

Mécanisme de propagation des fissures dans un milieu continu

OLIVIER FIAT

49 Rue Raymond Rouveyrol
19000 Tulle

RÉSUMÉ. Cette note propose un formalisme et une terminologie spécifiques pour les phénomènes de fracture dans les milieux continus. Elle dégage les bases d'une mécanique des fissures autonomes, en dégageant le fait remarquable que l'évolution d'une population de fissures stables identiques peut conserver leur nombre dans le respect total du principe d'indiscernabilité. Enfin, elle dégage des analogies optiques de leur comportement.

ABSTRACT. Specific formalism and terminology are hereafter proposed for fracture phenomena in continuous media. The basis of a self-fissure mechanics is studied, showing the remarkable fact that the evolution of a number of stable identical fissures leaves this number unchanged, thus satisfying undiscernability. Finally, an optical analogy in their behaviour is investigated.

1. La notion de fissure dans un milieu continu.

1.1 Connexité par arcs.

1.1.1 Chemin.

Soit E un espace topologique. On appelle chemin toute application continue

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow E \quad (1)$$

$\varphi[0, 1]$ est la trajectoire du chemin, et on dit que φ joint les extrémités $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$.

1.1.2 Définition.

E est dit connexe par arcs [1] si, et seulement si, deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin.

1.2 Milieu continu et déchirure.

1.2.1 Atomisation ponctuelle d'un objet.

La notion de milieu continu (et en particulier la mécanique du même nom) assimile un objet réel à un "continuum" Ω ayant, en général, la propriété de connexité par arcs, plongé dans l'espace géométrique \mathbf{R}^3 .

L'évolution d'un objet, connexe par arcs à la date $t = 0$ sur l'intervalle temporel $[0, T]$ de \mathbf{R} peut être décrite par "atomisation ponctuelle", c'est-à-dire par l'ensemble des trajectoires difféomorphes de chacun des points de l'objet dans sa configuration initiale Ω_0 :

$$\forall M \in \Omega_0, \exists h_M : [0, T] \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad (2)$$

avec la propriété de non-ponctifiabilité [2]: l'application $\psi_t(M) = h_M(t)$ est injective.

On pose alors:

$$\Omega(t) = \{h_M(t)/M \in \Omega_0\} \quad (3)$$

1.2.2 Objet sans déchirure évolutive.

Soit un objet connexe par arcs à la date $t = 0$. On appelle réseau initial sur cet objet un ensemble de chemins reliant deux à deux tous les points de l'objet, c'est-à-dire une famille de chemins Φ vérifiant :

$$\forall (a, b) \in \Omega_0^2, \exists \varphi \in \Phi : \begin{cases} \varphi(0) = a \\ \varphi(1) = b \end{cases} \quad (4)$$

Par définition, un objet sera dit sans déchirure évolutive dans l'intervalle de temps $[0, T]$ si, et seulement si, pour tout Φ réseau initial de chemins, l'évolution à toute date $t \in [0, T]$ de tout chemin de ce réseau est un chemin de l'évolution de l'objet :

$$\forall \varphi \in \Phi, \forall t \in [0, T], h_t \circ \varphi \text{ est un chemin de } \Omega_t \quad (5)$$

1.2.3 Objet avec déchirure évolutive.

Un objet avec déchirure évolutive vérifie la négation de la propriété précédente, c'est-à-dire qu'au moins un chemin du réseau initial a une image discontinue.

1.2.4 Terminologie.

Pour la clarté du discours qui va suivre, nous proposons d’adopter la terminologie suivante :

- le terme de *fissure* sera associé à la description dans le temps de l’espace géométrique entre les lèvres d’une fissure: il s’apparente au terme “cinématique”;
- le terme *brisure* désigne le phénomène de la propagation d’une fissure: il s’apparente au terme “dynamique”;
- le terme de *déchirure* regroupe l’ensemble formé de la fissure dans sa description et dans son évolution, d’une part, et des bouleversements des caractéristiques physiques du matériau initialement continu *dans sa totalité* provoqués par l’existence de cette fissure d’autre part: il s’apparente au terme “mécanique”.

2. Description rhéologique de la fissure dans un milieu plan doué d’élasticité linéaire.

2.1 Caractéristiques rhéologiques.

La plaque mince permet une description des phénomènes rhéologiques plus simple qu’un objet tridimensionnel. Les caractéristiques élastiques [3] sont le module d’Young E , coefficient d’élasticité linéaire, et le coefficient de poisson μ . Il existe, d’autre part, dans les matériaux réels, une limite d’élasticité, c’est-à-dire une contrainte limite σ^* au delà de laquelle le matériau va se déchirer.

2.2 Tenseur des contraintes.

Lorsqu’un milieu continu est contraint (forces réparties ou appliquées aux frontières), on peut définir en tout point P la force

$$\vec{\sigma} d\vec{S} \tag{6}$$

s’exerçant sur une “facette” dS de normale \vec{b} (σ homogène à une pression). On peut calculer le tenseur des contraintes résultant, par exemple, de la traction par écartement plan des lèvres d’une fissure initiée à l’extrémité d’un matériau plan (mode I de fissuration): dans un système de coordonnées polaires avec pour origine la tête de la fissure et pour premier axe l’axe de la fissure, le tenseur au point $P[r, \theta]$ s’écrit [4]:

$$\vec{\sigma} = \frac{K_1 \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

avec, ℓ désignant la largeur de la fissure initiée :

$$K_1 = \sigma_\infty \sqrt{\pi \ell} \quad (8)$$

2.3 Lobes de contrainte.

Les contraintes principales en un point P du milieu déchiré considéré sont valeurs propres du tenseur: on trouve parmi elles les contraintes maximale et minimale. On définit ainsi les lignes d'iso-(contrainte maximum) et d'iso-(contrainte minimum). La figure 1 présente quatre paires de courbes "min/max", pour différentes valeurs de contrainte. En P se coupent donc une ligne "min" (lobe intérieur) une ligne "max" (lobe double extérieur) à angle droit. Ces courbes peuvent être "vues" expérimentalement en observant par photoélastimétrie les déformations verticales d'une plaque horizontale fissurée et contrainte [5].

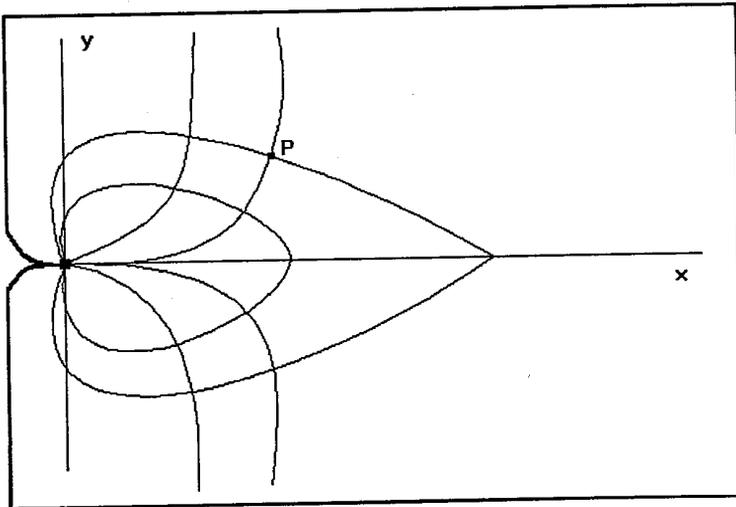


Figure 1.

L'ensemble des lignes d'isocontrainte maximum forme un sous ensemble remarquable d'un réseau initial de l'objet considéré, selon la définition du § 1.2.2.

3. Mécanisme de propagation de fissure : brisure d'un milieu continu.

3.1 Condition nécessaire de fissuration.

Considérons un milieu continu contraint, de tension de rupture σ^* . Soit P un point de cette plaque n'appartenant pas à la frontière d'une fissure. Soit enfin σ_P la contrainte maximale sur toutes les facettes passant par P (valeur propre de $\vec{\sigma}$).

- 1^{er} cas: $\sigma_P < \sigma^*$. Le milieu ne se fissurera pas en P .
- 2^{eme} cas: $\sigma_P \geq \sigma^*$. Cette condition est nécessaire pour le développement d'une fissure en P mais pas suffisante.

3.2 Initiation de la brisure.

3.2.1 Problématique.

L'objet de l'étude de la propagation des fissures est de passer de la simple éventualité de fissuration locale décrite au paragraphe précédent à l'évolution cohérente d'une même déchirure.

Le point P considéré appartient à une ligne d'isocontrainte maximum :

$$\sigma_{\max} = \sigma_P (\geq \sigma^*) \tag{9}$$

dont l'équation polaire est, en posant $\alpha = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}}$:

$$r = \frac{\alpha^2}{\sigma_P^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2 \tag{10}$$

Considérons autour de cette ligne un tube d'épaisseur égale à l'épaisseur e de la plaque et de largeur a arbitrairement petite, donc de section rectangulaire ae . En tout point de la ligne, la contrainte maximale, σ_P est contrainte principale et s'exerce donc sur une facette dont la normale est tangente à la ligne. Le tube est donc équivalent à une corde élastique uniformément tendue à la tension $T = \sigma ae$ (σ homogène à une pression, donc T à une force).

Il en résulte la problématique suivante. Soit une corde uniformément surtendue. Quel sera le mode de rupture de cette corde ? Dans la réalité expérimentale, on observe en général une rupture en un point initial, s'accompagnant d'un relâchement suffisant et assez rapide pour qu'aucune autre rupture ne soit observée ; parfois, la rupture a lieu, dans le cas des matériaux peu élastiques, en un nombre fini de points. Dans un cas extrême, on pourrait imaginer une pulvérisation du matériau, dans l'hypothèse où toutes les liaisons de cohésion fine du matériau,

soumises à la même tension limite, cèderaient simultanément. Dans le cas d'un matériau réel, en somme, le *grain* de la rupture, c'est-à-dire la dimension de l'entité composant le débris moyen prend des valeurs discrètes : feuille entre deux plans de clivage (ardoise), fibre (papier ou bois), molécule ou atome. L'existence de ce grain entraîne la possibilité mathématique d'une pulvérisation du matériau par écartement à une distance non nulle supérieure à la distance d'interaction cohésive entre les débris qui sont en nombre fini.

Imaginons par exemple une éprouvette parallélépipédique feuilletée en plans de clivages parallèles, et dont les deux bases parallèles à cette direction sont écartées l'une de l'autre. Il est conceptuellement possible que, dans le cas d'une homogénéité parfaite (et donc matériellement irréalisable), l'éprouvette arrivée à sa limite de rupture élastique se pulvérise en son nombre fini de plans atomiques. On observe alors une rupture sans brisure de symétrie.

3.2.2 Rupture spontanée de symétrie.

En revanche, l'hypothèse de matériau parfaitement continu, donc de grain nul, est, pour des raisons topologiques, parfaitement incompatible avec l'éventualité d'une pulvérisation. La rupture d'une éprouvette, même parfaitement homogène, ayant la propriété d'être un vrai milieu continu s'accompagne d'une brisure de symétrie. Des considérations du même ordre sont développées dans la théorie des jauges [6].

Le mode d'initiation de la déchirure d'une telle éprouvette entre alors dans une catégorie complexe dont la description est celle d'une catastrophe généralisée [7].

3.2.3 Opportunisme de la brisure: défauts de structure, pliage, pointillés.

Ce paragraphe donne les limites de l'imprévisibilité de l'initiation ou de l'errance continue de la fissure.

Considérons une feuille de verre soumise à une contrainte importante. La fissure peut se développer n'importe où sur la feuille, mais elle profitera soit d'un défaut majeur de la vitre, soit d'un défaut cristallin. Dans le cas d'une feuille de papier prépliée ou prédécoupée, la fissure se développera préférentiellement en suivant les faiblesses de la feuille, selon les fibres cassées au pliage, ou coupées. Dans le cas d'un matériau infini, en revanche, idéalement homogène et isotrope, une fissure symétrique développe autour d'elle un tenseur des contraintes du

type écrit plus haut, pour lequel le domaine surtendu est toujours connexe, et se développe donc en ligne droite à partir de sa tête où le tenseur présente une singularité en $r^{-1/2}$. L'errance brownienne de la trajectoire de la tête de fissure n'existe donc que dans un milieu continu non idéal, présentant des défauts locaux, donc implicitement déjà peuplé d'autres déchirures.

3.3 Brisure. Phénomènes annexes.

3.3.1 Préférence pour la ligne continue.

Nous allons maintenant montrer qu'une fissure en extension suit une ligne continue dans un domaine connexe surtendu. Notons bien que l'ensemble des points où le milieu est continu ne formant pas nécessairement un domaine connexe, la tête de fissure ne suivra pas nécessairement une ligne continue, mais pourra avoir une forme de pointillés séparément continus.

Supposons que la "corde" immédiatement précédente de celle contenant P se brise en le point Q adjacent au point P : leurs coordonnées polaires sont donc :

$$\begin{cases} P[r, \alpha] \\ Q[r - a, \alpha] \end{cases} \quad (11)$$

Considérons alors la corde Γ de largeur $2a$ réunion des cordes adjacentes Γ_P et Γ_Q . Avant la brisure en Q , cette corde double subit une tension $\sigma_P + \sigma_Q \simeq 2\sigma_P$. Mais immédiatement après la rupture de Γ_Q , Γ doit supporter cette tension double en particulier dans la direction polaire α , au point P , où elle est dénudée : en ce point, c'est la corde simple Γ_P qui doit donc seule supporter:

$$\sigma'_P \simeq 2\sigma_P \geq 2\sigma^* \gg \sigma^* \quad (12)$$

La rupture a lieu tout naturellement au voisinage du point "faible" P , adjacent de Q , d'où la continuité de la fissure dans le domaine connexe surtendu autour de P . En appliquant ce raisonnement aux cordes concentriques successives, on met en évidence un phénomène de propagation catastrophique de fissure par percussions (variation finie de la tension en un temps infinitésimal) successives qui durera jusqu'à relaxation suffisante du tenseur des contraintes.

En somme, *l'initiation d'une fissure dans un domaine connexe sur-tendu est imprévisible mais la tête de fissure, une fois celle-ci initiée, suit une ligne continue dans le domaine.*

3.3.2 Interactions : milieux, réfraction, diffraction, interférences.

Le passage d'un milieu à un autre s'accompagne d'un changement des paramètres rhéologiques E (module d'Young, d'élasticité), μ (coefficient de poisson) et σ^* . La déformation du tenseur des contraintes, donc sa perte de symétrie, d'une part au passage d'un milieu à un autre, d'autre part aux abords d'une porte de faible largeur provoque la déviation d'une déchirure en propagation, ce qui met en évidence des phénomènes de réfraction et de diffraction avec une analogie optique évidente. Enfin, les tenseurs des contraintes sont superposables, ce qui rend possibles des phénomènes d'interférence.

3.3.3 Energie de la fissure au repos.

On montre que la propagation d'un signal vibratoire, en particulier celle du couple rhéologique (déformation/contrainte) se fait à une vitesse égale, à un facteur de dimension près, à la racine carrée du module d'Young:

$$E = \delta c^2 \quad (13)$$

D'autre part, le travail rhéologique W de fissuration d'un matériau plan est égal au produit du module d'Young par un facteur fonction des seules dimensions de la fissure \mathcal{F} , soit $\varphi(\mathcal{F})$, d'où:

$$W = \delta \varphi(\mathcal{F}) c^2 \quad (14)$$

Pour une fissure sphérique, de rayon r_0 , le calcul donne:

$$\varphi(\mathcal{F}) = \int_{r_0}^{\infty} 4\pi r^2 \left[1 - \left(1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 (\tau_0^3 - 1) \right)^{\frac{2}{3}} \right] dr \quad (15)$$

μ_0 étant un facteur sans dimension lié à la limite de tension du matériau.

3.3.4 Energie de la déchirure.

Le paragraphe précédent considère la fissure au repos. Dans le cas d'une fissure en extension, voire en résorption dans le cas d'un matériau coagulant, la modélisation dynamique appartient alors, conformément à

la terminologie précédemment proposée, à l'étude de la déchirure. On observe alors des échanges énergétiques complexes entre déformation du matériau, écartement des lèvres de la fissure, rupture et coagulation.

Les milieux coagulants sont rares ; l'extension d'une fissure dans un milieu n'ayant pas cette propriété ne peut pas être autonome, car elle est consommatrice d'énergie (cette énergie lui est fournie par les contraintes extérieures).

3.3.5 Signaux d'émission acoustique.

Ainsi, un matériau fissuré et contraint (donc alimenté en énergie) peut être le siège d'oscillations mécaniques pouvant éventuellement être audibles par établissement d'un régime d'ondes harmoniques stationnaire entre les parois de l'objet.

3.3.6 Fissure autonome.

Dans le cas d'un matériau coagulant, en revanche, l'énergie dissipée par la brisure en tête de fissure peut être récupérée par recollement des lèvres en queue de fissure. Une dynamique propre et autonome peut alors être observée, sur le mode d'une propagation par oscillations de relaxation, et dont l'étude théorique a été faite par Yoffe [8]. Une observation originale de la propagation d'une fissure dans un milieu continu coagulant est celle des déplacements d'un corps étranger (par exemple un éclat d'obus) dans le corps humain, son existence à l'intérieur des tissus matérialisant une fissure. Ce déplacement, cependant, n'est pas complètement autonome; il répond en fait à une dynamique spécifique associée au gradient de texture et de densité des tissus vivants.

4. Remarques sur le caractère double de la déchirure.

4.1 Analogie avec l'onde pilote.

L'opportunité de la déchirure, et le mode d'extension d'une fissure, dans la description qui a fait l'objet de cette note, mettent en évidence qu'une fissure autonome se développe selon une dynamique spécifique. En appelant tête de cette fissure le point géométrique du milieu où se produit l'extension de cette fissure, et en appelant trajectoire l'ensemble des positions successives inscrites sur la référence du milieu continu Ω_0 , il apparaît que cette trajectoire se développe sur la ligne d'isocontrainte maximale $\sigma = \sigma^*$; cette ligne est en général adjacente à la frontière de la fissure, et la trajectoire est continue, dans les limites d'errance

indiquées au § 3.2.3. Mais les perturbations du milieu continu, propres à ce milieu, ou dues à l'existence d'autres fissures, peuvent matérialiser cette ligne plus loin dans le milieu, et la trajectoire sera discontinue: la fissure semble ainsi disparaître localement pour réapparaître plus loin.

Cette inscription de la trajectoire dans le lobe des contraintes, avec un déterminisme relatif, et la détermination réciproque du tenseur des contraintes à partir de la fissure évoque manifestement la notion d'onde pilote de de Broglie [9].

4.2 Indices d'une dynamique des fissures autonomes.

Considérons un milieu continu idéal, plan infini horizontal, "peuplé" de deux fissures autonomes n'induisant pas de déformation verticale. La superposition des tenseurs de contrainte implique, pour chacune des fissures, le phénomène suivant. Le tenseur des contraintes propre, symétrique par rapport à l'axe de propagation de la fissure considérée, se voit superposé le tenseur des contraintes de l'autre fissure. Il y a donc accroissement de la contrainte dans la direction de l'autre fissure, déformation du spectre des lignes d'isocontrainte maximum dans cette direction, et du fait de l'opportunité de la déchirure, l'extension de la fissure est infléchie vers la seconde : cette variation d'une quantité, relative au mouvement de la fissure autonome, assimilable à une quantité de mouvement est assimilable à une force d'attraction entre les deux fissures. De même, deux fissures autonomes induisant une déformation verticale du matériau plan, comme lorsqu'on perce une feuille de papier avec un stylo, peuvent se repousser si les deux fissures sont toutes les deux orientées verticalement vers le haut, ou vers le bas, et s'attirer si elles sont d'orientations contraires.

4.3 Fissure et logos.

La fissure autonome possède la propriété de stabilité structurelle. Enrichissons cette propriété d'une hypothèse plus forte relative au milieu continu fissurable considéré : supposons qu'il n'existe qu'un seul type de fissure autonome susceptible de se former, par exemple pour des raisons de taille critique. Considérons alors une population de n de ces fissures dans un milieu continu délimité. Tant que le développement autonome de chacune d'entre elles se fait selon des "trajectoires" continues disjointes, elles sont toutes discernables. Envisageons les deux modes d'arrêt de cette évolution.

1. La superposition, dans une configuration particulière de l'ensemble des fissures, voire en raison d'une forme particulière du matériau, de l'ensemble des tenseurs des contraintes

présente, en une région non connexe de quelque fissure que ce soit, une surtension. Une fissure va alors apparaître à cet endroit, et la conservation de l'énergie totale de la population impose la disparition de l'une des fissures initiales. Il devient alors impossible de dire que la nouvelle fissure est une rematérialisation de l'ancienne ; elle est bien plus justement "fille" de l'ensemble des fissures initiales.

2. Dans le cas de superposition de deux trajectoires, une fissure plus vaste va se former, instable par hypothèse, et se redissocier en deux fissures filles.

Dans les deux cas, il apparaît que le principe d'indiscernabilité est respecté par la population de fissures. En somme, la fissure, considérée dans l'ensemble, bien que possédant la propriété de stabilité structurelle, n'est pas un "logos" idéal. On peut lui préférer la déchirure, dont on rappelle qu'elle habille la fissure du tenseur des contraintes qui lui est associé, car la déchirure seule subsiste au moment de délocalisation de la fissure qui va se rematérialiser en un endroit du matériau non connexe à la trajectoire de la fissure initiale.

Références

- [1] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de Mathématiques spéciales, tome 3* Masson, Paris 1982.
- [2] J. Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures*, Gauthier-Villars, Paris 1977.
- [3] A. Leluan, *Cours de Mécanique des Milieux Continus et Théorie de l'Elasticité, Cours de 1^{ère} année de l'Ecole Centrale de Paris*, 1983/1984.
- [4] *Cours de résistance des matériaux* Ecole des Ponts et Chaussées, Paris.
- [5] H. T. Corten and F. R. Park, *Fracture*. International Science and Technology, 1963.
- [6] *Encyclopedia Universalis*, Article "particules élémentaires".
- [7] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Benjamin, New York 1972.
- [8] Yoffé, *Philosophical Magazine*, **42**, 739 (1951).
- [9] L. de Broglie, *Thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris 1971.

(Manuscrit reçu le 23 février 1995)