Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 21, n° 4, 1996

Algèbres de Clifford tangentes
(lien entre les transformations de coordonnées et spinorielles)
Quadriques hyper spatio-temporelles

O. Pénuisique

Les Verdonnières, Saint Macoux, F-86400 Civray

Introduction

L'analyse spinorielle a été inspirée de l'analyse tensorielle. Par exemple pour la métrique on prend la métrique hermitienne des fonctions d'ondes au lieu de la métrique d'espace temps. Avec l'usage de ces deux métriques, on peut alors définir les dérivées covariantes, ainsi que les transformations correspondantes dans les deux cas.

Ensuite on utilise simultanément ces analyses distinctes. On est alors conduit, pour une écriture dans un système de coordonnées (spatiales et spinorielles), à utiliser comme Bade et Jehle des indices latins pour les coordonnées spatiales, et des indices grecs pour les composantes spinorielles.

Le but de cet article est de lier ces points de vue en n'utilisant que la métrique spatiale : $ds^2 = g_{ik}\ dq^i\ dq^k$. A cette fin on est obligé de considérer les fonctions d'onde comme des fonctions à valeurs dans la sous algèbre paire de l'algèbre de Clifford. Ce point de vue est celui de R. Boudet et G. Gasanova.

Ce point de vue conduira "naturellement" à considérer les groupes de jauge connus comme les groupes d'invariance d'une quadrique hyper spatio-temporelle dont chaque coordonnées sera le "temps propre" S d'une particule fondamentale. Ainsi lorsque cette quadrique sera de signature (++...+), elle sera compacte, et on arrive ainsi au fait que les temps propres sont bornés ce qui est le dogme du confinement.

I - Généralités

On se fixe un espace riemannien de métrique $ds^2 = g_{ik}\ dq^i\ dq^k$. Les q^i sont quelconques $i \in [1;n]$ $n \in \mathbb{N}$. La signature de la forme quadratique n'a pas non plus d'importance.

Le principe général de construction des algèbres de Clifford est la "linéarisation" d'une forme quadratique.

Pour les algèbres de Clifford tangentes, au lieu de se placer dans un espace vectoriel quelconque on se place sur une fibre cotangente. La forme quadratique à linéariser étant le ds^2, on a[1]:

$ds^2 = (\gamma_k\ dq^k)^2$ comme $ds^2 \equiv g_{ik}\ dq^i\ dq^k$ avec $g_{ik} = g_{ik}$ on a :

$$\gamma_k\ \gamma_i + \gamma_i\ \gamma_k = 2g_{ik}$$
$$i \in [1;n] \tag{1}$$

Regardons l'effet des changements de coordonnées, soit : $dq^i = \partial_k\ q^i\ dq^{ik}$ on a $\gamma'_k\ \gamma'_i + \gamma'_i\ \gamma'_k = 2g'_{ik}$ le ds^2 étant invariant :

$$g'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha q^i \partial_\beta q^j g_{ik} \tag{2}$$

Remarquons que si l'on pose $\gamma'_k = (\partial_k q^i)\gamma_i$ (1) est compatible avec (2).

II - Changement de cartes

Supposons que g_{ik} soit de signature constante sur la variété V. Soit U_k les ouverts de recouvements de V isomorphe a des ouverts de $\mathbb{R}^n$ de métrique g_{ik}.

On peut alors définir un faisceau de fibre l'algèbre de Clifford de $\mathbb{R}^n$ de métrique g_{ik}.

On notera la restriction à l'ouvert U par $|U$.

On a ainsi $g_{ik|U}$ de même que $\gamma_{k|U}$. Remarquons que l'on peut définir les $\gamma_{k|U}$ comme combinaisons linéaires de matrices γ constantes (Verbein). Pour un autre ouvert W on a $g_{ik|W}$ et $\gamma_{k|W}$

Reste à savoir l'effet sur la restriction UnW lorsque $UnW \neq \emptyset$. Soit $q^i_{|U}$ le repère associé à U et $q^i_{|W}$ celui de W sur UnW on dispose donc de 2 repères. On a :

$$g_{ik|W} = g_{\alpha\beta|U} \partial_i q^\alpha_{|U} \partial_k q^p_{|U} \tag{3}$$

[1] les "γ" ainsi définis n'ont rien a voir avec les matrices de Dirac, peut être conviendrait-il de changer la notation.

et

$$\gamma_{k|W} = \gamma_{i|U}\partial_k q^i_{|U} \tag{4}$$

Ces formules permettent de définir $g_{ik|WnU}$ et $\gamma_{k|UnW}$

Remarquons qu'au lieu de faisceau on peut parler de fibré de fibre type algèbre de Clifford. On peut définir alors les sections.

III - Section ou faisceau de Clifford

Ces sections s'écriront :

$$S_{|U} = S^{j_1.....j_e}_{i_1.....i_q}{}_{|U}\gamma^{i_1}_{|U}.....\gamma^{i_q}_{|U}\gamma_{j_1|U}.....\gamma_{j_e|U}$$

ou plus exactement

$$S_{|U} = S_{i_1.....i_q|u}{}^{j_1.....j_e}\gamma_{i_1|U}.....\gamma_{i_q|U}\gamma^{j_1}_{|U}.....\gamma^{j_e}_{|U}$$

contrairement au fibre multilinéaire (tensoriel) les $\gamma_{|U}$ sont soumis aux relations

$$\gamma_{k|U}\gamma_{i|U} + \gamma_{i|U}\gamma_{k|U} = 2g_{ik|U}$$

et

$$\gamma^k_{|U} = g^{ik}_{|U}\gamma_{i|U}$$

$g^{ik}_{|U}$ étant l'inverse de $g_{ik|U}$ ie : $g^{ik}_{|U}g_{ke|U} = \delta^i_e$. On peut également définir une opération de contraction.

Remarquons notant T*V $\longrightarrow$ V le fibré contangent on a en notant $\otimes$ T*V$\longrightarrow$ V le fibre tensoriel un morphisme de fibré :

$$\begin{tikzcd}
T^*V \arrow[r, hook] \arrow[d] & \otimes T^*V \arrow[d] \\
V \arrow[r, equal] & V
\end{tikzcd}$$

Seulement sur chaque fibre tensorielle on peut prolonger la structure en une algèbre universelle dite algèbre tensorielle. Le passage au quotient avec les relations $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2g_{ij}$ donne le fibre de Clifford ou algèbre de Clifford tangente. Si les $g_{ij} \equiv 0$ on obtient le fibré extérieur.

Par conséquent, on voit que le fibré de Clifford offre une structure différente de l'algèbre extérieure.

IV - Connections

Remarquons qu'une connection donne exactement, dans l'algèbre tensorielle, une dérivation. On pose donc :

$$\bigtriangledown_{|U} S_{|U} S'_{|U} \equiv \bigtriangledown_{|U}(SS')_{|U} \equiv (\bigtriangledown SS')_{|U} \equiv (\bigtriangledown_{|U} S_{|U})S'_{|U} + S_{|U} \bigtriangledown_{|U} S'_{|U}$$

La différentielle absolue étant $d_{|U} S_{|U} = \partial_{|U} S_{|U} dq^i_{|U}$.

Pour garder le caractère universel de l'algèbre de Clifford on aura : $\partial_{i|U}\gamma_{k|U} = \Gamma^u_{ik|u}\gamma_{u|U}$. Une connection aura donc le caractère universel d'une dérivation $\partial_i\gamma_k = \partial_k\gamma_i, \forall ki$. [2]

Dérivant (4) par rapport à $\partial_{i|U}$ on se rend compte que les $\Gamma^u_{ik|U}$ sont exactement les symboles de Cristofell ce qui justifie la notation. En effet on a :

$$\begin{aligned}
2\partial_{k|U} g_{\alpha\beta|U} &= \gamma_{\alpha|U}(\partial_{k|U}\gamma_{\beta|U}) + (\partial_{k|U}\gamma_{\alpha|U})\gamma_{\beta|U} + \gamma_{\beta|U}(\partial_{k|U}\gamma_{k|U}) \\
&\quad + (\partial_{k|U}\gamma_{\alpha|U}) + (\partial_{k|U}\gamma_{\beta|U})\gamma_{\alpha|U} \\
&= \gamma_{\alpha|U}\Gamma^i_{k\beta|U}\gamma_{e|U} + \Gamma^j_{k\alpha|U}\gamma_{j|U}\gamma_{\beta|U} + \gamma_{\beta|U}\Gamma^j_{k\alpha|U}\gamma_{j|U} \\
&\quad + \Gamma^i_{k\beta|U}\gamma_{i|U}\gamma_{\alpha|U} \\
&= \Gamma^i_{k\beta|U}(\gamma_{\alpha|U}\gamma_{i|U} + \gamma_{i|U}\gamma_{\alpha|U}) + \Gamma^j_{k\alpha|U}(\gamma_{j|U}\gamma_{\beta|U} + \gamma_{p|U}\gamma_{j|U} \\
&= \Gamma^i_{k\beta|U} g_{\alpha i|U} + \Gamma^j_{k\alpha|U} g_{\beta j|U} \quad \text{par (4)}
\end{aligned}$$

donc $2\partial_{k|U} g_{\alpha\beta|U} g_{\alpha i|U}\Gamma^i_{k\beta|U} + g_{\beta j|U}\Gamma^j_{k\alpha|U}$ ce qui est le système d'équations donnant les symboles de Christoffel.

Soit $\alpha_{|U} = \alpha^i_{|U}\gamma_{i|U}$ les $\alpha^i_{|U}$ étant des fonctions scalaires. (champs scalaires)

$$\begin{aligned}
\partial_{i|U}\alpha_{|U} &= (\partial_{i|U}\alpha^j_{|U})\gamma_{j|U} + \alpha^j_{|U}\Gamma^k_{ij|U}\gamma_{k|U} \\
&= (\partial_i\alpha^j_{|U} + \Gamma^j_{ik|U}\alpha^k_{|U})\gamma_{j|U}
\end{aligned}$$

Plus généralement les composantes $S_{i_1.....i_{q|U}}{}^{j_1.....j_e}$ de $S_{|U}$ se "dérivent" comme les composantes d'un tenseur.

---

[2] Cette condition, dite d'intégrabilité, indique, suivant le point de vue, la torsion nulle d'un espace riemannien, ou le théorème de Schwarz sur la commutativité des déruvées, ou encore une condition de cyclicité dans une homologie ad hoc.

Remarquons qu'alors $\partial_{i|U_{|w}} - \partial_{i|w_{|U}} \neq 0$: la différence étant précisément de termes de potentiels.

Ainsi les potentiels apparaissent lors des changements de cartes. Une variété à une carte est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ il n'y a donc pas de potentiels.

V - Fonctions d'onde. Représentations

On construit le fibré des fonctions d'onde comme étant le sous fibre du fibré de Cliffford de fibre type la sous algèbre paire. Une section fonction d'onde s'écrit alors :

$$\Psi_{|U} := \varphi_{i_1.....i_{q|U}}{}^{j_1.....j_l}\gamma_{i_{1|U}}.....\gamma_{i_q|U}\gamma^{j1}_{|U}.....\gamma^{j_l}_{|U} l+q=2k \ k\in\mathbb{N}$$

Reste alors à écrire les $\varphi_{i1.....i_q}{}^{j1.....je}$ sous forme d'un hyperspineur à une colonne.

On suit une méthode inspirée de G. Casanova et Bennet et Tucker localisée sur un ouvert U. La forme quadratique sera d'abord de signe (++.....+).

Soit donc : $\Phi^+_n(q) = \sum_{i=1}^n (q^i_{|U})^2$ on a : $\Phi^+_{n+1} = (q^{n+1)^2} + \Phi^+_n$ notant $a^k_+(n)$ les générateurs de l'algèbre de Clifford de Φ^+_n on pose:

$$a^{n+1}_+(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a^k_+(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & a^k_+(n) \\ a^k_+(n) & 0 \end{pmatrix} \quad k\le n$$

de même pour Φ^-_n

$$a^{(n+1)}_-(n+1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad a^k_-(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & a^k(n) \\ a^k(n) & 0 \end{pmatrix} \quad k\le n$$

les a_- étant antihermitiques a_+ étant hermitiques. Remarquons qu'avec une forme $(+--+.....-+---+.....)$ on a :

$$a^{n+1}_\pm(n+1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\mp i & i\pm i \\ -(i\pm i) & -(i\mp i) \end{pmatrix}$$

et

$$a^k(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & a^k(n) \\ a^k(n) & 0 \end{pmatrix} k\le n$$

soit u_{n+1} un vecteur unicolonne définit par récurrence par : $u_{n+1} = \begin{pmatrix} u_n \\ 0 \end{pmatrix}$ le spineur unicolonne sera définit par : $\varphi_{|u} = \Psi \cdot |u - u_n$

$$\Psi_{|u} = \varphi_{i_1.....i_{2k}} a^{i_1}(n).....a^{i_{2k}}(n)$$

Les $\varphi_{i1.....i2k}$ étant 2^{n-1} nombres réels formant les composantes de Ψ. Cette transformation $\Psi_{|u} \longrightarrow \varphi_{|u}$ est linéaire. Si $n = 1$ l'algèbre de Clifford est de dimension 2 l'algèbre pair de dimension 1 donc si c_1 est un élément de l'algèbre de Clifford.$c_1 u_1 = 0 \longrightarrow c_1 = 0$ on prendra $u_1 = 1$. et c_1 sera vu comme un nombre complexe.

Supposons donc que $c_n u_n = 0 \longrightarrow c_n = 0$ soit c_{n+1} il s'écrit sous forme matricielle

$$c_{n+1} = \begin{pmatrix} ic'_n & c_n \\ c_n & ic'_n \end{pmatrix}$$

ou

$$c_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & c_n + ic'_n \\ c_n + ic'_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{n+1} u_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ (c_n + ic'_n) u_n \end{pmatrix}$$

ou

$$c_{n+1} u_{n+1} = \begin{pmatrix} ic'_n u_n \\ c_n u_n \end{pmatrix}$$

dans le premier cas l'algèbre de Clifford étant prise sur les réels on a : $c_n u_n = 0$ et $c'_n u_n = 0$ (dans le second c'est clair) et donc par recurrence $c_n = c'_n \to c_{n+1} = 0$.

Comme les dimensions correspondent on a un isomorphisme entre les spineurs complexes unicolonnes à 2^{n-2} lignes et les algèbres paires de dimensions 2^{n-1}.

VI - Transformations spinorielles

Si n est pair l'algèbre de Clifford est simple (Bennet et Tucker). D'après le théorème de Skolem-Noether, comme sur UnW les $\gamma_{i|u}$ se changent en $\gamma_{k|u}$: ils induisent un automorphisme, tout automorphisme peut se déduire d'un automorphisme intérieur : donc $\gamma_{i|u} = \Lambda_u^w \gamma_{i|v} \Lambda_u^{w-1}.\Lambda_u^w$ joue donc le même rôle qu'une transformation spinorielle, de plus, au niveau des fonctions d'ondes elle est exactement une invariance de jauge.

VII - Quadrique hyper spatio temporelle

Métrique fondamentale : considérons n particules chacune ayant son espace temps propre. Son temps correspondant à son temps de vie (dans le cas des vitesses faibles par rapport à la lumière), les trois coordonnées d'espace correspondent à sa localisation dans un repère o, x, y, z. Remarquons que cet hyperespace a 4n dimensions donc est de dimension paire pour n'importe quel nombre de particules. On pose alors pour la métrique fondamentale :

$$ds^2 : G_{rs} g_{ik} dq^1(r) dq^k(s)$$

ik variant de 0 à 3 et r et s de 1 à n.

Les g_{ik} définissant la métrique spatio-temporelle usuelle.

Posons ${}^t dq(r) = (dq^0(r), dq^1(r), dq^2(r), dq^3(r))$ et $g = [g_{ik}]$ la métrique ci-dessus s'écrit :

$$ds^2 = G_{rs} {}^t dq(r) g dq(s)$$

G_{rs} symétrique rs variant de 1 à n.

Si l'espace temps est quasi plat soit ${}^t\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,) \gamma_i$ matrices de Dirac. Soit donc :

$$ds^r =^t \gamma dq(r)$$

on a :

$$ds^r ds^s = {}^t dq(r) g dq(s)$$

et donc :

$$ds^2 = G_{rs} ds^r ds^s$$

par analogie on peut prendre s^r comme temps propre de la r-ème particule.

Dans ce cas l'algèbre de Clifford sera l'algèbre produit tensoriel de l'algèbre de Clifford de l'espace temps avec une algèbre de Clifford d'un espace de dimension n (dont les générateurs seront notés $a_1 .....a_n$ et $a_r a_s + a_s a_r = 2G_{rs}$). En effet, calculons donc $[a_r \gamma_k dq^k(r)]^2$

$$[a_r \gamma_k dq^k(r)]^2 = a_r \gamma_k a_s \gamma_i dq^k(r) dq^i(s) = a_r a_s \gamma_k \gamma_i dq^k(r) dq^i(s)$$

par définition de l'algèbre $\otimes$, produit tensoriel des algèbres.

$$[a_r \gamma_k dq^k(r)]^2 = \underbrace{a_r a_s [\gamma_k \gamma_i dq^k(r) dq^i(s)}_{k<i} + \gamma_i^2 dq^i(r) dq^i(s) + \underbrace{\gamma_k \gamma_i dq^k(r) dq^i(s)]}_{k>i}$$

$$= g_{ii}a_{rs}a_s dq^i(r)dq^i(s) + a_r^2[\underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(r)}_{k<i} + \underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k>i}]$$

$$+ \underbrace{a_r a_s}_{r>s}[\underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k<i} + \underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k>I}]$$

$$+ \underbrace{a_r a_s}_{r>s}[\underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k<i} + \underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k>i}]$$

$$= g_{ii}a_r a_s dq^i(r)dq^i(s) + 2a_r^2 g_{ik}dq^k(r)dq^i(r)$$

$$+ \underbrace{(a_r a_s)}_{r<s}[\underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k<i} + \underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(r)dq^i(s)}_{k>i}$$

$$+ \underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(s)dq^i(r)}_{k<i} + \underbrace{\gamma_k\gamma_i dq^k(s)dq^i(r)}_{k>i}]$$

$$[a_r\gamma_k dq^k(r)]^2 = g_{ii}a_r a_s dq^i(r)dq^i(s) + \underbrace{2a_r^2 g_{ik}dq^k(r)dq^i(s)}_{k<i} +$$

$$+(a_r a_s)[2g_{ik}dq^k(r)dq^i(s) + 2g_{ki}dq^k(r)dq^i(s)]$$

$$= g_{ii}a_r a_s dq^i(r)dq^i(s)$$

$$= g_{ii}G_{rs}dq^i(r)dq^i(s)$$

car la métrique est quasi plate.

Seuls les coefficients G_{rs} ont de l'influence. Et donc $[a_r\gamma_k dq^k(r)]^2 = ds^2$.

Définissons donc l'hyperquadrique : nous prendrons s^k comme temps propre de la keme particule et s^0 comme un paramètre. Soit A une matrice symétrique d'ordre n on définit cette hyperquadrique par $s^2 + {}^t\vec{u}A\vec{u} = r_0^2$ la métrique induite dans $\mathbb{R}^{n+1}$ sera $ds^2 = (ds^0)^2 +^t duAdu$ avec ${}^t\vec{u} = (s^1, s^2, ..., s^n)$ et $d^tu = (ds^1.....ds^n)$.

Cette quadrique est une variété riemanienne de dimension n (en les s^i) et il faut au moins deux cartes locales pour pouvoir la représenter.

VIII - Premier système de cartes (projection stéréographique)

$$U^+ = g^+(u) = \frac{\vec{u}}{1 \mp \sqrt{1 - \frac{{}^tuAu}{r_0^2}}}$$

$$U^{-} = g^{-}(u) = \frac{\vec{u}}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{{}^t\vec{u}Au}{r_0^2}}}$$

Posons

$$H = [1 + \frac{{}^tUAU}{r_0^2}]^{-1}$$

$$\vec{u} = 2HxU = F(U) = 2UH$$

$$g^{\pm}oF(\vec{U}) = \frac{2U}{1 + \frac{{}^tUAU}{r_0^2} \pm \left|1 - \frac{{}^tUAU}{r_0^2}\right|}$$

$$U^{\pm} = \frac{r_0^2 U^{\mp}}{{}^tU^{\mp}AU^{\pm}}$$

Cette dernière formule étant le changement de cartes il est clair que cette fonction est involutive.

Un calcul montre que

$$ds^2 = 4H^2[d^tUAdU + \frac{12H}{r_0^2}({}^tUAdU)^2]$$

Si ${}^tUAU \ll r_0^2$ on a $H \simeq 1$ et $({}^tUAdU)^2 \ll r_0^{2t}dUAdU$ et donc $ds^2 \simeq 4d^tUAdU$ on voit alors A ne renferment que des constantes (les G_{rs} sont constants) et l'espace est plat.

Autrement dit les n particules forment un espace plat pour les U petits devant r_0, elles sont donc libres à petite distance. C'est la liberté asymptotique. r_0 est donc le rayon nucléaire voisin du fermi et le temps nucléaire $\frac{r_O}{c}$ est de l'ordre de 10^{-23} secondes.

A très grande distance $\frac{tUAU}{r_0^2} \gg 1$ $H \ll 0$ et donc $ds^2 \simeq 0$. L'effet maximum se produira pour ${}^tUAU \simeq r_0^2$. Dans ce cas les deux cartes locales se recouvrent. Notons W^+ et W^- les ouverts correspondants les dérivées $\partial_{i|W^+_{|W^-}} - \partial_{i|W^-_{|W^+}} \neq O$ et même $\gg 0$ dans ce voisinage c'est là ou on a un maximum de potentiel (potentiel nucléaire).

Remarque : ici localement $\partial_{i|W\pm}$ s'écrivent $\partial_{i|W\pm} = \gamma^k \frac{\partial}{\partial q^{k(i)}}$. Pour un autre système de cartes les choses sont encore plus étranges.

IX - 2ème système de cartes (angles d'Euler)

On a toujours $(s^0)^2 +^t uAu = r_O^2$ et $(ds^0)^2 +^t duAdu = ds^2$ on pose ${}^tW = (s^0, s^1....., s^n)$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ${}^tdw = (ds^0, ds^1, ds^2, ..., ds^n)$ on obtient alors : ${}^twSw = r_0^2$ et ${}^tdwSdw = ds^2$.

Remarquons que S est symétrique. On peut, suivant la signature de la forme quadratique définie par S, et par le procédé d'orthonormalisation de Graham Schmidt trouver une base de vecteurs constants : $e_{n+1}, e_n, ..., e_1$ tels que $t_{ei}S_{ej} = (\pm 1)\delta_i^j$ le $\pm$ dépendant de la norme du vecteur suivant la signature.

Supposons par récurrence l'existence d'une suite w_i de vecteurs tels que ${}^tw_isw_i = r_0^2$ et w_i combinaison linéaire de $e_i, e_{i-1}, ...e_1$ les w_i étant définis par : $w_{i+1} = \alpha r_0 e_{i+1} + \beta w_i$ on a donc ${}^tw_{i+1}S_{W_{i+1}} = r_0^2$ par l'hypothèse de récurrence et donc

$$ {}^t(\alpha r_0 e_{i+1} + \beta w_i)S(\alpha r_0 e_{i+1} + \beta w_i) = r_0^2\alpha^2 S_{e_{i+1}} + \beta^{2t} w_i S w_i = r_0^2[\pm\alpha^2 + \beta^2] $$

car e_{i+1} et w_i sont orthogonaux et $tw_isw_i = r_0^2$ et donc $1 = \beta^2 \pm \alpha^2$ suivant le signe de la norme de e_{i+1} on posera donc : $C(\varphi_{i+1}) = \beta$ et $S(\varphi_{i+1}) = \alpha$ avec la convention :

$$ \begin{cases} C(\varphi_{i+1} = \cos\varphi_{i+1} \\ S(\varphi_{i+1} = \sin\varphi_{i+1} \end{cases} \quad \text{si} \quad \{ {}^te_{i+1}Se_i = 1 $$

et

$$ \begin{cases} C(\varphi_{i+1}) = ch\varphi_{i+1} \\ S(\varphi_{i+1}) = sh\varphi_{i+1} \end{cases} \quad \text{si} \quad \{ {}^te_{i+1}Se_{i+1} = -1 $$

donc

$$ w_{i+1} = r_0 S(\varphi_{i+1})e_{i+1} + C(\varphi_{i+1})w_i $$

et

$$ \begin{aligned} {}^tdw_{i+1}Sdw_{i+1} = \\ & {}^t(\pm r_0 C(\varphi_{i+1})d\varphi_{i+1}e_{i+1} \pm S(\varphi_{i+1})d\varphi_{i+1}w_i + C(\varphi_{i+1})dw_i)S(\quad) \\ & = {}^t[\pm d\varphi_{i+1}[r_0C(\varphi_{i+1})e_{i+1} + S(\varphi_{i+1})w_i] + C(\varphi_{i+1})dw_i]S[\quad] \end{aligned} $$

les e_k étant orthogonaux ${}^te_{i+1}sw_i = 0$ d'autre part les e_k étant constants dw_i est une combinaison linéaire des $e_i, e_{i-1}, ...e_1$ donc ${}^te_{i+1}Sdw_i = 0$.

Dautre part puisque ${}^t w_i S w_i = r_0^2$ on a $2\,{}^t w_i S dw_i = 0$ car S et r_0 sont constants donc

$$
\begin{aligned}
{}^t dw_{i+1} S dw_{i+1} &= r_0^2 d\varphi_{i+1}^2 [\pm C^2(\varphi_{i+1}) + S^2(\varphi_{i+1})] + C^2(\varphi_{i+1})\,{}^t dw_i S dw_i \\
&= \pm r_0^2 d\varphi_{i+1}^2 + C^2(\varphi_{i+1})\,{}^t dw_i S dw_i
\end{aligned}
$$

donc en résumé :

$$w_{i+1} = r_0 S(\varphi_{i+1}) e_{n+1} + C(\varphi_{i+1}) w_i$$

$${}^t dw_{i+1} S dw_{i+1} = \pm r_0^2 d\varphi_{i+1}^2 + C^2(\varphi_{i+1})\,{}^t dw_i S dw_i$$

On a pour vecteur w en fait w_{n+1} et par récurrence :

$$ds^2 = r_0^2 \sum_{k=1}^{n} (\pm) \prod_{e=k+1}^{n} C(\varphi_i)^2 d\varphi_k^2$$

en posant $\prod_{e=n+1}^{n} C(\varphi_i)^2 = 1$ et ${}^t w S w = r_0^2$.

Remarquons qu'un groupe d'isométrie opère sur cette quadrique: c'est $O(S)$ qui opère également sur les coefficients du ds^2 par les angles φ_i (angles d'Euler). Remarquons qu'il y a différents domaines de cartes. De pus si S est de signature (+++.....++) les $C(\varphi_i)$ sont des $\cos\varphi_i$ les domaines de cartes sont $[0, 2\pi[\times[0, \pi[^{n-1}$. Remarquons que n'importe quel intervalle translaté (mais de même rayon) convient. Nous obtenons donc différentes cartes. Le groupe $O(S)$ modifiant les angles φ_i fait passer d'une carte à une autre et fait donc apparaître différents potentiels. Remarquons que ce phénomène est analogue à l'invariance de jauge.

Remarquons ensuite que l'action de $O(S)$ est un changement de coordonnées, qui induit d'après le paragraphe 6 une transformation spinoriele et cela de manière naturelle (homomorphisme).

Par conséquent, les groupes de jauge pourraient être les groupes d'invariance de quadriques dont les degrés de liberté seraient le temps propres de certaines particules.

Remarquons encore que si S est de signature positive (quadrique compacte) on a une périodicité aux niveaux des angles. Autrement dit le comportement est similaire modulo des périodes. On a une structure de revêtement. Les fibres étant discrètes elles doivent correspondre à certains types de générations de particules. En fait, même si la signature de la quadrique est quelconque on a la symétrie des angles $\varphi_i \longrightarrow -\varphi_i$. On a donc déjà un revêtement à 2 feuillets. Il serait séduisant de considérer un des feuillets comme leptons l'autre comme des quarks. De plus ici, vu que l'on se place dans une algèbre de Clifford, produit tensoriel des algèbres de Clifford spatio-temporlles avec une autre, on ne considère que des particules de Spins demi entiers.

Remarquons enfin que si $\varphi_i \ll \pi$, $C(\varphi_i) \simeq 1$ et $ds^2 \simeq r_0^2 \sum \pm d\varphi_i^2$ l'espace est plat dans le cas d'une dimension indépendante $ds^2 = r_0^2 d\varphi^2$ donc on a $s = r_0\varphi$ et $s_i = r_0\varphi_i$. Si $\varphi_i \ll \prod \frac{s_i}{r_0} \ll 1$ et l'espace est quasi plat. On réobtient la liberté asymptotique.

X - Conclusion

Soit $\nabla_i(r)$ les différentes "dérivées". L'équation de Dirac s'écrit :

$$[a^r\gamma^i\nabla_i(r) + \frac{\sqrt{-1}m_0c}{\hbar}]\Psi = 0 \longrightarrow [\gamma^i(a^r\nabla_i(r)) + \sqrt{-1}\frac{m_0c}{\hbar}]\Psi = 0$$

posant$D_i = a^r\nabla_i(r)$ on a

$$[\gamma^i D_i + \sqrt{-1}\frac{m_0c}{\hbar}]\Psi = 0$$

d'autre part on peut considérer au lieu des $a^r\gamma^i\nabla_i(r)$ les $a^r\frac{\partial}{\partial S^r}$ dérivées des temps propres. On a $[a^r\frac{\partial}{\partial S^r} + \sqrt{-1}\frac{m_0c}{\hbar}]\Psi = 0$ équation en valeur propre m_0 ce qui donne les masses propres des différentes particules.

Remarquons que ces équations sont invariantes par les transformations de Lorentz. La données d'une quadrique permet de définir le dogme de confinement d'introduire un rayon r_0, de démontrer la liberté asymptotique, d'introduire des groupes de jauge comme invariant de cette quadrique.

Remarquons que l'on pourrait pour définir le dogme de confinement et un rayon r_0 voire même la liberté asymptotique introduisant n'importe quelle variété compacte muni d'un ds^2. Seulement les groupes d'invariance (ceux des translations) ne seraient pas sensés avoir une structure aussi simple que les groupes orthogonaux.

De plus, c'est par changement de cartes que les potentiels apparaissent : d'où l'importance des conditions globales (ou invariances topologiques).

Remarquons également que ces conditions apparaissent dans l'effet Abramov Bohm et dans l'existence de monopoles magnétiques.

Le choix de la quadrique se fait également par volonté de simplicité (la sphère est le 1^{er} exemple de variété) notamment pour le calcul des G_{ik}.

Les représentations des groupes de jauge apparaissent alors naturellement par la considération de l'algèbre de Clifford associée.

Références

[1] Pour le théorème de Skolem-Noether : A. Blanchard 1972 Les corps non communatifs (Puf)

[2] Pour l'analyse spinorielle et les spineurs : Bade et Jehle 1953 An introduction to spinors Reviews of modern physic - Benn et Tucker 1987 An introduction to spinors and geometric with application in physics (Adam Hilger)

[3] Pour le point de vue des fonctions d'ondes comme élément d'algèbre paires : A. Boudet 1974 CRAS t278 Série A p1063 - G. Casanova 1975 CRAS t280 Série A p299 - G. Casanova 1976 L'algèbre vectorielle (Puf que sais-je n1657)

[4] Sur linvariance de jauge, l'effet Abramov Bohm, la topologie, les monopoles : L.H. Ryder 1985 Quantum field theory (Cambridge Univeristy Press)

[5] Sur les fibres et les connections : Chen-Ning Yang 1977 magnetic monopoles, fiber bundles and gauge field A. NY AS Vol 294 - D. Husemolker 1976 Fibre bundles (GTM) (2ème édition) - M. Nakahara 1990 Geometry topology and physics (Adam Hilger)

(Manuscrit reçu le 14 mars 1995)