *ultérieur*

$$t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} > \bar{t}_2$$

de sorte que l'observateur $Ob(x_2)$, en voyant alors sa propre horloge marquer t_2 et l'horloge de l'observateur $Ob(x'_0)$ marquer t'_2, sera à même de calculer les différences $t_2 - t_1$ et $t'_2 - t'_1$, et tester ensuite la validité de la formule

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dans ces conditions, le point x_1 étant fixé, quel que soit $x > x_1$, le ralentissement de l'horloge en x'_0 est un effet observable par l'observateur en x, pourvu que celui-ci soit informé par l'observateur en x_1 des indications t'_1 et t_1.

Bien entendu notre analyse est fondée sur des expériences de pensée, mais il n'en reste pas moins que le ralentissement des horloges se vérifie indirectement dans certaines situations physiques et constitue en conséquence une confirmation expérimentale de la relativité restreinte. Toutefois le paradoxe des jumeaux (ou paradoxe de Langevin) montre que la formule du ralentissement des horloges ne peut pas être extrapolée outre mesure. Il serait donc souhaitable d'établir de façon claire les limites de son application.

b/ Sur la contraction de Lorentz

Considérons une règle placée sur l'axe des x' du référentiel mobile R'_t et notons x'_1, x'_2, avec $x'_1 < x'_2$, les abscisses de ses extrémités, de sorte que $l' = x'_2 - x'_1$, l' étant sa longueur. Les abscisses x'_1 et x'_2 étant ainsi fixées, nous considérons l'ensemble des événements (t'_1, x'_1) et (t'_2, x'_2) en faisant varier les valeurs t'_1 et t'_2 du temps dans R'_t. D'après la transformation de Lorentz, on a pour les événements correspondants dans R,

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

et

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

d'où l'on tire

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2}l'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2 - x_1 = \frac{l' + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Puisque les valeurs t'_1 et t'_2 ne sont en principe assujetties à aucune restriction, la définition de la "longueur transformée" $x_2 - x_1$ n'a pas de sens. Or, dans la logique d'Einstein, la longueur de la règle dans R doit être définie par la condition de "simultanéité" $t_1 = t_2$, ce qui donne d'abord

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2} l'$$

et ensuite la formule bien connue de Lorentz :

$$x_2 - x_1 = l' \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Quelle est la raison pour laquelle on doit imposer la condition de "simultanéité" $t_1 = t_2$? La question est d'autant plus pertinente que la transformation de Lorentz ne respecte pas la simultanéité einsteinienne.

Certains auteurs pensent que la contraction de Lorentz est un effet observable, ce qui justifierait la définition d'Einstein. Or, dans un article consacré à ce sujet, J. Terrell [6] fait la distinction entre "observer" et "voir" : "There is a clear distinction between observing and seeing. An observation of the shape of a fast-moving object involves simultaneous measurement of the position of a number of points of the object. If done by means of light, all the quanta should leave the surface simultaneously, as determined in the observer's system, but will arrive at the observer's position at different times... In seeing the object, on the other hand, or photographing it, all the light quanta arrive simultaneously at the eye (or shutter) having departed from the object at various earlier times. Clearly this should make a difference between the contracted shape which is in principle observable and the actual visual appearance of a fast-moving object".

Terrell en déduit que la contraction de la règle n'est pas visible à cause de l'aberration de la lumière, mais il insiste sur la possibilité de son observation sans pour autant en indiquer un procédé. Or l'observation ne peut être conçue qu'au moyen d'expériences de pensée relatives à des échanges d'information entre un observateur dans R'_t et un observateur dans R lors de la superposition des points correspondants x' et x. Alors la condition de "simultanéité" d'Einstein $t_1 = t_2$ conduit à l'analyse détaillée ci-après.

Comme on l'a déjà expliqué, l'observation simultanée des extrémités de la règle (du moins si la longueur de celle-ci n'est pas négligeable) par un seul observateur n'est pas concevable. On doit donc tenir compte des observations faites par deux observateurs, $Ob(x_1)$ et $Ob(x_2)$, placés respectivement en x_1 et x_2. Or le choix des positions x_1 et x_2 est conditionné par les événements de R'_t :

$$(t'_1, x'_1) = (t'_2 + \frac{v}{c^2} l', x'_1) \quad \text{et} \quad (t'_2, x'_2),$$

qui sont séparés, notons-le en passant, par un intervalle du genre espace, car

$$|\frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}| = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{l'}{\frac{v}{c^2} l'} = \frac{c^2}{v} > c.$$

Alors l'observateur $Ob(x'_2)$ ayant choisi un instant t'_2 de son temps propre, la position x_2 dans R sera définie par :

$$x_2 = \frac{x'_2 + v t'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ensuite l'observateur $Ob(x'_1)$ devra prendre en considération l'événement

$$(t'_2 + \frac{v}{c^2} l', x'_1)$$

qui définit la position

$$x_1 = \frac{x'_1 + v t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x'_1 + v(t'_2 + \frac{v}{c^2} l')}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Mais il devra d'abord être informé de la date t'_2 choisie par l'observateur $Ob(x'_2)$.

Or un signal électromagnétique, émis par x'_2 à l'instant t'_2, atteint le point x'_1 à l'instant

$$t'_2 + \frac{x'_2 - x'_1}{c} = t'_2 + \frac{l'}{c} > t'_2 + \frac{v}{c^2} l'$$

et alors la règle sera déplacée et l'extrémité x'_1 ne sera plus superposée avec x_1. Pour surmonter cette difficulté, on doit supposer que l'observateur $Ob(x'_2)$ informe l'observateur $Ob(x'_1)$ de son choix t'_2 en lui envoyant un signal à un instant $\bar{t}'_2 < t'_2$ tel que

$$\bar{t}'_2 + \frac{x'_2 - x'_1}{c} \le t'_2 + \frac{v}{c^2} l'$$

ou

$$\bar{t}'_2 \leq t'_2 - \frac{l'}{c}(1 - \frac{v}{c}).$$

Cela étant supposé fait, les positions x_1 et x_2 dans R seront définies physiquement par superposition avec les positions correspondantes x'_1 et x'_2 dans R'_t, et puisque, d'après les expressions précédentes, $x_2 > x_1$, on pourrait en principe attribuer à la différence $x_2 - x_1$ la signification proposée par Einstein, c'est-à-dire la considérer comme longueur de la règle mobile. Cependant il y a une difficulté relative aux observateurs $Ob(x_1)$ et $Ob(x_2)$. En effet, l'observateur $Ob(x_2)$ voit devant lui l'extrémité x'_2 de la règle mobile à l'instant $t_2 = t_1$, mais il ne connaît pas à cet instant la position x_1 de l'origine de la règle dans R, et doit attendre l'information que lui enverra l'observateur $Ob(x_1)$, information qui lui parviendra à l'instant

$$t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c} = t_2 + \frac{x_2 - x_1}{c} > t_2.$$

Par conséquent la différence $x_2 - x_1 = l'\sqrt{1 - \beta^2}$ ne peut pas être calculée à l'instant $t_2 = t_1$. Elle sera connue ultérieurement. Mais alors la règle ne sera plus là, de sorte que l'observation directe de la longueur contractée n'est même pas concevable. En fait la définition d'Einstein de la longueur de la règle mobile est plutôt arbitraire et l'on peut envisager d'autres définitions éventuelles. Nous allons en examiner deux.

Première définition. On peut d'abord imposer la condition $x_2 - x_1 = l'$, c'est-à-dire l'invariance de la longueur quand on passe de R'_t à R, ce qui donne

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2} l'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad l' = \frac{l' + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

d'où

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{l'}{v}(1 - \sqrt{1 - \beta^2})$$

et

$$t_2 - t_1 = \frac{l'}{v}(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) = -(t'_2 - t'_1)$$

de sorte que les positions x_1 et x_2 sont conditionnées respectivement par les événements de R'_t :

$$(t'_1, x'_1) = (t'_2 + \frac{l'}{v}(1 - \sqrt{1 - \beta^2}), x'_1)$$

et
$$(t'_2, x'_2) = (t'_2, x'_1 + l').$$
Il en résulte :
$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_2 + l'(1 - \sqrt{1-\beta^2})}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2 = \frac{x'_1 + l' + vt'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$
Au point de vue physique, les positions x_1 et x_2 seront obtenues par superposition avec x'_1 et x'_2 respectivement en tenant compte du choix de l'instant t'_2 par l'observateur $Ob(x'_2)$. Bien entendu celui-ci devra en informer l'observateur $Ob(x'_1)$ en lui envoyant un message à un instant $\bar{t}'_2$ tel que
$$\bar{t}'_2 + \frac{x'_2 - x'_1}{c} \leq t'_1,$$
ce qui entraîne la condition :
$$\bar{t}'_2 \leq t'_2 + \frac{l'}{v}(1 - \sqrt{1-\beta^2}) - \frac{l'}{c}$$
ou encore :
$$\bar{t}'_2 \leq t'_2 - \frac{l'}{v}(-(1-\beta) + \sqrt{1-\beta^2}).$$
Alors la vérification de la relation $x_2 - x_1 = l'$ se réalisera dans R par l'observateur $Ob(x_2)$ moyennant les valeurs x_1 et x_2. Or celui-ci voit devant lui l'extrémité x'_2 de la règle mobile à l'instant t_2, mais il ne connaît pas encore la valeur x_1 qui lui sera communiquée par l'observateur $Ob(x_1)$ par un message qui lui parviendra à l'instant :
$$\begin{aligned} \bar{t}_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c} &= t_2 - \frac{l'}{v}(1 - \sqrt{1-\beta^2}) + \frac{l'}{c} \\ &= t_2 + \frac{l'}{v}(-(1-\beta) + \sqrt{1-\beta^2}) > t_2 \end{aligned}$$
Par conséquent l'observateur $Ob(x_2)$ n'est pas à même de calculer la différence $x_2 - x_1$ à l'instant t_2. Il le fera plus tard quand la règle ne sera plus là. Tout comme dans le cas de la définition d'Einstein, l'observation directe de la longueur invariante l' dans R n'est même pas concevable.

Deuxième définition. Une deuxième possibilité consiste à imposer la condition de "simultanéité" $t'_1 = t'_2$ dans R'_t, ce qui donne :
$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2 = \frac{l' + x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

et

$$t_2 - t_1 = \frac{vl'}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2 - x_1 = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Les positions x_1 et x_2 sont maintenant conditionnées par les événements

$$(t'_1, x'_1) \quad \text{et} \quad (t'_1, l' + x'_1)$$

de R'_t, de sorte que leur définition physique par superposition avec x'_1 et x'_2 nécessite uniquement le choix d'un instant commun $t'_1 = t'_2$ par les deux observateurs $Ob(x'_1)$ et $Ob(x'_2)$. Cela dit, l'observateur $Ob(x_1)$ informe l'observateur $Ob(x_2)$ de la valeur x_1 par un message qui est reçu à l'instant :

$$\bar{t}_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c} = t_1 + \frac{l'}{c\sqrt{1-\beta^2}} > t_1 + \frac{vl'}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = t_2$$

de sorte que, lorsque, à l'instant t_2, l'observateur $Ob(x_2)$ voit devant lui l'extrémité x'_2 de la règle mobile, il ne connaît pas la valeur x_1 et ne peut en conséquence calculer la différence

$$x_2 - x_1 = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

que plus tard. On voit donc se reproduire la même situation que dans les cas déjà vus. L'observation directe de la longueur de la règle mobile est impossible.

En conclusion il semble qu'il n'y ait pas une définition satisfaisante pour la longueur d'une règle mobile. Il n'en reste pas moins que, quel que soit notre point de vue sur cette longueur, la description des phénomènes dans le cadre de la relativité restreinte n'en est pas affectée, car tout dépend uniquement de la métrique de Minkowski et de la transformation de Lorentz. Alors, est-il vraiment indispensable de chercher à définir la longueur d'une règle mobile ?

Références

[1] V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions Mir, Moscou, 1976.
[2] A. Einstein, *Quatre conférences sur la théorie de la relativité*, Paris, Gauthier-Villars, 1924.

[3] Abbé B. Lucien, *Relativité restreinte et présence du futur (A propos d'un article de C.W. Rietdijk)*, Ann. Fond. Louis de Broglie, Vol. 14, N° 4, 1989, pp. 461-467.
[4] C.W. Rietdijk, *On the Reality of "Now" at a Distance ; Answer to Abbé Lucien*, Ann. Fond. Louis de Broglie, Vol. 15, N° 2, 1990, pp. 233-236.
[5] L. de Broglie, *Eléments de théorie de quanta et de mécanique ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1959.
[6] J. Terrell, *Invisibility of the Lorentz contraction*, Physical Review, Vol. 116, Number 4, November 15, 1959, pp. 1041-1045.

(Manuscrit reçu le 26 septembre 1995)