Les symétries P, T, C, les solutions à énergie négative et la représentation des antiparticules dans les équations spinorielles (Partie I: équations linéaires)

Georges Lochak

Fondation Louis de Broglie 23, quai de Conti 75006 Paris

Cet article est dédié à la mémoire de Louis de Broglie à l'occasion du dixième anniversaire de sa mort

RÉSUMÉ. On réexamine le problème des symétries P, T, C en électrodynamique quantique en partant des lois de symétrie de Curie et en mettant en avant non pas la covariance formelle de la mécanique quantique mais les lois de l'électromagnétisme. Ce n'est qu'ensuite qu'on montre comment la mécanique quantique s'accorde avec elles. Les transformations de Racah sont confirmées pour P et C mais pas celle pour T, qui est écartée. On trouve alors deux transformations T possibles en électromagnétisme, entre lesquelles on tranche à partir d'un argument physique et d'un argument de covariance. L'examen des équations spinorielles montre une grande différence entre la symétrie d'une charge électrique et d'une charge magnétique. Les résultats obtenus seront utilisés dans la 2-ième Partie, consacrée aux lagrangiens non linéaires.

ABSTRACT. The problem of P, T, C symmetries in quantum electrodynamics is revisited, starting from the Curie laws and classical electromagnetism, instead of postulating at once the formal covariance of quantum mechanics. Only afterwards, it is shown how quantum mechanics agrees with these laws. The Racah transformations are confirmed for P and C but not for T. There are two possible T transformations in the frame of classical electromagnetism, between which we have chosen on the basis of a physical argument and of covariance. The examination of spinorial equations shows a great difference between the symmetry of an electric charge and a magnetic one. The results here obtained will be used in the 2-nd Part, devoted to nonlinear lagrangians.

1. Introduction.

Dirac, au début de ses travaux, pensait que les solutions à énergie négative de l'équation de Klein-Gordon, étaient dues à la dérivée seconde par rapport au temps et il fut déçu de les retrouver (quelque parti qu'il sût en tirer) dans sa propre équation, pourtant du premier ordre. Jusqu'à la fin de sa vie, il continua de chercher une équation qui en serait dépourvue [1]. On pourrait se demander si ces solutions ne seraient pas dues à la linéarité, mais il n'en est rien: les énergies négatives, comme les anti-particules, ne sont dues ni aux dérivées secondes ni à la linéarité, mais à la *symétrie*: la relativité et les symétries P, T, C. On sait qu'en relativité restreinte, les corps en rotation introduisent des énergies négatives [2]. Et, en relativité générale, Einstein a montré, dès 1925, qu'on ne peut pas décrire un électron sans qu'apparaisse une particule de charge contraire. Il relia cette propriété au *renversement du temps* et montra que le produit PT renverse les charges [3], [4] (p. 213). Notre but, dans ce travail, sera d'abord d'éclaicir certains points sur les symétries P, T, C, à partir des travaux de Pierre Curie sur la symétrie du *champ électromagnétique* dont le rôle est primordial. Nous ne voulons pas parler de conjugaison de charge à propos d'équations de champ libre, comme le font certains ouvrages [5], car cela conduit à identifier la variance des potentiels à celle d'un gradient d'univers (à travers l'invariance de jauge), alors que nous voulons montrer que cette variance découle des lois de l'électromagnétisme. Ce réexamen nous servira à préciser, dans la 2-ième Partie, les termes non-linéaires admissibles dans les équations spinorielles, notamment en fonction de la présence ou de l'absence de solutions à énergie négative, et de la possibilité de décrire les anti-particules.

2. Les symétries spatiales des grandeurs électromagnétiques.

Peu de traités d'électromagnétisme parlent des symétries P, T, C. Jackson [6] fait exception mais de façon formelle, en postulant par pure convention l'invariance de la charge électrique par retournement de l'espace ou du temps[1]. Pour ce qui est du temps, nous lui donnerons tort, quant à l'espace, son choix coïncide, certes, avec les résultats de Curie, mais avec cette différence que ce dernier ne les pose pas a priori

[1] Son seul argument est: *"It is natural, convenient, and permissible to assume that charge is also a scalar under spatial inversion and even under time reversal"* ([6], p. 249).

mais les déduit de l'expérience et de ses fameuses lois générales sur la symétrie [7]:

"Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits."

Inversement:

"Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance."[2]

Voici deux applications de ces principes, données par Curie lui-même:

a) Symétrie spatiale du champ électrique.

Soit un **champ électrique** créé entre deux plateaux circulaires coaxiaux de métaux différents. Le champ possèdera la symétrie de la cause, donc de l'ensemble des deux plateaux: il sera de révolution autour de leur axe et tout plan passant par l'axe sera un plan de symétrie. C'est la symétrie d'un tronc de cône. Mais la symétrie pourrait être plus grande (cylindrique[3] ou sphérique). Pour le savoir, Curie prend une sphère conductrice chargée, plongée dans un champ uniforme: *"Une force agira sur la sphère dans la direction du champ"*. La dissymétrie de l'effet doit se retrouver dans la cause; or la force (l'effet) n'a pas d'axe de symétrie normal à sa direction; donc le système sphère-champ (la cause) n'a pas d'axe non plus. Or la sphère a une infinité d'axes d'isotropie (y compris dans le champ, car elle est conductrice), donc la cause de dissymétrie est dans le champ lui-même. Conclusion: **Le champ électrique a la symétrie d'un cône** (cette fois, on peut le dire): il est représentable par un **vecteur polaire** (dans $\mathbb{R}^3$). Et il en est de même pour un **courant** ou une **polarisation** électrique.

b) Symétrie spatiale du champ magnétique.

Considérons le champ magnétique créé au centre d'une spire circulaire parcourue par un courant. Symétrie des causes: l'axe de la spire est un *axe d'isotropie* et son plan un *plan de symétrie*. Donc **le champ magnétique a un plan de symétrie normal à sa direction**. Par contre, il n'a pas d'axe binaire normal. En effet soit une barre rectiligne qui se

[2] En revanche, les effets peuvent être plus symétriques que les causes et certaines causes de dissymétrie peuvent ne pas suffire à produire les effets attendus.

[3] Curie ne l'explique pas, mais s'il dit "tronc de cône" et non pas "cône", c'est manifestement parce que le tronc de cône admet le cylindre comme cas particulier.

meut normalement à sa longueur. Elle a un axe binaire parallèle à sa vitesse. Mais si l'on crée un champ magnétique normal à la vitesse et à la barre, il naît une force électromotrice dans la barre: l'axe binaire disparaît. Il doit donc aussi être absent de la cause et le champ magnétique n'a donc pas d'axe normal à sa direction. Donc: **Le champ magnétique a la symétrie d'un cylindre en rotation**, il est représentable par un **vecteur axial** (dans $\mathbb{R}^3$). Il en est de même pour un **courant** ou une **polarisation** magnétique.

Des raisonnements de Curie sur les champs on peut déduire la **symétrie des charges**. Lui-même ne le fait pas[4] mais son raisonnement se prolonge facilement. Reprenons les plateaux circulaires introduits plus haut; ils s'échangent, ainsi que leurs charges, lors d'une symétrie par rapport à un plan équidistant et parallèle: or nous savons que cette opération renverse le champ électrique, donc le signe des charges ne change pas. Pour une charge magnétique la conclusion est contraire parce que le champ ne se renverse pas. La parité change donc le signe de la **charge magnétique** (g), mais pas celui de la **charge électrique** (e) en résumé:

$$P : \mathbf{E} \to -\mathbf{E} \ ; \ \mathbf{H} \to \mathbf{H} \ ; \ e \to e \ \ ; \ g \to -g \qquad (2,1)$$

Nous verrons plus loin que, s'il est vrai que e est un scalaire, $\mathbf{E}$ un vecteur polaire et $\mathbf{H}$ un vecteur axial (dans $\mathbb{R}^3$), il serait faux de dire que g est une charge "pseudoscalaire", comme on le dit parfois. D'ailleurs, les constantes physiques sont *toutes scalaires*, quelles que soient les grandeurs qu'elles caractérisent: personne ne dit que $\hbar$ est une composante tensorielle antisymétrique sous prétexte que c'est une unité de moment cinétique. En réalité, si tout ce qui concerne la charge électrique restera, par la suite, nous serons obligés de modifier ce qui concerne la charge magnétique en raison de l'expression quantique de la chiralité.

3. La symétrie temporelle du champ électromagnétique.

Curie ne s'est pas intéressé au problème du renversement du temps qui ne se posait pas à l'époque. Nous invoquerons d'abord la force de Lorentz sur une charge électrique ou magnétique [8]:

$$\mathbf{F}_{élec.} = e\,(\mathbf{E} + 1/c\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \ ; \ \mathbf{F}_{magn.} = g\,(\mathbf{H} - \ 1/c\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \qquad (3,1)$$

[4] Toutefois, il traite de la charge magnétique dans son second mémoire [7].

La mécanique quantique ne peut pas contredire ces formules qu'on retrouve à la limite de l'optique géométrique. Elles ne suffisent pas à définir toutes les variances, mais on doit au moins s'y raccorder. Comme $\mathbf{F}$ est T-invariante (car $\mathbf{F} = m\gamma$) et v change de signe avec t, les formules (3,1) imposent les variances[5]:

$$T : e\mathbf{E} \to e\mathbf{E} \ ; \ e\mathbf{H} \to -e\mathbf{H} \ ; \ g\mathbf{H} \to g\mathbf{H} \ \ ; \ g\mathbf{E} \to -g\mathbf{E} \tag{3,2}$$

Il s'ensuit *deux variances possibles*:

$$\begin{array}{rl} (I) & \mathbf{E} \to \mathbf{E} \ ; \ \mathbf{H} \to -\mathbf{H} \ ; \ e{\to}e \ ; \ g \to -g \\ (II) & \mathbf{E} \to -\mathbf{E} \ ; \ \mathbf{H} \to \mathbf{H} \ ; \ e{\to} -e \ ; \ g \to g \end{array} \tag{3,3}$$

d'où une ambiguïté qu'il suffit de lever sur une seule de ces quatre grandeurs car les autres s'ensuivent, mais il semble difficile, sinon impossible, d'y parvenir à l'aide de phénomènes électrodynamiques. Tous ceux que j'ai essayés, qu'ils soient classiques ou quantiques, sont compatibles avec les deux lois.

Cette difficulté est analogue à celle qu'a rencontrée Pierre Curie lui-même avec la symétrie spatiale: *"Les phénomènes généraux de l'électricité et du magnétisme, dit-il, nous indiquent seulement une liaison entre les symétries du champ électrique et du champ magnétique [...]"* En effet, ces phénomènes lui montraient seulement que l'un des deux champs est polaire et l'autre axial, mais sans indiquer lequel est quoi. *"Pour lever cette indétermination*, poursuit-il, *il faut faire intervenir d'autres phénomènes, les phénomènes électrochimiques ou d'électricité de contact, les phénomènes pyro ou piézoélectriques, ou encore le phénomène de Hall, ou celui de la polarisation rotatoire magnétique."*

Dans notre cas également, les phénomènes généraux nous disent seulement quel doit être le comportement de trois des grandeurs qui figurent dans (3,3) si la quatrième est connue[6]que Pierre Curie. Considérons un phénomène électrochimique: par exemple des cathions se dirigeant vers une anode avec une densité de courant $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, où ρ est la

---

[5] Remarquons que, d'après (3,1), on a aussi: $P : e\mathbf{E} \to -e\mathbf{E} \ ; \ e\mathbf{H} \to e\mathbf{H} \ ; \ g\mathbf{H} \to -g\mathbf{H} \ \ ; \ g\mathbf{E} \to g\mathbf{E}$ et, d'après les lois de Curie pour les champs, on retrouve les lois (2,1) pour les charges.

[6] C'est sans doute pour cette raison que Jackson (voir §2) admet que ce choix est de convention pure.

densité de cathions et $\mathbf{v}$ leur vitesse. Inversons le temps: nous ne savons pas, a priori, si le signe des charges s'inverse ou pas, mais dans un cas comme dans l'autre, le signe des ions et celui de l'électrode resteront opposés. Le sens du courant ne doit donc pas changer. Or la vitesse v change de signe, donc la charge doit changer également: **c'est la Loi II qui est la bonne et c'est elle que nous conserverons**. Ce résultat est confirmé par un raisonnement d'Einstein dans la référence [3], qui aboutit à la même loi à partir d'un argument, de covariance. En effet, la relativité réunit **E** et **H** en un tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$:

$$\mathbf{E} = \{iF_{k4}\}\ ;\ \mathbf{H} = \ \{\mathbf{F}_{kl}\} \quad (\text{avec} \quad x_\mu = x_k,\ ict) \qquad (3,4)$$

On verra, dans la traduction de cet article donnée plus loin, qu'Einstein conclut que le champ électrique, en tant que composante temporelle du tenseur, change de signe avec P et T et que la densité de charge fait de même, comme divergence du champ.

Remarque: Lorsque Pierre Curie cherche la symétrie du champ électrique, il admet que les plateaux circulaires chargés qu'il considère possèdent une infinité de plans de symétrie passant par l'axe. Il suppose donc implicitement que les charges électriques sont P- invariantes, ce qu'il ne sait pas encore. Mais cette hypothèse se justifie plus loin grâce à la pyro et à la piézoélectricité, qui sont citées à nouveau, par la suite, dans le passage reproduit plus haut. En revanche, Curie ne développe pas le raisonnement électrochimique auquel il fait allusion dans ce même passage, mais on peut imaginer ce qu'il aurait pu dire. En effet, considérons une anode et une cathode vers lesquelles se dirigent respectivement des courants cathodique et anodique, et opérons une symétrie qui échange les deux électrodes. Que les signes des électrodes changent, ou non, les ions feront de même et se dirigeront vers la même électrode qu'auparavant. Mais, les électrodes ayant échangé leurs positions, les courants ioniques doivent changer de sens. Or ils changent à cause de la vitesse, qui s'inverse par parité, donc la charge ne change pas.

4. Les variances P,T,C du champ électromagnétique.

A ce qui vient d'être dit, nous devons ajouter la conjugaison de charge qui n'offre aucune difficulté en physique classique: si on inverse le signe de la charge à laquelle la force s'applique, les champs *extérieurs* ne changent pas et le signe de la force (3,1) s'inverse :

$$C : \mathbf{E} \to \mathbf{E}\ ;\ \mathbf{H} \to \mathbf{H}\ ;\ e \to -e\ ;\ g \to -g \qquad (4,1)$$

mais nous devrons garder présent à l'esprit qu'il en sera autrement pour les champs *émis* par une charge. D'après (2,1), (3,3) et (4,1), nous aurons donc:

$$\begin{cases} P : \mathbf{E} \to -\ \mathbf{E}\ ;\ \mathbf{H} \to \mathbf{H}\ ;\ e\ \to e\ ;\ g \to -g \\ T : \mathbf{E} \to -\mathbf{E}\ ;\ \mathbf{H} \to\ \mathbf{H}\ ;\ e \to -e\ ;\ g \to g \\ C : \mathbf{E} \to \mathbf{E}\ ;\ \mathbf{H} \to \mathbf{H}\ ;\ e \to -\ e\ ;\ g \to -g \end{cases} \tag{4,2}$$

5. La transformation des potentiels.

Les variances P, T, C des potentiels électromagnétiques s'obtiennent à partir de la définition des champs. Nous introduirons en même temps les potentiels de Lorentz V et $\mathbf{A}$ et les pseudo-potentiels W et $\mathbf{B}$ associés au monopôle magnétique [8], [9] (Attention: $\mathbf{B}$ n'est pas une induction!) :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\ ;\ \mathbf{H} =\ rot\mathbf{A} \tag{5,1}$$

$$\mathbf{E} = rot\mathbf{B}\ ;\ \mathbf{H} = \nabla W + \frac{1}{c}\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{5,2}$$

D'après (4,2), on trouve pour les potentiels les variances suivantes auxquelles la mécanique quantique devra se conformer:

$$\begin{cases} P : \mathbf{A} \to -\mathbf{A}\ ;\ V \to V\ ;\ \mathbf{B} \to \mathbf{B}\ ;\ W \to -W\ ;\ e \to e\ ;\ g \to -g \\ T : \mathbf{A} \to \mathbf{A}\ ;\ V \to -\ V\ ;\ \mathbf{B} \to -\mathbf{B}\ ;\ W \to W\ ;\ e \to -e\ ;\ g \to g \\ C : \mathbf{A} \to \mathbf{A}\ ;\ V \to V\ ;\ \mathbf{B} \to \mathbf{B}\ ;\ W \to W\ ;\ e \to -e\ ;\ g \to -g \end{cases} \tag{5,3}$$

Remarquons que la transformation de Lorentz réunit les potentiels (V, A) et W, B en deux *quadrivecteurs*:

$$A_\mu = (\mathbf{A}\ ;\ iV)\ \ ;\ iB_\mu = (\mathbf{B}\ ;\ iW) \tag{5,4}$$

D'après (5,3), on voit que A_μ est *polaire* et B_μ *axial* dans l'espace-temps. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}$ est un vecteur polaire, V un scalaire, $\mathbf{B}$ un vecteur axial et W un pseudo-scalaire[7]. Ce sont les variances qu'on admet généralement. On peut s'assurer que les lois que nous donnons pour l'électromagnétisme s'accordent aussi avec certains autres résultats (qui ne départagent pas les Lois I et II).

a) D'après (5,3), on a la bonne variance des moments de Lagrange: Pour $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}, E = mc^2 + eV$, ou : $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{g}{c}\mathbf{B}, E = mc^2 + gW$, on a:

$$(\text{ P ou T }) \quad : \mathbf{P} \to -\mathbf{P} \;\; ; \quad E \to E \tag{5,5}$$

b) La seconde propriété est purement électromagnétique. Les variances (4,2) et (5,3) des champs et des potentiels rendent covariantes les équations de Maxwell ainsi que les équations du photon de de Broglie [10], [11], dans lesquelles les potentiels interviennent à égalité avec les champs:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = rot\ \mathbf{E}\ ;\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = rot\ \mathbf{H} + k_0^2\mathbf{A} \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0\ ;\ \operatorname{div}\mathbf{E} = -k_0^2 V \\ \mathbf{H} = rot\mathbf{A}\ ;\ \mathbf{E} = -\ \mathbf{grad}V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\ ;\ \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \end{gathered} \tag{5,6}$$

Et elles rendent covariantes les équations du "photon magnétique" qui font intervenir les pseudopotentiels [12]:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = rot\ \mathbf{E} + k_0^2\mathbf{B}\ ;\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = rot\mathbf{H} \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = k_0^2 W\ ;\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{H} = \ \mathbf{grad}W + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\ ;\ \mathbf{E} = rot\mathbf{B}\ ;\ \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \end{gathered} \tag{5,7}$$

---

[7] Rappelons qu'un vecteur polaire d'espace-temps a une partie spatiale polaire et une composante de temps P-invariante, car P n'agit que sur l'espace. Au contraire, T n'agit que sur le temps: on le voit sur (5,3). Les propriétés d'un vecteur axial sont à l'inverse de celles d'un vecteur polaire: on le voit aussi sur (5,3). Rappelons encore que, de même qu'un vecteur axial dans $\mathbb{R}^3$ est le dual d'un tenseur d'ordre 2 antisymétrique: $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}C_{[jk]}$, un vecteur axial d'espace-temps est le dual d'un tenseur antisymétrique d'ordre 3: $B_\mu = \frac{1}{6}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}C_{[\alpha\beta\gamma]}$.

6. Les invariances P, T, C de l'équation de Dirac.

L'équation de Dirac en présence de champ s'écrit:

$$\gamma_\mu \left(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\psi + \frac{m_0 c}{\hbar}\psi = 0 \quad (x_\mu = x_k, ict) \tag{6,1}$$

A_μ est le quadripotentiel de Lorentz défini en (5,4) et l'on pose:

$$\begin{aligned} &\gamma_k = i\begin{pmatrix} 0 & s_k \\ -s_k & 0 \end{pmatrix} \ ; \ k = 1,2,3 \ ; \ \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \ ; \\ &\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6,2}$$

Les s_k sont les matrices de Pauli:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ ; \ s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6,3}$$

On se rappellera, par la suite, que: 1) les composantes vectorielles spatiales et les composantes pseudovectorielles temporelles, ainsi que s_1, s_3, γ_2, γ_4, γ_5 sont *réelles*, 2) les composantes vectorielles temporelles et les composantes pseudovectorielles spatiales, ainsi que s_2, γ_1 et γ_3 sont *imaginaires*. Nous utiliserons également la représentation spinorielle de Weyl qui diagonalise γ_5 et fait apparaître les composantes chirales ξ et η:

$$\psi \to U\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \ ; \ U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_4 + \gamma_5) \tag{6,4}$$

L'équation de Dirac devient alors:

$$\begin{aligned} &\left[\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t} - \mathbf{s}.\nabla - i\tfrac{e}{\hbar c}(V + \mathbf{s}.\mathbf{A})\right]\xi + i\tfrac{m_0 c}{\hbar}\eta = 0 \\ &\left[\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{s}.\nabla - i\tfrac{e}{\hbar c}(V - \mathbf{s}.\mathbf{A})\right]\eta + i\tfrac{m_0 c}{\hbar}\xi = 0 \end{aligned} \tag{6,5}$$

Ecrivons maintenant les invariances P, T, C de l'équation (6,1) à l'aide de (4,2) et (5,3). Les invariances P et T sont simplement données par les formules de Racah [13] (le tilde indique la transposition):

$$\begin{aligned} &P : e \to e \ ; \ x_k \to -x_k \ , \ x_4 \to x_4 \ ; \ A_k \to -A_k \ ; \ A_4 \to A_4 \ ; \ \psi \to \gamma_4\psi \\ &C : e \to -e \ ; \ \psi \to \gamma_2\psi^* = \gamma_2\gamma_4\tilde{\overline{\psi}} \quad \left(\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4\right) \end{aligned} \tag{6,6}$$

En revanche, la formule d'inversion du temps de Racah doit être rejetée car nous sommes obligés, maintenant, de tenir compte de la transformation (5,3) des potentiels et des charges, et d'écrire:

$$\begin{aligned} T^{(II)}{}_{Racah} : x_k \to x_k, x_4 \to -x_4 \ ; \ A_k \to A_k \ ; \ A_4 \to -A_4 \\ \psi \to -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi \quad ; \quad e \to -e \end{aligned} \tag{6,7}$$

Ce n'est pas la véritable transformation de Racah, car celle-ci ne change pas le signe de la charge: d'où le suffixe (II), pour l'indiquer. Pour appliquer cette transformation il faut d'abord changer dans (6,1), *le signe du temps, de la charge et de* A_4:

$$\begin{aligned} &\Big\{\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 \\ &\quad - i\,\frac{e}{\hbar c}\,(\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 - \gamma_4 A_4) + \frac{m_0 c}{\hbar}\Big\}\psi = 0 \end{aligned} \tag{6,8}$$

En appliquant ensuite $-i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, nous trouverons l'équation de Dirac, mais avec une charge opposée. La transformation (6,7) n'est donc pas une loi d'invariance. C'est pourquoi nous chercherons une solution antiunitaire en prenant le complexe conjugué de (6,8):

$$\begin{aligned} &\Big\{-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 + \gamma_4\partial_4 \\ &\quad - i\frac{e}{\hbar c}\,(\gamma_1 A_1 - \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 - \gamma_4 A_4) + \frac{m_0 c}{\hbar}\Big\}\psi^* = 0 \end{aligned} \tag{6,9}$$

Si nous appliquons maintenant la matrice $-i\gamma_3\gamma_1$ qui retourne γ_1 et γ_3 sans changer γ_2 et γ_4, nous trouverons l'équation (6,1) avec le bon signe (plus) devant la charge. La matrice duale: $-i\gamma_4\gamma_2 = -i\gamma_5\gamma_3\gamma_1$ donnerait, elle aussi, un même signe aux matrices $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, mais la masse s'inverserait. La matrice $-i\gamma_3\gamma_1$ est donc seule valable, d'où les formules d'inversion du temps:

$$\begin{aligned} \mathrm{T} : e \to -e \quad ; \quad x_k \to x_k \ , \ x_4 \to -x_4 \ ; \\ A_k \to A_k \ , \ A_4 \to -A_4 \ ; \ \psi \to -i\gamma_3\gamma_1\psi^* \end{aligned} \tag{6,10}$$

Les lois P, T, C de l'équation de Dirac seront donc:

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{P} \ : e \to e \ ; \ \ x_k \to -x_k \ , \ x_4 \to x_4 \ ; \\ &\qquad A_k \to -A_k \ ; \ A_4 \to A_4 \ ; \ \psi \to \gamma_4\psi \\ &\mathrm{T} \ : e \to -e \ ; \ x_k \to x_k \ , \ x_4 \to -x_4 \ ; \\ &\qquad A_k \to A_k \ , \ A_4 \to -A_4 \ ; \ \psi \to -i\gamma_3\gamma_1\psi^* \\ &\mathrm{C} \ : e \to -e \quad ; \quad \psi \to \gamma_2\psi^* = \gamma_2\gamma_4\tilde{\overline{\psi}} \ (\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4) \end{aligned} \right. \tag{6,11}$$

Elles sont conformes aux lois de Curie sur l'électromagnétisme, augmentées des lois sur les charges et sur la transformation du temps que nous y avons ajoutées. Elles satisfont aux critiques adressées par Costa de Beauregard aux transformations de Racah, au nom de la relativité [15]. La covariance obtenue ici est plus claire et surtout plus fondée que celle donnée par Jauch et Rohrlich, avec lesquels on trouverait certains désaccords [16]. La transformation de la fonction d'onde définie par T, en (6,10) et (6,11), est la même que dans la référence [5], mais elle y figure sans la charge, étant tirée d'un raisonnement qui ignore les interactions. La transformation T proposée ici est ce qu'on appelle parfois (voir par exemple [14]) le *renversement faible du temps*, défini comme le produit de la conjugaison de charge par l'inversion du temps de Racah. Mais pour nous, c'est la transformation (6,10) qui sera le "renversement du temps" et nous dirons, au contraire, que c'est la transformation de Racah qui est égale à TC:

$$T_{\text{Racah}} = TC \tag{6,12}$$

en désignant ici la vraie transformation de Racah (qui conserve la charge):

$$\begin{aligned} T_{\text{Racah}} :& e \to e \quad ; \quad x_k \ \to x_k, x_4 \to -x_4 \quad ; \\ & A_k \to A_k \ , \ A_4 \to \ -A_4 \quad ; \quad \psi \to -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi \end{aligned} \tag{6,13}$$

Cette transformation, produit de deux lois d'invariance, est elle-même une loi d'invariance, mais comment la situer? Nous nous trouvons devant deux inversions du temps: T (6,10) et T_{Racah}, et deux opérations qui inversent la charge (T et C), mais avec des significations différentes car C associe à une solution à énergie négative de (6,1), une solution à énergie positive de la même équation, mais avec une charge opposée à celle de l'électron. En effet, prenons une solution à énergie négative (nous verrons dans la 2ième Partie qu'en représentation lagrangienne, le signe dans l'exponentielle, devant $\omega > 0$, est celui de l'énergie):

$$\psi \ = e^{-i\omega t}\phi\left(\mathbf{r}\right) \tag{6,14}$$

C lui associe une solution à énergie positive:

$$\psi' = \gamma_2\psi^* = e^{i\omega t}\gamma_2\phi^*\left(\mathbf{r}\right) \tag{6,15}$$

où le signe *plus* dans l'exponentielle est dû à la conjugaison complexe. Prenons maintenant une solution à énergie positive (avec + devant $\omega > 0$):

$$\psi = e^{i\omega t}\phi\left(\mathbf{r}\right) \tag{6,16}$$

et appliquons lui T défini en (6,10) ou (6,11): nous changerons à la fois le signe du temps et de la charge. Nous aurons à nouveau une solution de charge opposée mais avec un signe plus dans l'exponentielle parce que le changement de signe dû à la conjugaison complexe est compensé par celui dû à l'inversion du temps:

$$\psi'' = -i\gamma_3\gamma_1\psi^*\left(-t,\mathbf{r}\right) = -ie^{(-i)\omega(-t)}\gamma_3\gamma_1\phi^*\left(\mathbf{r}\right) = -ie^{i\omega t}\gamma_3\gamma_1\phi^*\left(\mathbf{r}\right) \tag{6,17}$$

L'inversion du temps associe à un électron d'énergie positive un positron d'énergie également positive: **Le positron est un électron qui remonte le cours du temps**, comme le disait Feynman. Notons que cela serait faux si nous avions conservé la Loi I en (3,3). Enfin, appliquons la transformation de Racah à la solution à énergie positive (6,16):

$$\psi''' = T_{\text{Racah}}\psi = TC\psi = -i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi\left(-t,\mathbf{r}\right) = -ie^{-i\omega t}\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\phi\left(\mathbf{r}\right) \tag{6,18}$$

Nous avons à nouveau une solution qui remonte le temps, mais elle est obtenue grâce au produit d'une inversion du temps, au sens de (6,11), par une conjugaison de charge: d'où le signe moins dans l'exponentielle. Pour terminer, nous allons transcrire (6,11) dans la représentation de Weyl (6,4):

$$\begin{aligned}
P :& e \to e \quad ; \quad \mathbf{x} \to -\mathbf{x}, t \to t \quad ; \\
& \mathbf{A} \to -\mathbf{A}\ ,\ V \to V \quad ; \quad \xi \leftrightarrow \eta \\
T :& e \to -e \quad ; \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}, t \to -t \quad ; \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}\ ,\ V \to -V \quad ; \\
& \xi \to s_2\xi^* \quad ; \quad \eta \to s_2\eta^* \\
C :& e \to -e \quad ; \quad \xi \to -is_2\eta^* \quad ; \quad \eta \to is_2\xi^*
\end{aligned} \tag{6,19}$$

On voit ici (mais ce sera plus clair dans le cas du magnétisme) que ξ et η sont les *composantes chirales du champ de Dirac: elles s'échangent par parité et par conjugaison de charge, mais pas par renversement du temps.*

7. Les invariances P, T, C de l'équation du monopôle.

Ecrivons l'équation linéaire du monopôle magnétique[8] [8], [9]:

$$\gamma_\mu \left(\partial_\mu - \; g\gamma_5 B_\mu\right) \psi = 0 \tag{7,1}$$

Le terme de masse est absent en raison de l'invariance de l'équation par la transformation de jauge chirale:

$$\psi \to \exp(i\gamma_5 \theta/2)\psi \quad ; \quad B_\mu \to B_\mu + \partial_\mu \theta \tag{7,2}$$

Nous avons vu en (5,4) que B_μ réunit les pseudo-potentiels W et $\mathbf{B}$. Ceux- ci apparaissent dans la représentation de Weyl de (7,1):

$$\begin{aligned} &\left[\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t} - \mathbf{s}.\nabla - i\tfrac{g}{hc}\left(W + \mathbf{s}.\mathbf{B}\right)\right] \xi = 0 \\ &\left[\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{s}.\nabla + i\tfrac{g}{hc}\left(W \; - \mathbf{s}.\mathbf{B}\right)\right] \eta = 0 \end{aligned} \tag{7,3}$$

Et c'est ici qu'apparaît le sens physique de cette représentation. En effet, la comparaison entre (6,1) et (7,1) d'une part et entre (6,5) et (7,3) d'autre part montre la différence essentielle entre une charge électrique et une charge magnétique. Dans l'équation de Dirac (6,1), l'opérateur de charge est $E = eI$ (ou $I =$ matrice unité) avec des valeurs propres égales, tandis que, dans l'équation du monopôle (7,1), l'opérateur est $G = g\gamma_5$ avec des valeurs propres différentes g et $-g$ qui apparaissent dans (7,3) car *la représentation de Weyl diagonalise G et sépare les composantes chirales ξ et η*:

$$UGU^{-1} = gU\gamma_5 U^{-1} = g\gamma_4 = g\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{7,4}$$

Comme nous le disions au Å2, le caractère pseudoscalaire de l'opérateur G n'appartient pas à la constante de charge g mais à γ_5. Seule la mécanique quantique pouvait le comprendre car elle connaît la chiralité, alors que la mécanique classique l'ignore: en effet, *la chiralité est liée à la polarisation de l'onde*, or l'onde disparaît en mécanique classique et se réduit à une phase, qui figure dans l'intégrale d'action. Les

[8] Il n'y a pas de i devant la charge parce que B_μ est un pseudovecteur: voir (5,4).

composantes chirales ξ et η correspondant aux deux valeurs propres de G obéissent à des équations (7,3) *séparées*, contrairement aux équations (6,5) de l'électron qui sont couplées par un terme de masse. La charge magnétique g apparaît avec des signes contraires dans (7,3) (ce sont les valeurs propres de l'opérateur $G = g\gamma_5$), tandis que la charge électrique e a le même signe dans les deux équations (6,5) (opérateur $E = eI$), différence essentielle entre le magnétisme et l'électricité. Il s'ensuit que, contrairement à ce qui se passe en physique classique, un changement de signe de la charge magnétique peut avoir a priori deux sens différents en mécanique quantique: 1) Une transition entre deux monopôles ayant des signes différents de la constante de charge, comme une transition entre un électron et un positron. 2) Une transition entre les deux composantes chirales d'un même monopôle, avec une même constante de charge mais des valeurs propres différentes de l'opérateur $G = g\gamma_5$. On peut donc, en principe, avoir quatre cas (voir première référence [9]):

$$\begin{array}{ll} \mathrm{m}^{\,+} & : \text{ monopôle gauche (composante } \xi\text{) de charge g} > 0 \\ \overline{m}^{\,+} & : \text{ antimonopôle droit (composante } \eta\text{) de charge g} > 0 \\ \mathrm{m}^{\,-} & : \text{ monopôle gauche (composante } \xi\text{) de charge g} < 0 \\ \overline{\mathrm{m}}^{\,-} & : \text{ antimonopôle droit (composante } \eta\text{) de charge g} < 0 \end{array} \qquad (7,5)$$

Exprimons alors la P-invariance en explicitant (7,1) et en changeant les signes des composantes de B_μ selon (5,3), mais *sans changer la constante de charge magnétique*, contrairement à ce qui était indiqué (nous verrons tout de suite pourquoi) :

$$\Big\{-\gamma_1\partial_1 - \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 + \gamma_4\partial_4 \\ - \frac{g}{\hbar c}\left(\gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 - \gamma_4 B_4\right)\gamma_5\Big\}\psi = 0 \qquad (7,6)$$

Comme ∂_μ et B_μ varient en sens contraire et γ_4 et γ_5 anticommutent, (7,6) redonne l'équation initiale (7,1) si on la mutiplie par γ_4. On a donc, pour l'équation (7,1), la P-invariance:

$$P : g \;\rightarrow\; g \;;\;\; x_k \;\rightarrow\; -\,x_k \;,\; x_4 \;\rightarrow\; x_4 \;; \\ B_k \;\rightarrow\; B_k \;;\;\; W \;\rightarrow\; -\,W \;;\;\; \psi \;\rightarrow\; \gamma_4\,\psi \qquad (7,7)$$

où la constante de charge magnétique ne change pas, ce qui semble contraire à (5,3), mais il n'en est rien. En effet, si nous partons de la représentation de Weyl (7,3), la loi (7,7) prend la forme:

$$\begin{aligned} P:\quad & g \to g\ ;\ x_k \to -x_k\ ,\ x_4 \to x_4\ ; \\ & B_k \to B_k\ ,\ B_4 \to -B_4\ ;\ \xi \leftrightarrow \eta \end{aligned} \tag{7,8}$$

On voit que, s'il est vrai que la constante de charge ne change pas, la parité échange les composantes chirales ξ et η, et donc les valeurs propres $+g$ et $-g$ de l'opérateur de charge. Elle inverse donc la charge du monopôle, comme il était dit dans la loi (5,3), mais ce n'est pas par un changement de signe de la constante de charge, c'est par un changement de chiralité: c'est bien ainsi que cela se comprenait dans le mémoire de Curie (voir Å2). D'après la nomenclature (7,5), nous aurons donc, suivant le signe $\pm$ de g (car, a priori, les valeurs $+g$ et $-g$ peuvent exister dans la nature):

$$P:\quad m^+ \leftrightarrow \overline{m}^{\,+} \qquad \text{ou} \qquad m^- \leftrightarrow \overline{m}^{\,-} \tag{7,9}$$

Voyons maintenant la conjugaison de charge. Pour cela, prenons le complexe conjugué de (7,1) en nous rappelant (5,4) et (6,2):

$$\begin{aligned} \Big\{ & -\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 \\ & \qquad - \frac{g}{\hbar c}\left(\gamma_1 B_1 - \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 + \gamma_4 B_4\right)\gamma_5 \Big\}\psi^* = 0 \end{aligned} \tag{7,10}$$

En multipliant par γ_2, nous retrouvons (7,1), qui est donc invariante par conjugaison de charge, mais *sans changement de signe de la constante g*:

$$C:\quad g \to g\ ;\ \psi \to \gamma_2\,\psi^* = \gamma_2\,\gamma_4\,\tilde{\overline{\psi}} \qquad \left(\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4\right) \tag{7,11}$$

Ici encore, cela paraît contraire à (5,3), mais en réalité, (7,11) s'écrit, en représentation de Weyl:

$$C:\quad g \to g\ ;\ \xi \to -i\,s_2\,\eta^*\ ;\ \eta \to i\,s_2\,\xi^* \tag{7,12}$$

Autrement dit, la conjugaison de charge conserve l'équation (7,1), ainsi que *le système* équivalent (7,3), sans changer le signe de la constante g mais en revanche, à l'intérieur du système (7,3), elle échange les composantes chirales, et donc les monopôles droit et gauche avec les valeurs propres $+g$ et $-g$ de l'opérateur de charge. On retrouve le changement de signe de la charge sous la même forme que dans (7,9):

$$C: \; m^{+} \quad \leftrightarrow \quad \overline{m}^{\,+} \;\; ou \;\; m^{\,-} \quad \leftrightarrow \quad \overline{m}^{\,-} \tag{7,13}$$

Venons en au renversement du temps, en écrivant (7,1) en y introduisant (5,3):

$$\begin{aligned}\Big\{&\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 + \gamma_3\partial_3 - \gamma_4\partial_4 \\ &- \frac{g}{\hbar c}\left(-\gamma_1 B_1 - \gamma_2 B_2 - \gamma_3 B_3 + \gamma_4 B_4\right)\gamma_5\Big\}\psi = 0\end{aligned} \tag{7,14}$$

En appliquant $-i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, qui commute avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, et anticommute avec γ_4 et γ_5, nous retrouvons l'équation (7,1) et la transformation de Racah paraît donc compatible avec (5,3):

$$\begin{aligned}T_{\text{Racah}}: g \;\to\; g \;;\;\; x_k \;\to\; x_k \;,\; x_4 \;\to\; -\,x_4 \;; \\ B_k \;\to\; -\,B_k \;,\;\; B_4 \;\to\; B_4 \;;\quad \psi \;\to\; -\,i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\psi\end{aligned} \tag{7,15}$$

Mais il faut encore vérifier ce que deviennent les composantes chirales, et pour cela nous devons transcrire (7,15) en représentation de Weyl:

$$\begin{aligned}T_{\text{Racah}}: \quad & g \;\to\; g \;;\; x_k \;\to\; x_k \;,\; x_4 \;\to\; -\,x_4 \;; \\ & B_k \;\to\; -\,B_k \;,\; B_4 \;\to\; B_4 \\ & \xi \;\to\; -\,i\,\eta \;;\;\; \eta \;\to\; i\,\xi\end{aligned} \tag{7,16}$$

On voit que la constante de charge ne change pas mais que la chiralité change par permutation de ξ et η et, par là-même, la charge du monopôle, en violation de la loi (5,3) sur laquelle on s'appuie. La transformation de Racah n'est donc pas admissible pour représenter le renversement du temps d'une charge magnétique. Cette conclusion est contraire à mes publications antérieures [9] car j'avais négligé, comme tout le monde, de m'assurer au préalable des variances P, T, C des grandeurs éléctromagnétiques, c'est à dire des lois (5,3). En revanche, la transformation antiunitaire du Å6 est valable ici aussi. En effet, prenons le complexe conjugué de (7,14), en tenant compte de (5,3):

$$\begin{aligned}\Big\{&-\gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2 - \gamma_3\partial_3 + \gamma_4\partial_4 \\ &+ \frac{g}{\hbar c}\left(\gamma_1 B_1 - \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 - \gamma_4 B_4\right)\gamma_5\Big\}\psi^* = 0\end{aligned} \tag{7,17}$$

En multipliant par $-i\gamma_3\gamma_1$ nous changerons le signe de γ_1 et γ_3 sans changer celui de γ_2, γ_4 et γ_5 et nous retrouverons l'équation initiale (7,1) ce qui donne la transformation:

$$\begin{aligned} T:\ & g \to g\ ;\quad x_k \to x_k\ ,\ x_4 \to -x_4\ ; \\ & B_k \to -B_k\ ,\ B_4 \to B_4\ ;\ \psi \to -i\gamma_3\,\gamma_1\,\psi^* \end{aligned} \tag{7,18}$$

mais nous aurons, cette fois-ci, en représentation de Weyl:

$$\begin{aligned} T:\ & g \to g\ ;\ x_k \to x_k\ ,\ t \to -t\ ; \\ & B_k \to -B_k\ ,\ W \to W\ ; \\ & \xi \to s_2\,\xi^*\ ;\ \eta \to s_2\,\eta^* \end{aligned} \tag{7,19}$$

et l'on voit que, contrairement à la transformation de Racah (7,16), les composantes chirales ne s'échangent plus et que la charge magnétique reste constante, conformément à la loi (5,3) d'où l'on est parti. Donc, parallèlement aux lois (6,11) pour l'électron, nous aurons les lois suivantes pour le monopôle:

$$\begin{aligned} P:\ & g \to g\ ;\ x_k \to -x_k\ ,\ x_4 \to x_4\ ; \\ & B_k \to B_k\ ;\ B_4 \to -B_4\ ;\ \psi \to \gamma_4\,\psi \\ T:\ & g \to g\ ;\ x_k \to x_k\ ,\ x_4 \to -x_4\ ; \\ & B_k \to -B_k\ ,\ B_4 \to B_4\ ;\ \psi \to -i\gamma_3\,\gamma_1\,\psi^* \\ C:\ & g \to g\ ;\ \psi \to \gamma_2\,\psi^* = \gamma_2\,\gamma_4\,\tilde{\overline{\psi}} \qquad \left(\overline{\psi} = \psi^+\gamma_4\right) \end{aligned} \tag{7,20}$$

Soit, sous la forme de Weyl:

$$\begin{aligned} P:\ & g \to g\ ;\ x_k \to -x_k\ ,\ t \to t\ ; \\ & B_k \to B_k\ ,\ W \to -W\ ;\ \xi \leftrightarrow \eta \\ T:\ & g \to g\ ;\ x_k \to x_k\ ,\ t \to -t\ ; \\ & B_k \to -B_k\ ,\ W \to W\ ;\ \xi \to s_2\,\xi^*\ ;\ \eta \to s_2\,\eta^* \\ C:\ & g \to g\ ;\ \xi \to -i\,s_2\,\eta^*\ ;\ \eta \to i\,s_2\,\xi^* \end{aligned} \tag{7,21}$$

Comme nous le disions au Å6, la question de la chiralité est beaucoup plus claire dans le cas magnétique que dans le cas électrique. En (7,3), nous avons deux équations séparées qui portent, l'une sur ξ et l'autre sur η; les formules (7,21) montrent qu'elles s'échangent par parité et par conjugaison de charge. On a donc *deux monopôles, l'un gauche et l'autre droit*, qui sont l'antiparticule l'un de l'autre. On voit sur (7,3) que le neutrino en est un cas particulier et que les monopôles décrits par les équations (7,1) ou (7,3) peuvent être considérés comme des neutrinos "magnétiquement excités". D'où la question posée dans nos précédentes publication: de tels monopôles ne pourraient-ils être produits dans des interactions faibles, auquel cas, leur forte interaction électromagnétique avec la matière (contrairement aux neutrinos) pourrait être une explication du manque de neutrinos solaires dans les observations terrestres. Soulignons encore une fois que le fait que, dans (7,21), *les lois P et C ne changent pas le signe de la constante de charge magnétique*, n'est pas contraire aux lois (5,3) car *la charge d'un monopôle change par chiralité.* Lors d'un renversement du temps la chiralité ne change pas et, par là-même, la charge magnétique ne s'inverse pas, contrairement à la charge électrique. Nous pouvons dire que, contrairement à l'électron:

Un antimonopôle n'est pas un monopôle qui remonte le cours du temps, c'est son image dans un miroir.

Il semble donc qu'on doive admettre qu'un monopôle de constante de charge $-g$ est une "autre particule" et non pas l'antiparticule du monopôle de charge $+g$.

8. Les variances P, T, C des grandeurs tensorielles.

Considérons maintenant les 16 grandeurs tensorielles de Dirac:

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \overline{\psi}\,\psi \;\; ; \;\; J_\mu = i\,\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi \;\; ; \;\; M_{\mu\nu} = -\,i\,\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\psi \;\; ; \\ &\Sigma_\mu = -\,i\,\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\psi \;\; ; \;\; \Omega_2 = -\,i\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\psi \end{aligned} \qquad (8,1)$$

Soit, en représentation de Weyl:

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \xi^+\eta + \eta^+\xi ; \Omega_2 = i\left(\xi^+\eta - \eta^+\xi\right) \\ &{\Omega_1}^2 + {\Omega_2}^2 = 4\left(\xi^+\eta\right)\left(\eta^+\xi\right) \\ &J_\mu = \{J_4, \mathbf{J}\} = \left\{i\left(\xi^+\xi + \eta^+\eta\right), -\left(\xi^+\mathbf{s}\xi - \eta^+\mathbf{s}\eta\right)\right\} \\ &\Sigma_\mu = \{\Sigma_4, \boldsymbol{\Sigma}\} = \left\{i\left(\xi^+\xi - \eta^+\eta\right), -\left(\xi^+\mathbf{s}\xi + \eta^+\mathbf{s}\eta\right)\right\} \\ &M_{\mu\nu} = \{M_{j4}, M_{jk}\} = \left\{\left(\xi^+\mathbf{s}\eta - \eta^+\mathbf{s}\xi\right), \left(\xi^+\mathbf{s}\eta + \eta^+\mathbf{s}\xi\right)\right\} \end{aligned} \qquad (8,2)$$

On sait que Ω_1 et Ω_2 sont des invariants de Lorentz, J_μ et Σ_μ des vecteurs et $M_{\mu\nu}$ un tenseur antisymétrique. On verra, dans le Tableau

1 leurs variances P, T, C ainsi que des courants *chiraux* [4] qui ressortent de (8,2) et sur lesquels nous reviendrons:

$$X_\mu = \left\{ i\, \xi^+ \xi,\; -\, \xi^+ \mathbf{s}\, \xi \right\} \;;\; Y_\mu = \left\{ i\, \eta^+ \eta,\; \eta^+ \mathbf{s}\, \eta \right\} \qquad (8,3)$$

On voit sur (8,2), que:

$$J_\mu = X_\mu + Y_\mu \;;\; \Sigma_\mu = X_\mu - Y_\mu \qquad (8,4)$$

Nous donnerons, dans la 2ième Partie, des relations algébriques entre toutes ces grandeurs. Voici maintenant le tableau des variances P, T, C qui découlent de (6,11), (6,19), (7,20) et (7,21), en accord avec la loi (II):

Tableau 1

		P	T	C
ψ	$\rightarrow$	$\gamma_4 \psi$	$-i\gamma_3\gamma_1\psi^*$	$\gamma_2\psi^*$
ξ	$\rightarrow$	η	$s_2\xi^*$	$-is_2\eta^*$
η	$\rightarrow$	ξ	$s_2\eta^*$	$is_2\eta^*$
Ω_1	$\rightarrow$	Ω_1	Ω_1	$-\Omega_1$
J_4	$\rightarrow$	J_4	J_4	J_4
J_k	$\rightarrow$	$-J_k$	$-J_k$	J_k
M_{4k}	$\rightarrow$	$-M_{4k}$	M_{4k}	M_{4k}
M_{jk}	$\rightarrow$	M_{jk}	$-M_{jk}$	M_{jk}
Σ_4	$\rightarrow$	$-\Sigma_4$	Σ_4	$-\Sigma_4$
Σ_κ	$\rightarrow$	Σ_κ	$-\Sigma_\kappa$	$-\Sigma_\kappa$
Ω_2	$\rightarrow$	$-\Omega_2$	$-\Omega_2$	$-\Omega_2$
$\xi^+\xi$	$\rightarrow$	$\eta^+\eta$	$\xi^+\xi$	$\eta^+\eta$
$\xi^+s_\kappa\xi$	$\rightarrow$	$\eta^+s_\kappa\eta$	$-\xi^+s_\kappa\xi$	$-\eta^+s_\kappa\eta$
$\eta^+\eta$	$\rightarrow$	$\xi^+\xi$	$\eta^+\eta$	$\xi^+\xi$
$\eta^+s_\kappa\eta$	$\rightarrow$	$\xi^+s_\kappa\xi$	$-\eta^+s_\kappa\eta$	$-\xi^+s_\kappa\xi$

Introduisons maintenant la dimension physique des grandeurs en tenant compte de la variance P, T, C des charges. Nous désignons par **P** et **M** les polarisations électrique et magnétique de l'électron. La variance de la charge électrique est prise en (5,3), mais la charge magnétique est modifiée par la mécanique quantique, comme en (7,20) et (7,21): **les changements de signe ne proviennent plus de la constante** g **mais de la chiralité**. Nous donnons, en outre, la variance des *champs* et des *potentiels*, mais à la différence de (4,2) et (5,3), les champs ne sont plus extérieurs, mais *émis par les courants.* Les variances P et T sont les mêmes, mais pas la variance C. Pour satisfaire aux lois P et T, il suffit de s'assurer que les variances précédemment trouvées pour les champs s'accordent avec celles obtenues pour les courants; mais pour C, ce sont les courants (la cause) qui imposent leur variance aux *champs émis* (l'effet) grâce à la covariance, imposée par les lois de symétrie de Curie (Å2) aux équations de Maxwell (c'est pourquoi nous mettons le suffixe "émis", dans le tableau):

$$\Box A_\mu = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\, e\, J_\mu \;\; ; \quad \Box B_\mu = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\, g\, \Sigma_\mu \tag{8,5}$$

soit, sous forme explicite:

$$\begin{aligned} \Box\, V &= \frac{4\pi}{c}\, e\, J_4 \;\; ; \quad \Box\, \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\, e\, \mathbf{J} \;\; ; \\ \Box\, W &= \frac{4\pi}{c}\, g\, \Sigma_4 \;\; ; \quad \Box\, \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\, g\, \mathbf{\Sigma} \end{aligned} \tag{8,6}$$

Voici donc le tableau:

Tableau 2

		P	T	C
e	$\to$	e	$-e$	$-e$
g	$\to$	g	g	g
eJ_4	$\to$	eJ_4	$-eJ_4$	$-eJ_4$
$e\mathbf{J}$	$\to$	$-e\mathbf{J}$	$e\mathbf{J}$	$-e\mathbf{J}$
$\mathbf{P} = \frac{-e\hbar}{2m_0c} M_{4k}$	$\to$	$-\mathbf{P}$	$-\mathbf{P}$	$-\mathbf{P}$
$\mathbf{M} = \frac{-e\hbar}{2m_0c} M_{kl}$	$\to$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$	$-\mathbf{M}$
$g\Sigma_4$	$\to$	$-g\Sigma_4$	$g\Sigma_4$	$-g\Sigma_4$
$g\Sigma$	$\to$	$g\Sigma$	$-g\Sigma$	$-g\Sigma$
$\mathbf{E}$	$\to$	$-\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}_{(\text{émis})}$
$\mathbf{H}$	$\to$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}$	$-\mathbf{H}_{(\text{émis})}$

V	$\rightarrow$	V	$-V$	$-V_{(\text{émis})}$
$\mathbf{A}$	$\rightarrow$	$-\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$-\mathbf{A}_{(\text{émis})}$
W	$\rightarrow$	$-W$	W	$W_{(\text{émis})}$
$\mathbf{B}$	$\rightarrow$	$\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$	$\mathbf{B}_{(\text{émis})}$

On vérifie facilement, sur ce tableau, la covariance des polarisations et des champs, des courants et des potentiels et on voit que ce sont les grandeurs avec les coefficients physiques qui ont les bonnes variances. Remarquons également que la T-invariance de $e\mathbf{J}$ donnée dans ce Tableau, qui résulte de (6,10), est bien en accord avec ce que nous disions au Å3 pour justifier le choix de la Loi II dans les transformations (3,3). Enfin, le Tableau I donne un nouvel argument en faveur de la loi de transformation T qui y figure, et contre la transformation de Racah. En effet, on voit que, dans ce Tableau, le premier invariant de Dirac Ω_1, est un invariant vrai dans l'espace-temps, car il est en même temps P et T- invariant, tandis que Ω_2 est un pseudo-invariant qui change de signe pour P et T. Or la T-invariance de Ω_1 est très importante car elle assure la T- invariance du lagrangien de Dirac:

$$L = \hbar c \left\{ \overline{\psi}\, \gamma_\mu \left(\frac{1}{2}\, [\partial_\mu] \;+\; i\, \frac{e}{\hbar c}\, A_\mu \right) \psi + \frac{m_0 c}{\hbar}\, \overline{\psi}\psi \right\} \qquad \left\{ [\partial_\mu] = (\partial_\mu \rightarrow) - (\leftarrow \partial_\mu) \right\} \tag{8,7}$$

et par là-même la T-invariance de la densité d'énergie:

$$w = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \;+\; \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} \right) \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} \right)} \;-\; L \tag{8,8}$$

Au contraire, avec la transformation T de Racah, nous aurions:

$$T_{\text{Racah}} \;:\; \Omega_1 \;\rightarrow\; -\,\Omega_1 \;\; \text{d'où} : \;\; w \;\rightarrow\; -\,w \tag{8,9}$$

propriété qui suffit à éliminer cette transformation: n'oublions pas qu'une densité d'énergie est la composante T_{44} du tenseur d'impulsion-énergie, et qu'elle varie comme le carré d'un temps, d'où sa T-invariance.

Remerciements: Je remercie vivement Olivier Costa de Beauregard, Daniel Fargue et Jacques Robert avec lesquels j'ai eu de précieuses discussions sur les sujets abordés dans ce travail.

Références

[1] P.A.M. Dirac, *Directions in Physics*, John Wiley & Sons, N.Y., London, Sidney, Toronto, 1978.

[2] K. Moller, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **11**, (1949), 251.

[3] A. Einstein, *Physica*, **5**, (1925), 330.

[4] G. Lochak, *La géométrisation de la physique*, Flammarion, Paris, 1994.

[5] V.B.Berestetsky, E.M. Lifschitz et L.P Pitaevsky, *Théorie quantique relativiste*, "Naouka", Moscou (1968) ; trad. française, Mir, Moscou, 1972.

[6] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition, John Wiley & Sons, N.Y. 1975.

[7] P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, *Journal de physique*, 3e série, t. III, (1894), 393; *Sur la possiblité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre*, id. p. 415. Mémoires réédités à l'occasion du centenaire de leur centenaire: *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **19**, n° 3 (1994), 137.

[8] G. Lochak, in: *Advanced Electromagnetism* (Foundations, Theory and Applications), T.W. Barrett and D.M. Grimes ed., Worl Scientific Publishing Compagny, Singapore, 1995.

[9] G. Lochak, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **8** (1983) 345 ; **9** (1984) 5. *International Journal of Theoretical Physics*, **24** (1985) 1019; Contrib. à: *Information, Complexity and Control in Quantum Physics*, A. Blaquière, S. Diner and G. Lochak ed., Springer, Wien, N.Y., 1987.

[10] L. de Broglie, *Une nouvelle théorie de la lumière, la mécanique ondulatoire du photon*, *Hermann*, Paris, **I**, 1940, **II**, 1942.

[11] L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*, Gauthier-Villars, Paris,1943.

[12] G. Lochak, *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **20** (1995), 111.

[13] G. Racah, *Nuovo Cimento*, **14** (1937), 322.

[14] A.A. Sokolov et I. M. Ternov, *L'Electron relativiste*, Nauka, Moscou, 1974 (en russe).

[15] O. Costa de Beauregard, in *The Wave-Particle Dualism* (S. Diner, D. Fargue, G. Lochak & F. Selleri ed), Reidel, Dordrecht, 1983.

[16] J.M. Jauch & F. Rohrlich, *The theory of Photons and Electrons*, Addison Wesley, 1955.

(Manuscrit reçu le 15 avril 1996, révisé le 14 novembre 1996)