Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 21, n° 3, 1996

Moyennes et algèbres de fonctions

Jean Bass

24, rue Ferdinand Jamin, 92340 Bourg-la-Reine

RÉSUMÉ. L'utilisation des opérateurs de l'espace de Hilbert pour définir des structures probabilistes conduit à des singularités, dont on donne en mécanique quantique une interprétation physique, et qu'on peut justifier en remarquant qu'à deux opérateurs qui ne commutent pas, on ne peut pas associer le même espace de probabilité.

Des circonstances analogues se rencontrent avec certaines algèbres de fonctions, sur lesquelles on définit une moyenne temporelle

$$Mf = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \quad .$$

Ces algèbres sont constituées par des fonctions f, g, deux à deux comparables ($Mf\overline{g}$ existe), propriété qui n'est pas vérifiée par deux fonctions quelconques (même si Mf, Mg, $M|f|^2$, $M|g|^2$ existent).

On étudie les fonctions caractéristiques associées à une ou à plusieurs fonctions. On examine leur existence et leur degré de généralité. On termine par quelques remarques sur l'évolution temporelle et la notion de temps.

ABSTRACT.

In a preceding paper, it was shown that, in quantum mechanics, the probabilistic interpretation of operators necessitates the introduction of independant probability spaces, associated to non commuting operators.

Analogous circumstances can be found in the properties of functions algebras, the stochastic mean-values been replaced by a temporal mean-value

$$Mf = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \quad .$$

The elements of the algebras are pairwise comparable, i.e. $Mf\overline{g}$ *exists. This property is not verified by an arbitrary pair of functions* f, g *even if* Mf, Mg, $M|f|^2$, $M|g|^2$ *exist.*

A study is made of the characteristic function associated to one or several functions. Some remarks are made about the temporal evolution and the notion of time.

1. Introduction.

Dans un précédent article [6], j'ai rappelé comment, en utilisant les opérateurs hermitiens d'un espace de Hilbert, la mécanique quantique avait pris la forme d'une mécanique statistique. A tout opérateur hermitien A, elle associe dans l'état ψ (élément normé de l'espace de Hilbert) la fonction

$$\phi(\lambda) = \langle \exp i\lambda A\psi, \psi\rangle,$$

qui est la fonction caractéristique, au sens des probabilités, d'une variable aléatoire.

Si des opérateurs hermitiens commutent avec A et entre eux, ils constituent une algèbre commutative. Chacun de ces opérateurs peut s'écrire comme une fonction $F(A)$ de A, ce qui permet de lui associer une variable aléatoire $F(x)$, pour la mesure de probabilité m dont ϕ est la transformée de Fourier.

Si deux opérateurs A, B ne commutent pas, leur couple ne permet pas de définir une loi de probabilité jointe. On doit associer à A et B deux algèbres distinctes, dont l'intersection, à part l'opérateur unité, peut ne pas être nulle. Ces deux algèbres sont représentatives de grandeurs physiques "de nature différente". La mécanique quantique n'est donc pas globalement probabilisable.

Dans le présent article, je vais montrer qu'il existe des algèbres de fonctions qui ont des propriétés assez semblables à celle des algèbres d'opérateurs. Ces fonctions sont définies par des moyennes temporelles, qui sont plus proches de l'expérience physique que les moyennes de la mécanique quantique, bien qu'elles ne semblent pas y trouver naturellement leur place.

Parmi les fonctions dont il va être question, on rencontre les fonctions presque-périodiques représentées par des séries de Fourier en général non périodiques. Ces fonctions jouent un rôle important en mécanique quantique. En effet, dans le cas usuel d'un spectre de raies, la solution générale de l'équation de Schrödinger est de la forme

$$\psi = \sum_k c_k(x) e^{i\omega_k t}$$

C'est donc une fonction presque-périodique du temps t. Mais il existe d'autres sortes de "fonctions stationnaires", qui constituent divers algèbres distinctes de celle des fonctions presque-périodiques. On les étudiera dans les paragraphes qui suivent. Ces fonctions sont souvent continues. Cependant il sera commode de donner des exemples à l'aide de fonctions non continues (fonctions en escalier, constantes par intervalles).

2. Moyennes temporelles.

Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t, à valeurs complexes ou réelles suivant les circonstances. La moyenne temporelle de f est

$$Mf = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)dt$$

(Il peut être utile de remplacer dans la définition $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}$ par $\frac{1}{T}\int_{0}^{T}$.)

L'ensemble des fonctions ayant une moyenne temporelle est évidement un espace vectoriel. Il peut arriver que $|f|^2$ ait une moyenne. Cela n'implique d'ailleurs pas que f ait une moyenne, même si f est bornée.

Exemple : $f(t) = \exp i \log n$ *si* $0 \le n < t < n+1$.

Comme $|f| = 1$, f a bien une moyenne quadratique. Mais Mf s'identifie à

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp i \log n = \lim_{N\to\infty} \exp(i \log N) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp i \frac{n}{N}$$

Le terme en $\frac{1}{N}\sum$ tend, lorsque $N \to \infty$, vers

$$\int_0^1 \exp i \log x dx = \frac{1}{1+i}$$

Mais il est multiplié par $\exp i \log N$, qui ne tend vers aucune limite.

Si f et g ont des moyennes quadratiques, il n'en résulte pas nécessairement que $f\overline{g}$ ait une moyenne. Les fonctions "moyennables" se comportent donc d'une façon différente des variables aléatoires. Car si X et Y ont des moyennes quadratiques, $X\overline{Y}$ et X ont toujours une moyenne (au sens des espérances mathématiques). A condition bien entendu que X et Y soient définies sur le même espace de probabilité.

Exemple : $f = \exp i \log n$ *pour* $0 \leq n < t < n+1$, $g = 1$

Si $f\overline{g}$ a une moyenne, on dit que f et g sont *comparables* On s'intéresse surtout aux fonctions f, g qui ont aussi une moyenne, c'est à dire aux fonctions comparables à l'unité.

La fonction f étant donnée, on peut alors considérer l'ensemble des fonctions comparables à f et comparables entre elles. Cet ensemble constitue une algèbre, analogue à une algèbre commutative d'opérateurs hermitiens. Si les éléments de cette algèbre ont des moyennes, elle contient la fonction unité, qui joue le rôle de l'opérateur unité.

Sous sa forme générale, cette algèbre est moins précise que l'algèbre des opérateurs. En particulier, il n'existe pas de propriété du type " $F(f)$ est comparable à f ". En ce sens, l'algèbre des fonctions présente une plus grandes analogie avec certains ensembles de variables aléatoires. Si f a une moyenne, $F(f)$ n'a pas forcément de moyenne. De même, si la variable aléatoire X a une moyenne (stochastique), $F(X)$ n'a pas forcément de moyenne.

Exemple : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}$ *(pour* $t > 0$*)* ; $[f(t)]^2 = \frac{1}{t} e^{-2t}$

Autre exemple : (avec une fonction bornée à l'origine)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{n} && \text{si } 0 < 2n < t < 2n+1 \\ &= -\sqrt{n} && \text{si } 2n+1 < t < 2n+2 \end{aligned}$$

Il existe cependant des algèbres de fonctions comparables, contenant la fonction unité. Les éléments de ces algèbres ont une moyenne, et le produit de deux d'entre eux a une moyenne. La plus classique est l'algèbre des fonctions presque-périodiques, qui contient comme sous-algèbre l'ensemble des fonctions périodiques de période donnée. Cette structure multiplicative est tout à fait analogue à celle d'une algèbre d'opérateurs hermitiens.

Une question nouvelle se pose ici. Une algèbre de fonctions peut elle contenir les translatées de cette fonction, et plus précisément si f et g sont des fonctions appartenant à l'algèbre, le produit $f(t)\overline{g}(t+\tau)$ a-t-il une moyenne?

La moyenne de $\overline{f}(t)f(t+\tau)$ s'appelle la *fonction de corrélation* de f. Elle joue ici le même rôle que la covarience des fonctions aléatoires stationnaires. Son étude présente un grand interêt et permet une classification des fonctions moyennables (J. Bass, [1], [2]). Notons seulement que la fonction de corrélation de $f(t)$ est une fonction de type positif[1]. Si elle est continue, sa transformée de Fourier est la mesure spectrale de f. Elle est tout à fait indépendante de la fonction caractéristique dont il va être question plus loin. Mais il existe des fonctions qui n'ont pas de fonction de corrélation.

Exemple : Soit g une fonction réelle qui n'a pas de moyenne. Il existe des fonctions réelles f telles que, pour au moins une valeur de τ

$$f(t)f(t+\tau) = g(t)$$

Pour le voir, choisissons $\tau = 1$. Si $f(t)f(t+1) = g(t)$, la fonction de corrélation de f n'existe pas pour $\tau = 1$. Pour trouver f, on peut se donner arbitrairement les valeurs de $f(t)$ dans l'intervalle $(0,1)$. Comme $t+1$ appartient alors à l'intervalle $(1,2)$, on en déduit f dans cet intervalle, et le procédé se continue indéfiniment.

Si f est positive, on peut aussi applique la transformation de Laplace à l'égalité

$$\log f(t) + \log f(t+1) = \log g(t)$$

à condition que f soit donnée dans (0,1).

3. Fonction caractéristique.

Si la fonction f est réelle, on peut lui associer une fonction de type positif distincte de la fonction de correlation. C'est la fonction

$$\varphi(\lambda) = M \exp i\lambda f(t)$$

---

[1] Une fonction (à valeurs complexes) f est de type positif si elle vérifie les conditions suivantes. Pour tout entier n, tous nombres $\tau_1, \dots, \tau_n$ et tous nombres complexes $c_1, \dots, c_n$, on a l'inégalité $\sum \bar{c}_i c_j f(\tau_i - \tau_j) \geq 0$. Si elle est continue, elle est la transformée de Fourier d'une mesure positive bornée (théorème de Bochner).

Elle joue pour f le rôle d'une fonction caractéristique au sens des probabilités. Sa transformée de Fourier est une mesure de probabilité, qui nous renseigne sur la distribution des valeurs successives prises par f en fonction du paramètre t (le temps).

Exemple :

$$f(t) = \sin t$$

$$\varphi(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \exp i\lambda \sin t\, dt = J_0(\lambda)$$

où $J_0(\lambda)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Mais il peut arriver que f n'ait pas de fonction caractéristique.

Exemple : $f(t) = \log n$ *si* $0 \le n < t < n+1$ *(voir le premier exemple ci-dessus).*

Il peut être intéressant de restreindre l'étude des fonctions et de leurs moyennes à celles qui ont une fonction caractéristique. C'est naturellement ce qui a lieu pour les fonctions presque-périodiques, qui généralisent l'exemple de la fonction $\sin t$. Si f est presque-périodique, $\exp i\lambda f$ est aussi presque-périodique et a une moyenne.

C'est aussi le cas pour certaines fonctions pseudo-aléatoires ([1], [2]). Rappelons que ce sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes en général, telles que la fonction de corrélation $M\bar{f}(t)f(t+\tau)$ existe, soit continue, ne soit pas identiquement nulle, et tende vers 0 lorsque $\tau \to \infty$.

On construit facilement des modèles de fonctions pseudo-aléatoires par le procédé suivant. Il faut d'abord introduire la notion de suite équirépartie sur $(0,1)$. Soit x_n une suite de nombres compris entre 0 et 1. Parmi les N premiers, il en existe n qui appartiennent à un intervalle arbitrairement donné $(a,b) \subset (0,1)$. Si, lorsque $N \to \infty$, le rapport n/N tend vers une limite, égale à $b-a$, on dit que la suite est équirépartie sur $(0,1)$. Soit alors g une fonction à valeurs complexes définie sur $(0,1)$ et telle que $\int_0^1 g(x)dx = 1$. La fonction $f(t)$ égale à $g(x_n)$ si $0 \le n < t < n+1$, à 0 si $t < 0$, est pseudo-aléatoire[2]. Sa fonction de corrélation est égale à $1-|\tau|$ si $|\tau| < 1$, à 0 si $|\tau| \ge 1$. Sa fonction caractéristique se calcule par une moyenne arithmétique

[2] En réalité, il ne suffit pas que la suite x_n soit équirépartie. Il faut qu'elle soit doublement équirépartie, c'est à dire que, pour p entier différent de 0, la suite $(x_n,\, x_{n+p})$ soit équirépartie dans le carré $(0,1)\times(0,1)$.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp i\lambda g(x_n)$$

D'après un théorème célébre de H. Weyl, elle est égale à

$$\int_0^1 \exp i\lambda g(x)\,dx$$

Il existe des modèles simples de suites équiréparties. Soit

$$P_\nu(x) = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \ldots + a_\nu$$

un polynôme de degré ν. Si $\nu \geq 1$ et si a_0 est irrationnel, la suite $P_\nu(n)$ modulo 1 est équirépartie. Si $\nu \geq 2$, elle est apte à construire une fonction pseudo-aléatoire.

4. Couples de fonctions.

Si l'on se donne deux fonctions f et g, on définit leur fonction caractéristique jointe par

$$\varphi(\lambda, \mu) = M \exp i(\lambda f + \mu g);$$

pourvu que la moyenne existe.

Exemple : $f(t) = \sin t, \quad g(t) = \sin(t+\tau), \quad \tau$ *fixé.*

On trouve

$$\varphi(\lambda, \mu) = J_0\left(\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\tau + \mu^2}\right)$$

La mesure de probabilité dont φ est la fonction caractéristique est concentrée sur l'ellipse $x = \sin t,\ y = \sin(t+\tau)$, avec une densité uniforme.

Mais il existe des couples de fonctions (f, g) qui n'ont pas de fonction caractéristique, alors même que chacune des fonctions f, g en a. On ne peut donc associer au couple une structure probabiliste.

Exemple : Soit x_n une suite de nombres réels équirépartie modulo 1 (la suite des parties fractionnaires de x_n est équirépartie.)

Posons $\underline{x_n} = x_n$ modulo 1 et introduisons la suite $\underline{y_n} = \underline{x_n + \log n}$, c'est à dire $x_n + logn$ modulo 1 ($\underline{y_n}$ est la partie fractionnaire de $x_n + \log n$).

Considérons les fonctions $f,\ g$ telles que

$$f(t) = \underline{x_n},\ g(t) = \underline{y_n},\ \text{si } n < t < n+1$$

La fonction caractéristique du couple f, g est

$$\phi(\lambda,\mu) = M \exp i(\lambda\underline{x_n} + \mu\underline{x_n + \log n}).$$

Nous allons monter que, si $\lambda/2\pi$ et $\mu/2\pi$ sont entiers, $\varphi(\lambda,\mu)$ existe en général, mais n'existe pas sur la droite $\lambda+\mu=0$ du plan de (λ,μ).

En effet, avec ces hypothèses, on a

$$\varphi = M \exp 2i\pi\,[kx_n + l(\log n + x_n)] = M \exp 2i\pi\,[(k+l)x_n + l\log n]$$

où k et l sont des entiers (il n'y a plus lieu de distinguer ici x_n de $\underline{x_n}$). On a vu plus haut que, si $k+l=0$, φ n'existe pas. Complétons ce résultat en montrant que, si $k+l\neq 0$, φ existe. Posons $k+l=p$, entier $\neq 0$ et posons

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \exp 2i\pi x_r, \quad \exp 2i\pi x_r = S_r - S_{r-1}$$

On a

$$\varphi = M \exp 2i\pi l(Sn - S_{n-1})$$

φ a la même valeur que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} S_n\left(\exp 2i\pi l\log n - \exp 2i\pi l\log(n+1)\right)$$

L'expression dont on cherche la limite est majorée par

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |S_n|\pi l\left|\log\frac{n}{n+1}\right| < \frac{1}{N}\pi l\sum_{n=1}^{N}\frac{|S_n|}{n}$$

Comme la suite x_n est équirépartie, la moyenne S_n/n tend vers zéro. Donc elle tend vers aussi vers zéro en moyenne au sens de Cesaro. Si $p=k+l\neq 0$, on voit que φ existe et est nul.

5. Algèbres de fonctions et opérateurs. Mesures associées.

Comparons les structures d'algèbres de fonctions avec celles des algèbres d'opérateurs. Nous savons [6] que les opérateurs hermitiens (commutatifs) d'un espace de Hilbert engendrent diverses algèbres, ayant en commun l'identité et parfois d'autres éléments. Ces algèbres engendrent des structures probabilistes, qui ne sont pas uniques.

Il existe des algèbres de fonctions moyennables. Chacune de ces algèbres est constituée par un ensemble de fonctions f, g ... telles que les produits $f\bar{g}$ aient une moyenne. Ces algèbres sont encore trop générales pour former des structures probabilistes. Il faut pour cela que $M \exp i(\lambda f + \mu g)$ existe, c'est à dire que les fonctions $\exp i\lambda f$, $\exp i\mu g$ soient comparables quels que soient λ et μ. Les fonctions f et g sont alors "complètement comparables".

Voici un exemple de deux algèbres de fonctions qui ne sont pas comparables entre elles. L'une est l'algèbre des fonctions f périodiques de période 1. La seconde est constituée par les fonctions de la forme $g(t) = \exp[2i\pi p(t + \log t)]$, où p est entier.

Parmi les fonctions périodiques de période 1, on trouve la fonction $\exp 2i\pi pt$. On a alors $f\bar{g} = \exp[-2i\pi p \log t]$. On a vu que cette fonction n'a pas de moyenne.

Si la fonction f admet une fonction caractéristique $\varphi(\lambda)$, on peut lui associer une mesure de probabilité m. Réciproquement, si on se donne m, on peut lui associer des fonctions f. Les plus simples sont des fonctions en escalier. Voici comment on les définit.

Soit F une fonction définie sur $(0, 1)$. Soit x_n une suite équirépartie sur $(0, 1)$. Posons

$$f(t) = F(x_n) \qquad \text{si } 0 \le n < t < n + 1$$

On a alors

$$\varphi(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp i\lambda F(x_n)$$

D'après le théorème de H. Weyl ,

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 \exp i\lambda F(x)\, dx$$

Il existe donc une mesure m telle que l'on ait

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\lambda y \, dm(y)$$

Si en particulier F est monotone, F admet une fonction réciproque G

$$F(x) = y \qquad x = G(y)$$

et

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\lambda y \, dG(y)$$

La méthode s'applique aussi bien à un ensemble fini de fonctions $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_j$. On introduit une suite vectorielle équirépartie dans le cube à j dimensions. Elle est constituée par j suites $\{x_n^1\}, \ldots,\ \{x_n^j\}$ indépendantes. On sait que de telles suites existent. Par exemple, pour $j = 2$, si a_0 est irrationel, les suites $a_0 n^2$ et $a_0(n+1)^2$ modulo 1, sont équiréparties dans le carré.

On considère alors j fonctions $F_1, \ldots,\ F_j$ de j variables. On pose

$$f_k(t) = F_k(x_n^1,\ \ldots,\ x_n^j) \qquad \text{pour } 0 \leq n < t < n+1$$

On forme

$$\varphi = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{j} \exp\Big[i(\sum \lambda_k F_k(x_n^1, \ldots, x_n^j))\Big]$$

D'après le théorème de H. Weyl,

$$\varphi = \int \ldots \int \exp\Big[i \sum \lambda_k F_k(x^1, \ldots, x^j)\Big]\, dx_1 \ldots dx_j$$

l'intégrale étant étendue au cube $(0,1)^j$.

Si la transformation $y_k = F_k(x^1, \ldots,\ x^j)$ est, pour fixer les idées, différentiable et inversible, on a

$$\varphi = \int \ldots \int \exp\Big[i \sum \lambda_k y_k\Big] |J|\, dy_1, \ldots,\ dy_j,$$

où J est le jacobien de la transformation réciproque.

Se donner la mesure, c'est donc se donner J, ce qui laisse un grand choix pour construire des fonctions F_k ou f_k.

Le problème qui vient d'être étudié comporte comme intermédiaire le problème suivant : trouver j fonctions $G_1, \ldots, G_j$ d'une variable t telle que

$$\int_0^1 \exp\Big[i \sum_{k=1}^{j} \lambda_k G_k(t)\Big]\, dt$$

soit la transformée de Fourier d'une mesure donnée. Cette mesure doit être concentrée sur la courbe définie paramétriquement par

$$x_k = G_k(t) \qquad k = 1, \ldots, j$$

Donc, pour avoir une solution non dégénérée, il faut que cette courbe remplisse le cube, ou tout au moins soit dense dans le cube. C'est possible à l'aide de courbes de Peano ou d'Hilbert. Mais il est plus simple de traduire l'énoncé en terme de suites équiréparties, car les suites denses dans le cube (fonctions d'un entier) sont d'un maniement beaucoup plus naturel que les fonctions continues remplissant le carré.

6. Evolution temporelle.

En mécanique quantique, les problèmes d'évolution temporelle sont dissociés des problèmes purement probabilistes. Les probabilités se définissent à l'aide de deux éléments : l'opérateur, qui ne dépend pas du temps, et la fonction ψ, qui dépend du temps, et dont l'évolution est réglée par l'équation de Schrödinger.

La situation est comparable à celle que l'on rencontre dans les problèmes usuels de théorie des probabilités. Les mesures de probabilité sont définies sur un espace qui ne dépend pas du temps. Si le temps intervient, les variables aléatoires deviennent des fonctions aléatoires, qui sont définies sur le produit de deux espaces indépendants.

Dans le cas des moyennes de fonctions, la situation est moins claire, car les moyennes elles-même se construisent à l'aide du temps. Si l'on veut conserver l'idée d'une évolution temporelle, il semble que deux solutions sont possibles:

– ou bien il y a deux échelles de temps. Les moyennes se calculent approximativement sur un intervalle T suffisamment grand pour être efficace, et en même temps petit par rapport au temps macroscopique d'évolution.

– ou bien on admet l'existance de deux sortes de temps, le temps t qui sert à calculer les moyennes, et le temps t' d'évolution, indépendant de t.

En toute rigueur, l'existence d'un seul temps conduit à des contradictions. En particulier toute fonction réelle f bornée et dérivable est comparable à sa dérivée, car

$$Mf\frac{df}{dt} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\frac{df}{dt}\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[|f|^2]_0^T = 0$$

Si au contraire il existe deux temps $t,\ t'$, il n'y a plus de contradiction, mais il existe des fonctions $f(t,t')$ qui ne sont pas comparables à $\frac{\partial}{\partial t'}f(t,t')$.

Voici un exemple de fonctions qui ne sont pas complétement comparables. Le couple $(f, \frac{\partial f}{\partial t'})$ n'a pas de probabilité jointe.

Posons

$$f(t) = t\exp(-t') + \varepsilon\log tR(t')$$

où ε est un paramètre numérique. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = -t\exp(-t') + \varepsilon\log tR'(t')$$

$$\begin{aligned} &M\exp i\left(\lambda f + \mu\frac{\partial f}{\partial t'}\right) = \\ &M\exp i[(\lambda-\mu)te^{(-t')} + 2\log t(\lambda R(t') - \mu R'(t'))] \end{aligned}$$

Si $R(t') - R'(t') \neq 0$, cette moyenne $\exp(-t')$ n'existe pas pour $\lambda = \mu$.

7. Conclusion.

Il existe des analogies nombreuses entre les algèbres d'opérateurs hermitiens commutatifs ($AB = BA$) et les algèbres de fonctions moyennables ($Mf\bar{g}$ existe). Dans les deux cas, par l'intermédiaire des fonctions caractéristiques, on construit des lois de probabilité associées à ces algèbres. Mais l'usage qu'on fait de ces opérateurs ou de ces fonctions conduit à rencontrer des algèbres distinctes. Les éléments de deux de ces algèbres sont des opérateurs qui ne commutent pas, ou des fonctions dont le produit n'a pas de moyenne.

Dans le cas des opérateurs, ces circonstances sont provoquées par la présence de la constante de Plank h. Elles disparaissent si on fait tendre h, considéré comme un paramètre, vers zero. Dans le cas des fonctions, cette singularité n'apparait pas spontanément. Mais il est possible de construire des exemples où un paramètre ε joue le rôle du paramètre h. Si $\varepsilon \neq 0$, certaines moyennes n'existent plus, et les structures probabilistes se séparent. Elles se rejoignent si $\varepsilon = 0$.

En mécanique quantique, comme en théorie des probabilités, il y a séparation entre l'espace de probabilité, responsable de la structure probabiliste, et le temps (ou éventuellement d'autres paramètres macroscopiques). Cette séparation semble ne pas exister spontanément quand il s'agit de moyennes temporelles.On peut y remédier par des méthodes d'approximation semi-empiriques, utilisant le même temps à des échelles différentes. On peut aussi imaginer qu'il existe deux sortes de temps, l'un macroscopique, l'autre responsable du calcul des moyennes. Mais on n'aperçoit pas actuellement le moyen d'établir une équation d'évolution des grandeurs physiques qui tienne compte de ces deux sortes de temps.

Références

[1] J. Bass, *Les fonctions pseudo-aléatoires, Mémorial des Sciences Mathématiques*, Gauthier-Villars, 1962.

[2] J. Bass, Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications, Masson, 1984.

[3] J. Bass, *Moyennes et mesures en mécanique classique et en mécanique quantique*, Ann. Institut H. Poincaré, **3**, 1980.

[4] J. Bass, *Probability, Pseudo-probability, Mean values*, in “Wave particle duality ”, Plenum Press, 1992.

[5] J. Bass, *Probabilités et pseudo-probabilités en mécanique quantique*, In “Courants, amers, écueils en microphysique”, Fondation Louis de Broglie, Paris, 1992.

[6] J. Bass, *Opérateurs et probabilités, (à propos de l'interprétation statistique de la mécanique quantique)*, Ann. Fond. L. de Broglie, **21**, 39, 1996.

[7] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation statistique de la mécanique quantique*, Gauthier-Villars, Paris, 1982.

[8] H. Weyl, Uben die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins, Math Annalen, **77**, 1916.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1994)