Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli

C. Daviau

Fondation Louis de Broglie
23, Quai de Conti 75006 Paris

RÉSUMÉ. L'équation de Dirac a d'abord été écrite à l'aide de matrices 4×4, puis avec l'algèbre d'espace-temps. On l'écrit ici dans l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ engendrée par les matrices de Pauli. L'équation d'onde obtenue est équivalente à l'équation de Dirac, linéaire ou non linéaire. On explicite ensuite l'invariance relativiste de l'équation, son formalisme lagrangien, les tenseurs et leurs relations. Puis on met en évidence deux nouveaux groupes d'invariance, non apparents dans le formalisme classique.

ABSTRACT. The Dirac equation was first written with some 4×4 matrices, next with the spacetime algebra. We translate here this equation into the $M_2(\mathbb{C})$ algebra generated by the Pauli matrices. The wave equation is equivalent to the Dirac equation, linear or non-linear. We explain next the relativistic invariance, the Lagrangian formalism, the tensors and their relations. And we seek two new invariance groups, hiden with the classical formalism.

Introduction.

L'équation de Dirac est usuellement écrite [1] :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = 0 \quad ; \quad q = \frac{e}{\hbar c} \quad ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \qquad (1)$$

où e, négatif, est la charge de l'électron et les A_μ sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. L'onde ψ est une fonction des coordonnées d'espace-temps à valeur dans $\mathbb{C}^4$ et l'on utilisera ici :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}; \quad \gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on utilise ces matrices, l'équation de Dirac est équivalente au système d'équations :

$$\begin{aligned}
&i[\partial_0\psi_1 + (\partial_1 - i\partial_2)\psi_4 + \partial_3\psi_3] \\
&\quad = m\psi_1 + q[A_0\psi_1 + (A_1 - iA_2)\psi_4 + A_3\psi_3) \\
&i[\partial_0\psi_2 + (\partial_1 + i\partial_2)\psi_3 - \partial_3\psi_4] \\
&\quad = m\psi_2 + q[A_0\psi_2 + (A_1 + iA_2)\psi_3 - A_3\psi_4) \\
&i[\partial_0\psi_3 + (\partial_1 - i\partial_2)\psi_2 + \partial_3\psi_1] \\
&\quad = -m\psi_3 + q[A_0\psi_3 + (A_1 - iA_2)\psi_2 + A_3\psi_1) \\
&i[\partial_0\psi_4 + (\partial_1 + i\partial_2)\psi_1 - \partial_3\psi_2] \\
&\quad = -m\psi_4 + q[A_0\psi_4 + (A_1 + iA_2)\psi_1 - A_3\psi_2)
\end{aligned} \tag{3}$$

En utilisant l'algèbre de Clifford d'espace-temps, Hestenes [2 à 8] a mis l'équation de Dirac sous la forme :

$$\partial\Psi\gamma_{21} = m\Psi\gamma_0 + qA\Psi$$

$$\partial = \gamma^\mu\partial_\mu \ ; \quad A = \gamma^\mu A_\mu \ ; \quad \gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j \tag{4}$$

où Ψ est une fonction de l'espace-temps à valeur dans la sous-algèbre paire de l'algèbre d'espace-temps, c'est à dire s'écrit :

$$\Psi = \underline{a} + \underline{b}\gamma_{10} + \underline{c}\gamma_{20} + \underline{d}\gamma_{30} + \underline{e}\gamma_{21} + \underline{f}\gamma_{23} + \underline{g}\gamma_{13} + \underline{h}\hat{i} \ ; \quad \hat{i} = \gamma_{0123} = i\gamma_5 \tag{5}$$

où les $\underline{a}, ..., \underline{h}$ sont des fonctions à valeur réelle de l'espace-temps. Pour établir l'équivalence entre la forme (4) et la forme (1) de l'équation de Dirac, il suffit d'utiliser la représentation matricielle (2) de cette algèbre de Clifford, ce qui donne pour Ψ:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\overline{\psi}_2 & \psi_3 & \overline{\psi}_4 \\ \psi_2 & \overline{\psi}_1 & \psi_4 & -\overline{\psi}_3 \\ \psi_3 & \overline{\psi}_4 & \psi_1 & -\overline{\psi}_2 \\ \psi_4 & -\overline{\psi}_3 & \psi_2 & \overline{\psi}_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\psi_1 = \underline{a} + i\underline{e} \ ; \quad \psi_2 = -\underline{g} - i\underline{f} \ ; \quad \psi_3 = \underline{d} + i\underline{h} \ ; \quad \psi_4 = \underline{b} + i\underline{c}$$

En écrivant l'équation (4) avec la représentation matricielle (2), on obtient un système de huit équations, dont quatre sont les équations (3), les quatre autres étant exactement les complexes conjuguées de ces quatre équations [9]. En ce sens les deux formes de l'équation de Dirac sont équivalentes. Néanmoins les tenseurs de la théorie de Dirac s'y présentent différemment :

$$\begin{array}{cc}
\text{Forme classique} & \text{Algèbre-d'espace-temps} \\
\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 & \tilde{\Psi} = \gamma_0 \Psi^\dagger \gamma_0 \\
\Omega_1 = \overline{\psi}\psi & \Psi\tilde{\Psi} = \Omega_1 + \Omega_2 \hat{i} \\
\Omega_2 = -i\overline{\psi}\gamma_5\psi & \\
J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi & J = \gamma^\mu J_\mu = \Psi\gamma_0\tilde{\Psi} \\
K^\mu = -\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi & K = \gamma^\mu K_\mu = \Psi\gamma_3\tilde{\Psi} \\
S^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi & S = \sum_{\mu<\nu} \gamma^{\mu\nu} S_{\nu\mu} = \Psi\gamma_{21}\tilde{\Psi}
\end{array} \tag{7}$$

Lorsque les invariants relativistes Ω_1 et Ω_2 ne sont pas tous deux nuls, on définit l'angle β d'Yvon-Takabayasi par :

$$\Omega_1 = \rho\cos\beta \ ; \quad \Omega_2 = \rho\sin\beta \tag{8}$$

Et l'on peut écrire :

$$\Omega_1 + \Omega_2\hat{i} = \rho e^{\beta\hat{i}}$$

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2}\hat{i}} R \ ; \quad R\tilde{R} = 1 \tag{9}$$

Donc si ρ n'est pas nul, il existe un élément pair R, défini à un signe près par (9). R est un élément du groupe spinoriel de recouvrement du groupe de Lorentz orthochrone, que l'on appelle souvent rotation de Lorentz par abus de langage. R permet de définir une base orthonormée mobile liée à l'onde, (e_μ), telle que :

$$e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R} \ ; \quad J = \rho e_0 \ ; \quad K = \rho e_3 \ ; \quad S = \rho e^{\beta\hat{i}} e_2 e_1 \tag{10}$$

Si l'on utilise la représentation matricielle (2), on obtient à partir de (7) :

$$\det\Psi = {\Omega_1}^2 + {\Omega_2}^2 = \rho^2 \tag{11}$$

L'existence de deux formalismes différents pour la théorie de Dirac pose de nombreuses questions. Y a-t-il d'autres formalismes possibles

? Nous allons voir ici que c'est le cas. Les deux formalismes sont-ils complètement équivalents ? Il semble que non, car ψ et Ψ se transforment de manière différente sous une rotation de Lorentz [10] et il en résulte que seule une des deux versions est la bonne au sens de la physique relativiste. Dans le formalisme d'Hestenes, pourquoi Ψ est-il seulement à valeur paire ? On pourrait s'attendre à ce que Ψ ait ses valeurs dans toute l'algèbre, et non pas seulement dans la sous-algèbre paire. Mais si l'on prend pour Ψ un élément quelconque, on ne peut plus définir simplement l'angle β , on n'a plus (9) ni (11), etc.

Or la sous-algèbre paire d'espace-temps est isomorphe à l'algèbre de Clifford d'espace dont une représentation matricielle est l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes. Cette algèbre est engendrée par les matrices σ_j de Pauli, elle est de dimension 4 sur $\mathbb{C}$ et 8 sur $\mathbb{R}$. Puisque Ψ est seulement à valeur paire, c'est que l'on peut se restreindre à l'algèbre d'espace, ou à $M_2(\mathbb{C})$, ainsi que nous allons le montrer maintenant. Avec (6) et (7) nous avons :

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 + i\Omega_2 \\
&= \psi_1\overline{\psi}_1 + \psi_2\overline{\psi}_2 - \psi_3\overline{\psi}_3 - \psi_4\overline{\psi}_4 + i^2(\psi_1\overline{\psi}_3 + \psi_2\overline{\psi}_4 - \psi_3\overline{\psi}_1 - \psi_4\overline{\psi}_2) \\
&= \underline{a}^2 + \underline{e}^2 + \underline{g}^2 + \underline{f}^2 - \underline{d}^2 - \underline{h}^2 - \underline{b}^2 - \underline{c}^2 + 2i(\underline{ah} + \underline{bf} - \underline{cg} - \underline{de}) \\
&= (\underline{a} + i\underline{h})^2 + (\underline{e} - i\underline{d})^2 + (\underline{f} + i\underline{b})^2 + (\underline{g} - i\underline{c})^2
\end{aligned} \tag{12}$$

Posons :

$$u = \underline{a} + i\underline{h}\ ; \quad v = \underline{f} + i\underline{b}\ ; \quad w = \underline{c} + i\underline{g}\ ; \quad t = \underline{d} + i\underline{e} \tag{13}$$

$$\phi_1 = u + w\ ; \quad \phi_2 = t + v\ ; \quad \phi_3 = t - v\ ; \quad \phi_4 = u - w \tag{14}$$

On obtient alors :

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = u^2 - t^2 + v^2 - w^2 = \phi_1\phi_4 - \phi_2\phi_3 \tag{15}$$

On est donc amené à considérer la matrice :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_3 \\ \phi_2 & \phi_4 \end{pmatrix} \tag{16}$$

qui vérifie :

$$\det \phi = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta} \tag{17}$$

Donc ϕ est inversible si et seulement si ρ est non nul.

Pour obtenir l'équation d'onde de ϕ , on part du système (3) dans lequel on introduit les parties réelles et imaginaires $\underline{a}, ..., \underline{h}$. Ceci donne un système de 8 équations. Puis on utilise (13) et (14) et l'on obtient un système de 4 équations. On montre dans l'appendice A que l'on obtient alors l'équation :

$$(\partial_0+\sigma_2\partial_1+\sigma_3\partial_2+\sigma_1\partial_3)\phi+m\sigma_2\overline{\phi}\sigma_3+iq(A_0+\sigma_2A_1+\sigma_3A_2+\sigma_1A_3)\phi\sigma_1 = 0 \tag{18}$$

On utilisera ici les notations suivantes :

$$\nabla = \partial_0 + \vec{\partial} \; ; \quad \vec{\partial} = \sigma_2\partial_1 + \sigma_3\partial_2 + \sigma_1\partial_3$$

$$A = A_0 - \vec{A} \; ; \quad \vec{A} = A^1\sigma_2 + A^2\sigma_3 + A^3\sigma_1 \tag{19}$$

Et l'équation d'onde (18) s'écrit :

$$\nabla\phi + (m\sigma_2\overline{\phi}\sigma_2 + qA\phi)i\sigma_1 = 0 \tag{20}$$

Posons maintenant :

$$\phi^* = \sigma_2\overline{\phi}\sigma_2 \; ; \quad \nabla^* = \sigma_2\overline{\nabla}\sigma_2 \; ; \quad A^* = \sigma_2\overline{A}\sigma_2 \tag{21}$$

On obtient alors

$$\phi^* = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_4 & -\overline{\phi}_2 \\ -\overline{\phi}_3 & \overline{\phi}_1 \end{pmatrix} \; ; \quad \nabla^* = \partial_0 - \vec{\partial} \; ; \quad A^* = A_0 + \vec{A} \tag{22}$$

$$\nabla\nabla^* = {\partial_0}^2 - \vec{\partial}^2 = \Box \; ; \quad AA^* = {A_0}^2 - \vec{A}^2 = A \cdot A$$

Aussi peut-on mettre l'équation d'onde sous la forme :

$$\nabla\phi i\sigma_1 = m\phi^* + qA\phi \tag{23}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Dirac (1) : à toute solution de l'une on peut associer une solution de l'autre et inversement. On obtiendra donc les mêmes résultats, dans le cas des ondes planes ou de l'atome d'hydrogène. Nous allons examiner quelques aspects de la théorie de Dirac, en les transposant dans le formalisme des matrices 2×2.

Equation du second ordre.

On obtient au second ordre :

$$\nabla^*(\nabla\phi i\sigma_1)i\sigma_1 = \nabla^*(m\phi^* + qA\phi)i\sigma_1$$

$$-\ \Box\phi = m\nabla^*\phi^* i\sigma_1 + q\nabla^*(A\phi)i\sigma_1 \tag{24}$$

Or on a :

$$\nabla^*\phi^* i\sigma_1 = m\phi + qA^*\phi^* \tag{25}$$

$$\nabla^*(A\phi) = \nabla^*\dot{A}\phi + \nabla^*A\dot{\phi}$$

où les points indiquent sur quoi portent les dérivations. La dérivation du potentiel électromagnétique A introduit le champ électromagnétique F qui s'écrit ici :

$$F = \vec{E} + i\vec{B}\ ; \quad \vec{E} = -\vec{\partial}A_0 - \partial_0\vec{A}\ ; \quad \vec{B} = \vec{\partial}\times\vec{A} \tag{26}$$

$$\nabla^*A = \partial_\mu A^\mu + F$$

Et l'on a aussi :

$$\nabla^*A\dot{\phi} = 2A^\mu\partial_\mu\phi - A^*\nabla\phi \tag{27}$$

Donc l'équation du second ordre s'écrit :

$$0 = (\ \Box + m^2 - q^2 A\cdot A)\phi + q[(\partial_\mu A^\mu + F)\phi + 2A^\mu\partial_\mu\phi]i\sigma_1 \tag{28}$$

En l'absence de champ électromagnétique extérieur, l'équation du second ordre se réduit bien à l'équation de Klein-Gordon.

Invariances de jauge.

La transformation de jauge électrique prend maintenant la forme :

$$\phi\ \longrightarrow \phi' = \phi e^{ai\sigma_1}\ ; \quad A\ \longrightarrow A' = A - \frac{1}{q}\nabla a \tag{29}$$

G. Lochak a montré [11 à 14] qu'il y avait une autre invariance de jauge minimale en théorie de Dirac, et a associé cette symétrie de jauge au monopôle magnétique. En transposant à l'équation de Dirac l'un des termes de masse possibles de la théorie du monopôle, on obtient l'équation non linéaire [15 à 19] :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + i\frac{m}{\rho}(\Omega_1 - \Omega_2\hat{i})]\psi = 0 \tag{30}$$

Cette équation devient, en algèbre d'espace-temps :

$$\partial\Psi\gamma_{21} = m\psi\gamma_0 e^{\beta\hat{i}} + qA\Psi \tag{31}$$

Et elle devient, dans l'algèbre de Pauli :

$$\nabla\phi i\sigma_1 = me^{i\beta}\phi^* + qA\phi \tag{32}$$

On prouve l'équivalence entre (30) et (31) en écrivant les quatre équations équivalentes à (30) et les huit équations équivalentes à (31), dont quatre équations sont exactement les conjuguées complexes des quatre autres. Pour prouver l'équivalence entre (30) et (32), il suffit de reprendre le calcul détaillé dans l'appendice A pour prouver l'équivalence entre (1) et (23). La seconde invariance de jauge est ici seulement globale :

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{ia}\phi \ ; \quad \partial_\mu a = 0 \tag{33}$$

Invariance relativiste.

On sait que le groupe de recouvrement du groupe de Lorentz connexe est le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ unimodulaires, c'est-à-dire de déterminant 1. Soit M une matrice unimodulaire :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_3 \\ m_2 & m_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det M = m_1m_4 - m_2m_3 = 1$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_4 & -m_3 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{m}_2 \\ \overline{m}_3 & \overline{m}_4 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} \overline{m}_4 & -\overline{m}_2 \\ -\overline{m}_3 & \overline{m}_1 \end{pmatrix} = (M^\dagger)^{-1} = (M^{-1})^\dagger$$

La transformation t qui à tout vecteur d'espace-temps V fait correspondre V' tel que :

$$V' = MVM^\dagger \tag{35}$$

est une rotation de Lorentz car on a :

$$\begin{aligned} V'\cdot W' &= \frac{1}{2}(V'W'^* + W'V'^*) \\ &= \frac{1}{2}(MVM^\dagger M^*W^*M^{*\dagger} + MWM^\dagger M^*V^*M^{*\dagger} \\ &= \frac{1}{2}M(VW^* + WV^*)M^{-1} = V\cdot WMM^{-1} = V\cdot W \end{aligned} \tag{36}$$

$$V'^{\dagger} = (MVM^{\dagger})^{\dagger} = MV^{\dagger}M^{\dagger} = MVM^{\dagger} = V' \tag{37}$$

(37) indique que t transforme un vecteur d'espace-temps en vecteur d'espace-temps et (36) indique que cette transformation conserve le produit scalaire d'espace-temps. En outre on peut démontrer que cette transformation a pour déterminant 1, donc conserve l'orientation, et est orthochrone, c'est à dire transforme le demi-cône futur en lui-même, donc elle appartient au groupe restreint $\mathcal{L}^{\uparrow}{}_{+}$ [20]. Posons maintenant :

$$\phi' = M\phi \ ; \quad \nabla = M^{\dagger}\nabla' M \ ; \quad A = M^{\dagger}A'M \tag{38}$$

On a alors :

$$\phi = M^{-1}\phi' \ ; \quad \phi^{*} = M^{\dagger}\phi'^{*} \tag{39}$$

L'équation d'onde (23) devient :

$$M^{\dagger}\nabla' MM^{-1}\phi' i\sigma_1 = mM^{\dagger}\phi'^{*} + qM^{\dagger}A'MM^{-1}\phi'$$

$$M^{\dagger}\nabla'\phi' i\sigma_1 = M^{\dagger}(m\phi'^{*} + qA'\phi') \tag{40}$$

Donc en multipliant à gauche par M^{*} on obtient :

$$\nabla'\phi' i\sigma_1 = m\phi'^{*} + qA'\phi' \tag{41}$$

Ainsi l'équation d'onde ne change pas de forme sous une rotation de $\mathcal{L}^{\uparrow}{}_{+}$. Il en est de même pour l'équation (32) car on a :

$$\det\phi' = \det(M\phi) = \det M \det\phi = \det\phi = \rho e^{i\beta} \tag{42}$$

La forme que prend ici l'invariance relativiste est identique à celle du formalisme classique, dans lequel les matrices de Dirac sont fixes : la même matrice de Pauli σ_1 figure dans (23) et (41). L'invariance relativiste décrite ici n'est pas celle du formalisme d'Hestenes, dans lequel les γ_μ sont variables, étant les éléments d'une base de l'espace-temps qui change dans la rotation de Lorentz.

Densité lagrangienne.

Si l'on note $<\phi>$ la partie scalaire de ϕ , c'est à dire $\frac{1}{2}$ tr (ϕ) , la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ dont découle l'équation d'onde (23) s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} < \phi i\sigma_1\phi^{\dagger}\nabla - \nabla\phi i\sigma_1\phi^{\dagger} + m(\phi\phi^{*\dagger} + \phi^{*}\phi^{\dagger}) + 2qA\phi\phi^{\dagger} > \tag{43}$$

Et la densité lagrangienne dont découle (32) s'obtient en modifiant seulement le terme de masse, ce qui donne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} < \phi i\sigma_1\phi^\dagger\nabla - \nabla\phi i\sigma_1\phi^\dagger + 2qA\phi\phi^\dagger > +m\rho \tag{44}$$

Le courant conservatif J lié par le théorème de Noether à l'invariance de jauge s'écrit ici :

$$\begin{aligned} J^0 &= \|\phi\| = \phi_1\overline{\phi}_1 + \phi_2\overline{\phi}_2 + \phi_3\overline{\phi}_3 + \phi_4\overline{\phi}_4 \\ J^1 &= i(\phi_1\overline{\phi}_2 - \phi_2\overline{\phi}_1 + \phi_3\overline{\phi}_4 - \phi_4\overline{\phi}_3) \\ J^2 &= \phi_1\overline{\phi}_1 - \phi_2\overline{\phi}_2 + \phi_3\overline{\phi}_3 - \phi_4\overline{\phi}_4 \\ J^3 &= \phi_1\overline{\phi}_2 + \phi_2\overline{\phi}_1 + \phi_3\overline{\phi}_4 + \phi_4\overline{\phi}_3 \end{aligned} \tag{45}$$

Et l'on a :

$$J = J^0 - \vec{J}\,; \quad \vec{J} = J^1\sigma_2 + J^2\sigma_3 + J^3\sigma_1; \quad J = \phi^*\phi^{*\dagger}\,; \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{46}$$

Tenseurs sans dérivée.

La décomposition (9) de Ψ , d'abord obtenue par Jakobi et Lochak [21] avec le formalisme des matrices de Dirac, peut aisément être retrouvée ici. On a en effet :

$$\det\phi = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta}\ ; \quad \det(\rho^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\beta}{2}}\phi) = 1 \tag{47}$$

Donc si l'on pose :

$$P = \rho^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\beta}{2}}\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_4 \end{pmatrix}\ ; \quad \hat{\phi} = \phi^{*\dagger} \tag{48}$$

alors P est unimodulaire, c'est à dire est un élément du groupe $SL(2,\mathbb{C})$ de recouvrement du groupe $\mathcal{L}^\uparrow{}_+$. On peut dire par abus de langage que P est une rotation de Lorentz et l'on a :

$$\phi = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}P\ ; \quad \overline{\phi} = \sqrt{\rho}e^{-i\frac{\beta}{2}}\overline{P}\ ; \quad \phi^\dagger = \sqrt{\rho}e^{-i\frac{\beta}{2}}P^\dagger$$

$$\phi^* = \sqrt{\rho}e^{-i\frac{\beta}{2}}P^* = \sqrt{\rho}e^{-i\frac{\beta}{2}}P^{\dagger-1}\ ; \quad \hat{\phi} = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}P^{-1} \tag{49}$$

Donc on obtient :

$$\phi\hat{\phi} = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}P\sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}P^{-1} = \rho e^{i\beta} = \Omega_1 + i\Omega_2$$

$$J = \phi^*\hat{\phi} = \sqrt{\rho}e^{-i\frac{\beta}{2}}P^*\sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}P^{-1} = \rho P^* P^{*\dagger} \tag{50}$$

Il existe donc un vecteur mobile d'espace temps e_0 tel que :

$$J = \rho e_0 \ ; \quad e_0 = P^* P^{*\dagger} \ ; \quad {e_0}^* = PP^\dagger \ ; \quad e_0 \cdot e_0 = e_0 {e_0}^* = 1 \tag{51}$$

On a alors :

$${e_0}^0 = \frac{J_0}{\rho} = \frac{\|\phi\|}{|\det\phi|} > 0 \tag{52}$$

$$J \cdot J = JJ^* = {J_0}^2 - {J_1}^2 - {J_2}^2 - {J_3}^2 = \rho^2 e_0 {e_0}^* = \rho^2 \tag{53}$$

L'équation (32) admet une seconde invariance de jauge, (33), donc il existe un second courant conservatif, le courant K de (7). On obtient ici :

$$K = K^0 - \vec{K} \ ; \quad \vec{K} = K^1\sigma_2 + K^2\sigma_3 + K^3\sigma_1; \quad K = -\phi^*\sigma_1\hat{\phi} \tag{54}$$

Donc la base orthonormée mobile définie en (10) s'écrit ici :

$$e_0 = P^* P^{*\dagger} \ ; \quad e_3 = -P^*\sigma_1 P^{*\dagger} \ ; \quad e_1 = -P^*\sigma_2 P^{*\dagger} \ ; \quad e_2 = -P^*\sigma_3 P^{*\dagger} \tag{55}$$

Et l'on a :

$$\partial_\mu K^\mu = 0 \ ; \quad K = \rho e_3$$

$${e_3}^* = P\sigma_1 P^\dagger \ ; \quad {e_1}^* = P\sigma_2 P^\dagger \ ; \quad {e_2}^* = P\sigma_3 P^\dagger \tag{56}$$

$$J \cdot K = 0 \ ; \quad K \cdot K = -\rho^2$$

Puisque ${e_0}^0 > 0$, la rotation de Lorentz associée à P qui fait passer du repère du laboratoire au repère mobile lié à l'onde est orthochrone. Après le changement de repère défini par (38) on a encore ${e'_0}^0 > 0$, donc la rotation de Lorentz définie par (38) est bien aussi une rotation orthochrone. Le bivecteur S défini en (7) devient maintenant :

$$S = \vec{M} + i\vec{N} = \phi^*\sigma_1\phi^\dagger = \rho e^{-i\beta}P^*\sigma_1 P^\dagger \tag{57}$$

et l'on a :

$$S^2 = \rho e^{-2i\beta} = (\Omega_1 - i\Omega_2)^2$$

$$S^\dagger = \vec{M} - i\vec{N} = \rho e^{i\beta} P\sigma_1 P^{-1}$$
$$SJ = \rho^2 e^{-i\beta} P^* \sigma_1 P^{-1} = -\rho e^{-i\beta} K = (-\Omega_1 + i\Omega_2)K \tag{58}$$
$$(\Omega_1 + i\Omega_2)S = \rho^2 P^* \sigma_1 P^\dagger = JK^*$$

Si l'on pose :

$$\sigma = P i\sigma_1 P^{-1} \tag{59}$$

On obtient avec (48) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_4 & -\varphi_3 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma = i \begin{pmatrix} \varphi_3\varphi_4 - \varphi_1\varphi_2 & {\varphi_1}^2 - {\varphi_3}^2 \\ {\varphi_4}^2 - {\varphi_2}^2 & \varphi_1\varphi_2 - \varphi_3\varphi_4 \end{pmatrix} \tag{60}$$

Le bivecteur σ vérifie :

$$\sigma = {e_2}^* e_1 \; ; \quad \sigma^2 = -1 \; ; \quad iS^\dagger = \rho e^{i\beta}\sigma \tag{61}$$

Ce bivecteur σ définit, selon R. Boudet [22 à 24], un plan variable qui est le plan du spin, l'invariance de jauge électrique correspondant à l'absence de direction privilégiée dans ce plan.

Regardons maintenant comment se transforment les différents tenseurs sans dérivée de la théorie de Dirac sous une rotation de Lorentz. Nous noterons J', K', etc, les tenseurs transformés par la rotation de Lorentz orthochrone définie par (38). On a :

$$\phi' = M\phi \; ; \quad P' = MP \; ; \quad \phi'^* = M^*\phi^*$$
$$\phi'^\dagger = \phi^\dagger M^\dagger \; ; \quad \hat{\phi}' = \hat{\phi} M^{-1}$$
$$\Omega_1' + i\Omega_2' = \phi'\hat{\phi}' = M\phi\hat{\phi}M^{-1} = \Omega_1 + i\Omega_2 \tag{62}$$
$$J' = \phi'^*\hat{\phi}' = M^*\phi^*\hat{\phi}M^{-1} = M^*JM^{-1}$$
$$K' = -\phi'^*\sigma_1\hat{\phi}' = -M^*\phi^*\sigma_1\hat{\phi}M^{-1} = M^*KM^{-1}$$
$$S' = \phi'^*\sigma_1\phi'^\dagger = M^*\phi^*\sigma_1\phi^\dagger M^\dagger = M^*SM^\dagger$$
$$\sigma' = P'i\sigma_1P'^{-1} = MPi\sigma_1P^{-1}M^{-1} = M\sigma M^{-1}$$

On vérifie aisément la conservation des identités de Pauli-Kofinck comme $J \cdot J = \rho^2$ sous la transformation (38).

Nouveaux aspects.

L'intérêt d'un nouveau formalisme, pour une équation d'onde bien connue par ailleurs, est de mettre en évidence des choses qui ne sont pas faciles à voir avec l'ancien formalisme. La première surprise quand on passe de (1) à (23) c'est que (1) contient un terme $\sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3$ tandis que (23) contient $\sigma_2\partial_1 + \sigma_3\partial_2 + \sigma_1\partial_3$. Que se passerait-il si nous mettions dans l'équation (23) le terme attendu $\sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3$? On obtiendrait à la place de (23) l'équation :

$$(\partial_0+\sigma_1\partial_1+\sigma_2\partial_2+\sigma_3\partial_3)\phi i\sigma_1 = m\phi^*+q(A_0+\sigma_1A_1+\sigma_2A_2+\sigma_3A_3)\phi \quad (63)$$

Mais en refaisant alors en sens inverse les calculs effectués pour passer de (1) à (23), on obtient à la place de l'équation de Dirac l'équation :

$$[\gamma^0(\partial_0+iqA_0)+\gamma^3(\partial_1+iqA_1)+\gamma^1(\partial_2+iqA_2)+\gamma^2(\partial_3+iqA_3)+im]\psi = 0 \quad (64)$$

On obtient donc une correspondance assez curieuse entre les deux formes d'équation :

$$\begin{array}{ccc} \textit{Equation de } \psi & & \textit{Equation de } \phi \\ \gamma^0\partial_0+\gamma^1\partial_1+\gamma^2\partial_2+\gamma^3\partial_3 & \leftrightarrow & \partial_0+\sigma_2\partial_1+\sigma_3\partial_2+\sigma_1\partial_3 \\ \gamma^0\partial_0+\gamma^3\partial_1+\gamma^1\partial_2+\gamma^2\partial_3 & \leftrightarrow & \partial_0+\sigma_1\partial_1+\sigma_2\partial_2+\sigma_3\partial_3 \\ \gamma^0\partial_0+\gamma^2\partial_1+\gamma^3\partial_2+\gamma^1\partial_3 & \leftrightarrow & \partial_0+\sigma_3\partial_1+\sigma_1\partial_2+\sigma_2\partial_3 \end{array} \quad (65)$$

Le passage de la forme classique à l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ induit une permutation circulaire des matrices de Pauli par rapport aux coordonnées 1, 2, 3, tout comme le passage d'une ligne de (65) à l'autre. Ceci n'est pas un artifice de calcul, car la direction numéro 3 joue en théorie de Dirac un rôle privilégié dû au fait que c'est σ_3 qui est diagonale. Il en résulte que l'on diagonalise toujours les opérateurs J_3 et J^2 et non pas J_1 ou J_2. Il en résulte aussi que toutes les solutions pour l'atome d'hydrogène à potentiel sphérique sont seulement de symétrie axiale autour de l'axe numéro 3. Or c'est ici σ_1 qui apparaît dans l'équation d'onde : σ_1 doit être associé à la direction numéro 3 pour que la dissymétrie des solutions soit conservée.

Il y a en outre dans l'équation (23) une autre possibilité de permutation des indices, car on peut parfaitement y remplacer σ_1 par σ_2 ou σ_3 . En détaillant les systèmes d'équation on peut établir les équivalences suivantes, où l'on note ψ^* le complexe conjugué du ψ de Dirac :

$$\begin{array}{cc} \textit{Equation de } \psi & \textit{Equation de } \phi \\ [\gamma^\mu(\partial_\mu+iqA_\mu)+im]\psi = 0 & \nabla\phi i\sigma_1 = m\phi^*+qA\phi \\ \gamma^\mu\partial_\mu\psi+(m+q\gamma^\mu A_\mu)\gamma_5\gamma_2\psi^* = 0 & \nabla\phi i\sigma_2 = m\phi^*+qA\phi \\ \gamma^\mu\partial_\mu\psi+i(m+q\gamma^\mu A_\mu)\gamma_5\gamma_2\psi^* = 0 & \nabla\phi i\sigma_3 = m\phi^*+qA\phi \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{Equation de } \Psi & \textit{Equation de } \phi \\ \partial\Psi\gamma_{21} = m\Psi\gamma_0 + qA\Psi & \nabla\phi i\sigma_1 = m\phi^* + qA\phi \\ \partial\Psi\gamma_{32} = m\Psi\gamma_0 + qA\Psi & \nabla\phi i\sigma_2 = m\phi^* + qA\phi \\ \partial\Psi\gamma_{13} = m\Psi\gamma_0 + qA\Psi & \nabla\phi i\sigma_3 = m\phi^* + qA\phi \end{array} \tag{66}$$

La permutation des indices est identique dans l'algèbre d'espace ou dans l'algèbre d'espace-temps, mais reste tout à fait opaque si l'on utilise seulement le formalisme classique. En algèbre d'espace-temps cette permutation des indices est difficile à distinguer d'une rotation ordinaire des axes de coordonnées. Par contre en algèbre d'espace une rotation des axes se traduit par une transformation (38), qui ne permute pas les indices des matrices de Pauli.

On peut généraliser les deux sortes de rotation des matrices de Pauli en considérant l'équation :

$$(\partial_0 + \vec{\partial} i\tau)\phi i\varsigma = m\phi^* + q(A_0 - \vec{A} i\tau)\phi \tag{67}$$

$$\tau = u\sigma_1 + v\sigma_2 + w\sigma_3 \; ; \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

$$\varsigma = u'\sigma_1 + v'\sigma_2 + w'\sigma_3 \; ; \quad u'^2 + v'^2 + w'^2 = 1$$

Soit deux matrices unimodulaires M et P telles que :

$$P^\dagger = P^{-1} \; ; \quad \varsigma = P^{-1}\sigma_1 P$$

$$M^\dagger = M^{-1} \; ; \quad M^\dagger \vec{\partial} i\tau M = \vec{\partial} \; ; \quad M^\dagger \vec{A} i\tau M = \vec{A} \tag{68}$$

$$\phi = M\phi' P \; . \quad \phi^* = M\phi'^* P$$

En multipliant l'équation (67) à gauche par M^{-1}, et à droite par P^{-1}, on obtient :

$$M^\dagger(\partial_0 + \vec{\partial} i\tau)M\phi' P i\varsigma P^\dagger = M^\dagger[mM\phi'^* P + q(A_0 - \vec{A} i\tau)M\phi' P]P^\dagger$$

$$(\partial_0 + \vec{\partial})\phi' i\sigma_1 = m\phi'^* + q(A_0 - \vec{A})\phi' \tag{69}$$

$$\nabla\phi' i\sigma_1 = m\phi'^* + qA\phi'$$

Ainsi toutes les équations (67) sont équivalentes à l'équation de Dirac. Notons que l'ensemble des matrices M ou des matrices P est le groupe unitaire unimodulaire $SU(2)$: on a ainsi mis en évidence deux groupes de **symétrie interne** à l'équation de Dirac. Ces deux groupes de symétrie interne n'ont pas d'importance tant que les matrices M et P sont fixes dans l'espace-temps. Mais il doit être possible de construire une invariance de jauge locale pour chacun de ces groupes, qui restent à interpréter physiquement.

On a utilisé plus haut le fait que $SL(2,\mathbb{C})$ donne une représentation à deux valeurs du groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}^{\uparrow}{}_{+}$. Mais il existe en réalité deux représentations non équivalentes, alors que nous n'en avons utilisé qu'une. L'autre représentation [20] est la représentation contragrédiente utilisant $(M^{\dagger})^{-1} = M^*$. On peut en effet remplacer (23) par l'équation:

$$\nabla\phi^* i\sigma_1 = m\phi + qA\phi^* \tag{70}$$

qui peut aussi être écrite :

$$\nabla^*\phi i\sigma_1 = m\phi^* + qA^*\phi \tag{71}$$

On passe de (23) à (71) ainsi :

$$\nabla = \partial + \vec{\partial} \longrightarrow \nabla^* = \partial - \vec{\partial}$$

$$A = A_0 - \vec{A} \longrightarrow A^* = A_0 + \vec{A} \tag{72}$$

Donc (70) ou (71) est l'équation obtenue en changeant l'orientation de l'espace : le passage de (23) à (71) est la transformation appelée P dans la formulation classique. A la place de (38), l'invariance relativiste de l'équation (70) prend la forme :

$$\phi' = M^*\phi \ ; \quad \nabla = M^{\dagger}\nabla' M \ ; \quad A = M^{\dagger}A'M \tag{73}$$

Conclusion.

On a présenté ici une nouvelle façon d'écrire l'équation de Dirac, et on a comparé ceci aux deux formalismes utilisés précédemment. Les trois formalismes ne sont cependant pas identiques quant à leur interprétation physique. Le formalime classique et l'algèbre d'espace-temps font jouer au temps et à l'espace un rôle très symétrique, à part le fait qu'il y a dans la signature des signes + et des signes −. L'utilisation ici de la seule algèbre d'espace fait jouer à l'espace un rôle nettement différent de celui du temps. Ceci permet de mieux voir que l'équation de Dirac n'est à proprement parler invariante que sous le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ qui est le groupe de recouvrement du seul groupe de Lorentz restreint, et non pas du groupe de Lorentz complet. Ceci est physiquement important parce que le temps joue toujours en mécanique quantique un rôle bien particulier, et plus généralement parce que le temps ne s'écoule que du passé vers le futur. Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ respecte cette particularité du temps, il n'en renverse jamais le sens. De plus, bien que nous soyons parti d'un spineur de Dirac à quatre composantes et non pas d'un spineur de Weyl à deux composantes, nous sommes amenés à distinguer les deux représentations possibles par $SL(2,\mathbb{C})$ du groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}^{\uparrow}{}_{+}$ qui correspondent aux deux orientations possibles de l'espace. L'onde ϕ utilisée ici fonctionne donc comme un spineur de Weyl qui voit l'orientation de l'espace.

Appendice A.

En mettant les égalités (6) dans le système (3) et en séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système :

$$\begin{aligned}
\partial_0\underline{a}+\partial_1\underline{b}+\partial_2\underline{c}+\partial_3\underline{d} &= m\underline{e}+q(A_0\underline{e}-A_x\underline{c}+A_y\underline{b}-A_z\underline{h})\\
\partial_0\underline{b}+\partial_1\underline{a}-\partial_2\underline{e}+\partial_3\underline{g} &= -m\underline{c}+q(A_0\underline{c}-A_x\underline{e}-A_y\underline{a}-A_z\underline{f})\\
\partial_0\underline{c}+\partial_1\underline{e}+\partial_2\underline{a}+\partial_3\underline{f} &= m\underline{b}+q(-A_0\underline{b}+A_x\underline{a}-A_y\underline{e}+A_z\underline{g})\\
\partial_0\underline{d}-\partial_1\underline{g}-\partial_2\underline{f}+\partial_3\underline{a} &= -m\underline{h}+q(A_0\underline{h}+A_x\underline{f}-A_y\underline{g}-A_z\underline{e})\\
\partial_0\underline{e}+\partial_1\underline{c}-\partial_2\underline{b}+\partial_3\underline{h} &= -m\underline{a}+q(-A_0\underline{a}+A_x\underline{b}+A_y\underline{c}+A_z\underline{d})\\
\partial_0\underline{f}-\partial_1\underline{h}-\partial_2\underline{d}+\partial_3\underline{c} &= -m\underline{g}+q(-A_0\underline{g}-A_x\underline{d}+A_y\underline{h}+A_z\underline{b})\\
\partial_0\underline{g}-\partial_1\underline{d}+\partial_2\underline{h}+\partial_3\underline{b} &= m\underline{f}+q(A_0\underline{f}+A_x\underline{h}+A_y\underline{d}-A_z\underline{c})\\
\partial_0\underline{h}-\partial_1\underline{f}+\partial_2\underline{g}+\partial_3\underline{e} &= m\underline{d}+q(-A_0\underline{d}-A_x\underline{g}-A_y\underline{f}+A_z\underline{a})
\end{aligned} \tag{A-1}$$

Avec les égalités (13) ce système équivaut à :

$$\begin{aligned}
\partial_0 u-i\partial_1 v+\partial_2 w+\partial_3 t &= im\overline{t}+iq(-A_0 t+iA_x w-A_y v+A_z u)\\
\partial_0 v+i\partial_1 u-\partial_2 t+\partial_3 w &= -im\overline{w}+iq(A_0 w+iA_x t-A_y u-A_z v)\\
\partial_0 w-i\partial_1 t+\partial_2 u+\partial_3 v &= im\overline{v}+iq(A_0 v-iA_x u+A_y t-A_z w)\\
\partial_0 t+i\partial_1 w-\partial_2 v+\partial_3 u &= -im\overline{u}+iq(-A_0 u-iA_x v+A_y w+A_z t)
\end{aligned} \tag{A-2}$$

Avec les égalités (14) ce système équivaut à :

$$
\begin{aligned}
&\partial_0\phi_1 - i\partial_1\phi_2 + \partial_2\phi_1 + \partial_3\phi_2 \\
&\quad = im\overline{\phi}_2 + iq(-A_0\phi_3 - iA_x\phi_4 + A_y\phi_3 + A_z\phi_4) \\
&\partial_0\phi_2 + i\partial_1\phi_1 - \partial_2\phi_2 + \partial_3\phi_1 \\
&\quad = -im\overline{\phi}_1 + iq(-A_0\phi_4 + iA_x\phi_3 - A_y\phi_4 + A_z\phi_3) \\
&\partial_0\phi_3 - i\partial_1\phi_4 + \partial_2\phi_3 + \partial_3\phi_4 \\
&\quad = -im\overline{\phi}_4 + iq(-A_0\phi_1 - iA_x\phi_2 + A_y\phi_1 + A_z\phi_2) \\
&\partial_0\phi_4 + i\partial_1\phi_3 - \partial_2\phi_4 + \partial_3\phi_3 \\
&\quad = im\overline{\phi}_3 + iq(-A_0\phi_2 + iA_x\phi_1 - A_y\phi_2 + A_z\phi_1)
\end{aligned}
\tag{A-2}
$$

Ce système équivaut à l'équation matricielle (18)

Références

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) 117, 610 (1928).

[2] D. Hestenes : *Space-Time Algebra* (Gordon & Breach, New York 1966, 1987, 1992).

[3] D. Hestenes : *Real Spinor Fields.* J. Math. Phys., 8 n°4 1967.

[4] D. Hestenes : *Local observables in the Dirac theory.* J. Math. Phys, 14 n°7 1973).

[5] D. Hestenes : *Proper particle mechanics.* J. Math. Phys., 15 n°10 1974).

[6] D. Hestenes : *Proper dynamics of a rigid point particle.* J. Math. Phys., 15 n°10 1974).

[7] D. Hestenes : *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* J. Math. Phys., 16 n°3 1975.

[8] D. Hestenes : *A unified language for Mathematics and Physics & Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics* JSR Chisholm & AK Common eds, (Reidel, Dordrecht, 1986).

[9] C. Daviau : *Electromagnétisme, monopôles magnétiques et ondes de matière dans l'algèbre d'espace-temps.* (Ann. Fond. Louis de Broglie, 14 n°3 & n°4 1989).

[10] C. Daviau : *Linear and Nonlinear Dirac Equation*, Found. of Phys., 23 n 11, 1993.

[11] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin 1/2.* (Ann. Fond. Louis de Broglie, 8 n°4 1983 et 9 n°1 1984).

[12] G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin 1/2 magnetic monopole.* (Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985).

[13] G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* (Int. J. of Th. Phys. 24 n°10 1985).

[14] G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, 17 n°2 1992.

[15] C. Daviau & G. Lochak : *Sur un modèle d'équation spinorielle non linéaire*. Ann. Fond. Louis de Broglie, 16 n°1 1991.

[16] C. Daviau : *Equation de Dirac non linéaire*, (Thèse de doctorat, Université de Nantes), 1993.

[17] C. Daviau : *Remarques sur une équation de Dirac non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, 19 n 4 1994.

[18] C. Daviau : *Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène*, Ann. Fond. Louis de Broglie, 20 n 1 1995.

[19] C. Daviau : *Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equations for the Hydrogen Atom*, Int. Conference on the Theory of the Electron, Mexico 1995.

[20] H. Bacry : *Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires*. Gordon & Breach, Paris & New York 1967.

[21] G. Jakobi & G. Lochak : *Introduction des paramètres relativistes de Cayley-Klein dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 243 1956 p 234-237 et p. 357-360.

[22] R. Boudet : *La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps*. Ann. Fond. Louis de Broglie, 13 n°1 1988.

[23] R. Boudet : *Le corpuscule de Louis de Broglie et la géométrie de l'espace-temps*. (Courants, Amers, Ecueils en microphysique, Ann. Fond. Louis de Broglie, 1993).

[24] R. Boudet : *The Takabayasi moving Frame, from a Potential to the Z Boson*, in "The Present Status of the Quantum Theory of the Light", S. Jeffers and J.P. Vigier eds., Kluwer Dordrecht 1995.

(Manuscrit reçu le 10 janvier 1996)