Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 21, n° 4, 1996

Inertie électromagnétique et physicalité des potentiels: une proposition testable

O. Costa de Beauregard

Fondation Louis de Broglie, 23, quai de Conti, 75006 Paris

RÉSUMÉ. En l'absence de champ, la condition de Lorentz impose à l'équation de Klein-Gordon la jauge $A^i \equiv 0$. L'effet Aharonov-Bohm sélectionne alors la jauge adhérente à la source du potentiel. Postulant que ce résultat est général, on discute l'action-réaction linéaire-et-angulaire entre systèmes électro et magnéto-statiques légèrement perturbés. Le test proposé est un effet gyromagnétique anormal d'un aimant intérieur à une sphère uniformément chargée.

ABSTRACT. In a fieldless context, the Lorentz condition imposes to the Klein-Gordon equation the $A^i \equiv 0$ *gauge. Then the Aharonov-Bohm effect selects the source adhering gauge. Assuming generality of this result the linear-and-angular action-reaction between slightly perturbed electro and magneto-static systems is discussed. The proposed test is an anomalous gyromagnetic ratio for a magnet enclosed in a uniformly charged sphere.*

1 - Condition de Lorentz et physicalité du 4-potentiel.

Louis de Broglie, indépendamment de sa théorie du photon massif, considérait les potentiels électromagnétiques comme des grandeurs physiques; il l'a écrit à deux reprises [1,2]. Sa formule [3] d'équivalence entre 4-impulsion et 4-fréquence ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4; x^4 = ict$),

$$P^i \equiv p^i - QA^i = hk^i \tag{1}$$

est illustrée par l'effet Aharonov-Bohm, de formule invariante de jauge. Montrons que, *jointe à la condition de Lorentz*,

$$\partial_i A^i = 0 \quad , \tag{2}$$

elle implique la physicalité du 4-potentiel.

La condition de Lorentz est inhérente à l'équation de Dirac et à toute équation linéaire d'onde à spin, car à son défaut, l'équation du second ordre contiendrait le champ scalaire $\partial_i A^i$ qui modifierait arbitrairement la masse propre de la particule, et altérerait sa fréquence broglienne.

Ces diverses équations linéaires sont invariantes de jauge en présence *mais pas en l'absence d'un champ électromagnétique*; montrons en effet qu'*en l'absence de champ la condition*

$$A^i \equiv 0 \tag{3}$$

est imposée.

Postulée invariante de jauge en l'absence de champ électromagnétique l'équation de Klein-Gordon a deux formes équivalentes

$$(P_i P^i + m^2)U = (p_i p^i + m^2)U = 0 \tag{4}$$

où P_i est définie par (1).

Dans la représentation quadrifréquence, qui est alors permise, le postulat d'invariance de jauge implique donc qu'on puisse échanger p^i et P^i par une transformation de Lorentz, imposant que P^i soit du genre temps et A^i du genre espace. Mais par ailleurs, dans le champ électromagnétique, imposée à l'onde plane longitudinale de jauge la condition de Lorentz $k^i A_i \equiv 0$ entraîne l'isotropie $A_i A^i \equiv 0$ du 4-potentiel, une exigence incompatible avec la précédente, sauf si $A^i \equiv 0$.

L'effet Aharonov-Bohm impose alors univoquement la jauge adhérente à la source macroscopique du potentiel; ceci, via l'interférence entre un faisceau traversant un potentiel sans champ et un faisceau de référence ne le traversant pas. *La jauge adhérente à la source est ainsi extrinsèquement imposée à toute équation linéaire d'onde à spin.*

Ce qui prouve la physicalité du 4-potentiel.

Sous sa forme initiale le principe d'invariance de jauge exprimait simplement la non-observation de forces (linéaires ou angulaires) dépendant des potentiels. *Mais l'intégrale d'une force* sur l'espace (une énergie) ou sur le temps (une impulsion) *s'exprime en termes des potentiels. Alors la condition d'intégration a un sens physique*; par exemple, l'équivalence masse-énergie d'Einstein impose la jauge de Coulomb dans le problème du rayon de l'électron.

Un cas typique qu'on va discuter est l'équilibre indifférent entre un système électrostatique et un système magnétostatique tous deux au repos dans un repère inertiel; leur mutuelle énergie est nulle, *mais non les impulsions potentielles opposées emmagasinées lors de la constitution du système total* [4,5].

2 - Moments linéaire et angulaire cachés dans un aimant.

Jouguet [6,7] nomme *magnétodynamique* l'effet suivant: un pôle magnétique R, subissant d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ une force magnétostatique $R\mathbf{B}$ subit aussi, s'il est animé d'une vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ électrique $\mathbf{E}$, une "force de Laplace" $-c^{-2}R\mathbf{v}\times\mathbf{E}$. Si donc, au sein d'un champ électrostatique $\mathbf{E}$, on varie le moment magnétique $\mathbf{M}=R\mathbf{r}$ d'un dipole, celui-ci subit une force $\mathbf{F}=c^{-2}\mathbf{E}\times\mathbf{dM}/dt$ (ues cgs).

Ainsi, plongé dans un champ électrostatique $\mathbf{E}$, un dipole de moment $\mathbf{M}$ contient une impulsion potentielle de Poynting

$$\mathbf{P}=c^{-2}\mathbf{E}\times\mathbf{M} \quad . \tag{5}$$

Si alors le champ $\mathbf{E}$ est celui d'une charge ponctuelle Q,

$$\mathbf{E}=r^{-3}Q\mathbf{r} \quad , \tag{6}$$

celle-ci contient l'impulsion potentielle

$$-\mathbf{P}=Q\mathbf{A} \tag{7}$$

opposée à la précédente,

$$\mathbf{A}=-r^{-3}\mathbf{M}\times\mathbf{r} \tag{8}$$

notant le potentiel vecteur du dipole.

L'impulsion totale du système est donc nulle comme il se doit *à condition que le potentiel vecteur soit exprimé dans la jauge adhérente à la source.*

Remplaçons alors [8] le dipole par un courant fermé d'intensité i et de moment magnétique $\mathbf{M}=i\int\int\mathbf{ds}$. Au sein du potentiel coulombien

$$V=r^{-1}Q \tag{9}$$

de la charge Q le circuit contient donc l'impulsion potentielle

$$\mathbf{P} = c^{-2} iQ \quad \mathbf{E} \times \mathbf{ds} = c^{-2} iQ \oint V \mathbf{dl} \quad ; \tag{10}$$

Notant

$$\mathbf{A} = r^{-1} i \oint \mathbf{dl} \tag{11}$$

le potentiel vecteur du courant, on vérifie à l'aide de (7) que le moment linéaire total est nul; cette fois la formule (10) est invariante de jauge, mais non la formule (7).

Proposées [8,9,10] en 1967 les formules (5) à (11) sont acceptées [11,12] comme celles du "moment linéaire caché dans un aimant".

Lorsque le courant i varie en présence de la charge Q chaque élément $i\mathbf{dl}$ subit une force déterminée. *Donc un couple est certainement appliqué soit au courant d'électrons, soit au conducteur, soit en partie à l'un et à l'autre. A valeur i donnée il existe donc certainement un moment angulaire caché dans le circuit.* Mais le postulat d'invariance de jauge s'oppose à ce qu'on l'exprime via l'équation locale

$$\mathbf{dP} = c^{-2} iQV \mathbf{dl} \quad . \tag{12}$$

Faut-il alors suivre Feynman [13] concluant qu'aucun moment angulaire n'est induit dans un aimant variant dans un champ électrique? C'est fort douteux pour la raison suivante. Varions l'intensité i d'un circuit en présence de plusieurs charges ponctuelles dont l'ensemble d'une part, le circuit de l'autre, subissent les reculs linéaires précédemment analysés. *L'ensemble des charges subissant le recul angulaire prédit à partir des formules (8) et (11), on admettra difficilement qu'en général le circuit subisse un recul linéaire mais pas de recul angulaire.* D'ailleurs la covariance relativiste s'y oppose: la conservation du barycentre est impliquée dans le problème, et les moments angulaire et barycentrique fusionnent en un moment à 6 composantes.

Remarquons que la formule de la force

$$\mathbf{dF} = c^{-2} Q \frac{di}{dt} \oint V \mathbf{dl} \tag{13}$$

engendrant l'impulsion (10) est d'un type inhabituel: elle implique le potentiel, mais un potentiel constant dans le temps. Un cas analogue existe: la force électromotrice engendrée par un flux magnétique constant Φ à travers un circuit fixe d'intensité i variable, entraînant une variation d'énergie

$$\frac{dW}{dt} = \Phi \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \oint \mathbf{Adl} \; . \tag{14}$$

A partir des remarques précédentes et des formules (13) et (14), on propose *l'hypothèse générale* suivante: *Si à une charge ponctuelle Q plongée dans un potentiel électromagnétique $(\mathbf{A}, V)$ exprimé dans la jauge adhérente à ses sources, on applique une force arbitraire engendrant l'accélération $\mathbf{r}''$, à la force d'inertie $-m\mathbf{r}''$ s'ajoute une contribution induite $Q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - c^{-2}V)\mathbf{r}''$ exprimant la réaction des sources.*

On postule en conséquence la formule générale

$$\mathbf{T}' \equiv M\mathbf{r}'' = [m + Q(-\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + c^{-2}V)]\mathbf{r}'' \tag{15}$$

conférant une physicalité au potentiel; son expression covariante sera donnée plus loin [formule (33)].

3 - Action-réaction électromagnétique selon Clausius.

Citée par Assis [14], la formule de Clausius [15] exprimant la force instantanément exercée en $\mathbf{a}$ sur une charge ponctuelle Q_a par une autre charge Q_b située en $\mathbf{b}$ est, $\mathbf{a}', \mathbf{a}''$ et $\mathbf{b}', \mathbf{b}''$ notant les vitesses et les accélérations, et $r' = dr/dt$,

$$\mathbf{F}_{ab} = Q_a Q_b [r^{-3}(1 - c^{-2}\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}')\mathbf{r} - c^{-2}(r^{-1}\mathbf{b}')'] \tag{16}$$

C'est la force de Lorentz. En effet,

$$\mathbf{A}_a = -c^{-2} r_{ab}^{-1} Q_b \mathbf{b}' \tag{17}$$

notant le potentiel vecteur créé en $\mathbf{a}$ par Q_b, le dernier terme de (16) est $Q_a \mathbf{A}'_a$; le premier terme est la somme de la force de Coulomb et de la "force d'Ampère raccourcie" qui, l'opérateur $\boldsymbol{\partial}$ opérant sur $\mathbf{A}$, engendre $Q_a \boldsymbol{\partial}(\mathbf{v}_a . \mathbf{A}_a)$. *La somme des deux termes est la force magnétique appliquée à Q_a.*

Remplaçant alors $\mathbf{F}_{ab}$ par la dérivée temporelle de l'impulsion mécanique $m_a \mathbf{a}'$, et notant $\mathbf{E}_a$ et $\mathbf{B}_a$ les champs électrique et magnétique en $\mathbf{a}$, on récrit l'équation (16) sous la forme

$$\frac{d}{dt}(m_a \mathbf{a}) = Q_a(\mathbf{E}_a + \mathbf{a}' \times \mathbf{B}_a) \tag{18}$$

Si m_a note la masse relativiste de la particule (4ème composante de l'impulsion-énergie) cette formule vaut à l'ordre c^{-2} inclus.

Non-invariante de jauge, la formule de Clausius déduit donc la force de Lorentz du potentiel vecteur (16) adhérent à la source. Réciproquement, la formule (16) de Clausius se tire de la formule de Lorentz (18) et de celle (17) du potentiel vecteur.

Ecrite sous la forme

$$\frac{d}{dt}(m_a \mathbf{a}' - Q_a \mathbf{A}'_a) = r_{ab}^{-3} Q_a Q_b (1 - c^{-2}\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}')\mathbf{r}_{ab} \tag{19}$$

la formule de Clausius exhibe l'opposition action-réaction suivant

$$d[(m_a \mathbf{a}' - Q_a \mathbf{A}'_a) + (m_b \mathbf{b}' - Q_b \mathbf{A}'_b)] = 0 \tag{20}$$

impliquant les impulsions potentielles. Rappelons qu'en magnétostatique des courants le terme en $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$ engendre la mutuelle force d'emploi familier $\pm ii' r^{-3}(\mathbf{dl} \cdot \mathbf{dl}')\mathbf{r}$.

Exprimant les potentiels vecteurs en fonction des potentiels scalaires et des vitesses suivant

$$\mathbf{A}_a = c^{-2} V_a \mathbf{b}', \quad \mathbf{A}_b = c^{-2} V_b \mathbf{a}' \quad , \tag{21}$$

usant de l'égalité

$$Q_a V_a = Q_b V_b \tag{22}$$

et échangeant les seconds termes des deux membres, on récrit (20) sous la forme

$$(m_a + c^{-2} Q_a V_a)\mathbf{a}' + (m_b + c^{-2} Q_b V_b)\mathbf{b}' = 0 \tag{23}$$

exprimant l'opposition action-réaction par l'addition d'une masse électrique potentielle à la masse mécanique; d'ordre c^{-2}, cette correction justifie rétroactivement l'emploi des formules du premier ordre (17) et (21).

L'équivalence masse-énergie est donc implicite dans l'électrodynamique prérelativiste de Clausius, comme elle l'était déjà [14] dans celle de Weber. C'est Weber qui, en 1846, définit c comme rapport des constantes des ues et des uem; Weber et Kohlrausch, mesurant en 1856 ce rapport, notent sa coïncidence avec la vitesse de la lumière.

La formule (15) précédente, ainsi que son interprétation, se trouvent ainsi confirmées.

4 - Action-réaction covariante selon Wheeler-Feynman.

Le formalisme de Clausius est l'exacte approximation prérelativiste de celui de Wheeler-Feynman [16]. Celui-ci peut être déduit des deux postulats suivants:

1° Le quadripotentiel créé en l'instant-point b^i par une charge ponctuelle Q_a d'instant-point a^i est $(r^i = b^i - a^i; r^2 = -r_i r^i)$

$$A_a^i = Q_b \int \delta(r^2) db^i \tag{24}$$

l'intégrale étant étendue à la trajectoire du genre temps; c'est le potentiel de Liénard-Wiechert semi-retardé semi-avancé adhérent à sa source.

2° L'action-réaction entre deux charges s'exprime par la 4-force d'Ampère raccourcie où les dérivées portent sur les temps propres

$$d^2 F_{ab}^i = -d^2 F_{ba}^i = dP_a'^i = -dP_b'^i = \pm Q_a Q_b \delta'(r^2) da_k db^k r_{ab}^i \tag{25}$$

où

$$P_a^i \equiv m_a a'^i - Q_a A_a^i \tag{26}$$

note *l'impulsion-énergie composée* de la charge Q_a de masse propre $m_a (a_i' a'^i = -c^2)$. Ces deux formules *correspondent* à (20) et (18).

Utilisant la 6-force de Lorentz sous la forme

$$dP_i \equiv Q[[\partial_j A_i - \partial_i A_j] dx^i + \partial_i A_j dx^j] \tag{27}$$

et retranchant $Q_a dA_a^i$ de (25), on obtient la "force de Lorentz de Wheeler-Feynman"

$$dp_a^i = Q_a Q_b \int \delta'(r^2)[r^i db^j - r^j db^i] da_j \tag{28}$$

par une procédure parallèle à celle suivie entre les équations (18) et (20). On retrouve la compatibilité entre forces de Lorentz et d'Ampère ainsi que l'opposition action-réaction (25).

Faisant jouer l'égalité

$$a'^i A_{ia} = b'^i A_{ib} \quad , \tag{29}$$

échangeant entre membres de (25) les seconds termes et définissant *l'impulsion-énergie tangentielle* d'une charge ponctuelle telle que

$$P_i T^i = T_i T^i \tag{30}$$

suivant

$$T^i = (m_0 + c^{-2} Q A_k x'^k) x'^i \tag{31}$$

on déduit de (25) l'expression alternative de l'opposition action-réaction

$$d(T_a^i + T_b^i) = 0 \tag{32}$$

Définissons alors en général *l'impulsion-énergie longitudinale composée d'une charge ponctuelle plongée dans un champ électromagnétique* par la formule

$$T^i = (m_a + c^{-2} Q_a a'_k A^k) a'^i \tag{33}$$

qui est l'expression covariante de (15).

5 - Inertie électromagnétique.

La 6-force d'inertie électromagnétique engendrant le second terme dans l'équation (33) est

$$G^{ij} = c^{-2} Q [A^i x''^j - A^j x''^i] \tag{34}$$

car

$$G^{ij} x'_j = -c^{-2} Q (A^j x' j) x''^i \tag{35}$$

Scindons alors en deux un système de charges ponctuelles. L'accélération $\mathbf{a}''$ de l'une d'entre elles appartenant, disons, au système S_1, est dûe à la force de Lorentz engendrée par la somme des deux champs B_1^{ij} et B_2^{ij}; *la précédente analyse montre qu'on peut remplacer QB_2^{ij} par QG_2^{ij} définie par (34).*

Prenant l'équation du mouvement d'une charge ponctuelle sous la forme

$$d(m_o x'^i - QA^i) = Q \partial^i A_k dx^k \tag{36}$$

on tire de ce qui précède la conclusion suivante: *A^i notant le 4-potentiel adhérent à ses sources, $Q\partial^i A^k$ est une force Ampérienne exprimant l'action-réaction entre la charge Q et les sources de A^i.*

Remarquons que la dérivation variationnelle de l'équation du mouvement se fait à partir de l'une ou l'autre des formules

$$0 = \delta \int P_i dx^i = \delta \int T_i dx^i \tag{37}$$

Deux tests du précédent énoncé sont maintenant proposés.

6 - Moment angulaire caché dans un aimant.

On propose de tester la formule (15) dans le cas spectaculaire où le potentiel électrique V est constant tout le long du circuit, ce qui a lieu notamment dans trois cas:

1° *Circuit plan de petites dimensions et charge ponctuelle à grande distance*;

2° *Circuit circulaire et charge ponctuelle située sur son axe*;

3° *Circuit plan immergé dans le potentiel constant intérieur à une sphère uniformément chargée. Ce cas extrême exhibera une action physique d'un potentiel sans champ.*

Dans les trois cas l'usage de la jauge de Coulomb est requis.

Le *moment angulaire potentiel* $\mathbf{C}$ associé à la densité linéaire d'impulsion impliquée dans (10) "cachée" dans le circuit d'aire $\mathbf{S}$ est $2i\mathbf{S}$ soit, $\mathbf{M}$ notant le moment magnétique du feuillet,

$$\mathbf{C} = 2V\mathbf{M} \tag{38}$$

Il y a donc une contribution potentielle $C/M = 2V$ au rapport gyromagnétique de l'aimant lequel, dans le cas du ferromagnétisme, vaut $-m/2e$. Comme la masse de l'électron équivaut à $511KV$, *on prédit* [17] *qu'au potentiel $V = +127,75KV$ l'effet Einstein-de-Haas sera inhibé et l'effet Barnett rendu instable.*

Comme l'effet Aharonov-Bohm, cet effet exhibe donc une action à distance d'un champ nul là où il opère, ou bien une action d'un potentiel sans champ. Plus extrémiste cependant que l'effet A.B., *cet effet mesure le potentiel lui-même.*

7 - Lévitation électrostatique.

Rappelons d'abord comment la poussée d'Archimède simule antigravité et anti-inertie.

Un petit ballon gonflé à l'hélium anti-pèse sur le plafond d'une caravane parquée, frein desserré. Si de l'intérieur on le déplace (dans la direction où la caravane peut rouler) la conservation du barycentre fait *anti-reculer* la caravane; relativement à l'ambiance la personne poussant le ballon est donc projetée *en avant*. Et si la caravane roule en accélérant, c'est *en avant* que le ballon est projeté.

Soit alors une charge ponctuelle Q de masse m immergée dans le potentiel sans champ V enclos dans une sphère (*isolante, pas* conductrice!) uniformément chargée. Si le support isolant de celle-ci repose sur le sol, la charge Q sent le champ de gravitation **g**, mais à sa masse naturelle m s'ajoute une masse induite $c^{-2}QV$. Si le signe de VQ est négatif cette charge se comportera comme le précédent ballon. Ainsi, au potentiel $+511KV$, un électron flottera en apesanteur.

Le bon sens suffit à prévoir ce phénomène: le poids d'un système électrostatique posé sur une balance contient une contribution provenant de la mutuelle énergie; si donc la charge Q est attachée à un dynamomètre, celui-ci transmettra à la sphère l'équivalant en poids de la mutuelle énergie.

Une expression alternative du phénomène emploie l'équivalent massique de la mutuelle-énergie maxwellienne, dont la répartition extérieure à la sphère dépend de la position de la charge ponctuelle.

Un tel phénomène, rappelons le, était prédit [14] par l'électrodynamique de Weber, que Helmholtz refusait pour cette raison.

Références

[1] L. de Broglie, *Recherches sur la Théorie des Quanta*, Ann. Phys. **3** 22 (1924); p. 39.
[2] L. de Broglie, C. R. Ac. Sci. **225** 163 (1947).
[3] L. de Broglie, *Optique Electronique et Corpusculaire*, Hermann, Paris 1950; p. 45-49.
[4] O. Costa de Beauregard, Found. Phys. **22** 1485 (1992).
[5] O. Costa de Beauregard, in *Advanced Electrodynamics*, T.W. Barrett et Grimes eds, World Singapore 1995; p. 77.
[6] M. Jouguet, *Traité d'Electricité Théorique*, Gauthier Villars, Paris 1968; t. III, p. 126.
[7] M. Jouguet, *Cours de Physique*, Eyrolles, Paris 1962; t.2, *Electricité*, p. 244.
[8] O. Costa de Beauregard, Phys.Lett. **A 24** 177 (1967).
[9] P. Penfield et H. Haus, *Electrodynamics of Moving Media*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1967; p. 202 et sq.
[10] W. Shockley et R.P. James, Phys. Rev. Lett. **18** 876 (1967).

[11] S. Coleman et J.H. van Vleck, Phys. Rev. **171** 1370 (1968).
[12] A.S. Goldhaber et W.P. Trower, Amer. J. Phys. **58** 429 (1990).
[13] R.P. Feynman, R.B. Leighton et M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, New York 1963; vol. 2, p. 17.5 et 27.11.
[14] A. Koch Torres Assis, *Weber's Electrodynamics*, Kluwer Acad., Dordrecht 1994; p.244-245.
[15] R. Clausius, Annalen der Physik **135** 606 (1868).
[16] J.A. Wheeler et R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **17** 157 (1945).
[17] O. Costa de Beauregard, Physics Essays (sous presse).

(Manuscrit reçu le 3 octobre 1995)