Louis de Broglie

Divers problèmes concernant les ondes et les corpuscules

Cours professé à l'Institut Henri Poincaré en 1956–1957

Les notions de corpuscule et de champs en physique classique.

Le développement de la physique classique depuis trois siècles s'est fait autour de deux idées qu'il a paru nécessaire d'introduire pour traduire la notion de corpuscule et celle de champ. L'idée de corpuscule s'introduit quand on remarque que les corps étendus étant divisibles, il est naturel, pour analyser leurs propriétés, d'en considérer de très petites fractions. On est alors conduit à étudier les propriétés mécaniques de ces "corpuscules" et leurs interactions et à chercher à en tirer une explication des propriétés des grandes masses de matière. C'est en suivant cette voie que s'est développée la Mécanique classique avec ses deux grandes parties : la Mécanique du point matériel qui analyse les propriétés dynamiques des corpuscules et leurs interactions et la Mécanique des systèmes de points matériels qui considère les corps et en particulier les corps solides comme formés de points matériels et cherche à ramener leurs propriétés mécaniques à celle de leurs constituants à l'aide d'hypothèses appropriées dont la plus importante est le "principe de l'égalité de l'action et de la réaction".

Cette première ligne d'idées se trouvait entièrement en accord avec la vielle hypothèse atomique déjà proposée par certains philosophes de l'Antiquité suivant laquelle toutes les formes de la matière seraient formées par des assemblages d'entités insécables, "les atomes". Bien que nous sachions aujourd'hui que les atomes tels que nous les définissons sont des systèmes très complexes et qui n'ont rien d'insécable, nous avons toujours l'impression qu'il existe dans la matière et mieux dans le rayonnement des unités, électrons, protons, neutrons, photons, etc, auxquels la vieille notion de corpuscule est au moins dans une certaine mesure toujours applicable de sorte qu'elle a conservé toute sa valeur pour l'interprétation des phénomènes en Microphysique.

La notion de corpuscule et son idéalisation par l'image de point matériel a joué un rôle très important dans l'édification de la cinématique et de la mécanique classique. En attribuant au corpuscule des coordonnées fonctions du temps au cours de son mouvement, on est arrivé à définir les notions de vitesse, d'accélération, etc, et à constituer la cinématique. Puis pour trouver les mouvements d'un corpuscule sous l'influence des interactions qu'il subit de la part d'autres corpuscules, la mécanique classique introduit la notion de forces s'exerçant sur un corpuscule et modifiant son mouvement, et après la découverte du principe de l'inertie, on a compris qu'une force s'exerçant sur un corpuscule doit être une cause de variation non pas de la position comme le croyait Aristote, mais de la vitesse de sorte que c'est l'accélération et non la vitesse qui doit être reliée à la force. C'est ainsi que Newton est arrivé à la célèbre équation $F = m\gamma$ qui exprime la proportionnalité de l'accélération à la force. Comme elle s'exprime en composantes par l'équation $m\frac{d^2x}{dt} = F_x \ldots$, elle fait reposer la dynamique du corpuscule sur des équations *différentielles* ne faisant intervenir qu'une seule variable : le temps t.

L'image du corpuscule décrivant au cours du temps une trajectoire linéaire obéissant aux équations différentielles du mouvement de la mécanique newtonienne (ou à leur généralisation envisagée en dynamique de la relativité) relève de la conception du discontinu. C'est au contraire de la notion du continu que relève l'image des champs. Cette image s'est certainement présentée à l'esprit des physiciens dès qu'ils ont eu l'idée de la force définie autour d'un ou plusieurs "centres de force" par une fonction $f(x, y, z, t)$. Dès que Newton eut découvert la loi de la gravitation la question se posait pour la force gravifique et on devait aboutir à la théorie mathématique du potentiel newtonien qui est la représentation analytique du "champ de gravitation". Nous reviendrons plus loin sur la théorie des champs de force.

Mais la théorie du champ devait se développer au XVIII^e et XIX^e siècles dans les tentatives théoriques de représentation des propriétés des milieux continus : théorie de l'élasticité pour les solides, hydrodynamique pour les liquides ou plus généralement mécanique des fluides pour les fluides et les gaz. Pour la description de ces milieux supposés, au moins provisoirement, continus, on définit toutes les grandeurs : déplacement et vitesse en chaque point, pression, tensions comme des fonctions du lieu et de l'instant, c'est à dire comme des grandeurs du champ qui sont liées entre elles par des équations qui ne sont plus des équations différentielles, mais des équations aux dérivées partielles. Naturellement cette représentation des solides, des liquides ou des gaz comme des milieux entièrement continus peut n'être considérée que comme une simple vue d'ensemble et on peut penser, conformément à tout le développement de la physique moderne, qu'en réalité la matière est formée d'un nombre énorme de corpuscules, élémentaires ou non, dont les théories continues ne donnent qu'une représentation globale. Cette introduction des corpuscules dans une théorie du champ, c'est à dire du discontinu dans une image continue, est rendue possible en mécanique des fluides par exemple, par la possibilité de considérer le vecteur vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ comme représentant la vitesse de la particule de fluide qui passe au point (x, y, z) à l'instant t. La trajectoire décrite au cours du temps par chaque particule du fluide est ainsi définie ainsi que son mode de description. Si le mouvement est permanent, les enveloppes des vecteurs vitesse, qui sont appelés lignes de courant, dessinent les trajectoires des particules; pour les mouvements non permanents lignes de courant et trajectoires particulaires sont distincts. L'introduction classique en hydrodynamique de la dérivée totale

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

correspond aussi à la considération du mouvement d'une particule puisque $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée prise en suivant le mouvement d'une particule. Le champ hydrodynamique des vitesses $\vec{v}(x, y, z)$ donne donc une sorte de schéma global des mouvements possibles d'une particule du fluide ou, si l'on préfère, une image statistique de l'ensemble des mouvements d'une infinité de particules constituant le fluide. On aperçoit ainsi que c'est à l'aide du champ des vecteurs vitesses (ou si l'on veut des vecteurs courants $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_y$) que l'on pourrait arriver, par une image hydrodynamique, à réconcilier le continu et le discontinu, en réalisant une synthèse de l'image du corpuscule et de l'image du champ.

Mais c'est dans la théorie des champs de force, notamment dans celle du champ de gravitation, que s'est précisée tout d'abord la question des rapports de la matière et du champ. Le potentiel newtonien V dont dérive le champ de gravitation $\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ est défini autour de masses agissantes m_i supposées ponctuelles (corpuscules de matière) par

$$V(\vec{r}) = -\sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

La force de gravitation qui s'exerce sur un corpuscule de masse m_k placé en $\vec{r}_k$ est

$$\vec{f} = -m_k(\overrightarrow{\text{grad}} V)_{r_k} = -\sum \frac{m_i m_k}{|r_i - r_k|^2} \quad ,$$

le signe $-$ signifiant qu'il y a attraction entre m_i et m_k. On peut considérer les diverses masses ponctuelles présentes comme étant les *sources* du champ gravifique qui les entoure. L'analyse des propriétés du champ de gravitation permet de montrer que le potentiel V vérifie dans le vide l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0, \text{ avec } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Mais il reste à exprimer que le champ gravifique résulte de la présence de masses m_i voisine de sorte que ces masses sont les sources du champ. Si l'on admet que les corpuscules de matière ne sont pas ponctuels, mais sont des petits corps étendus à l'intérieur desquels on peut définir une densité de masse ρ, on pourra écrire pour le potentiel newtonien aussi bien dans le vide que dans la matière l'équation de Poisson

$$\Delta V = +4\pi\rho$$

Si l'on revient au cas idéal des corpuscules ponctuels, on pourra écrire pour le i-ème corpuscule $\rho = m_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ où δ est la fonction singulière de Dirac et l'on aura

$$\Delta V = 4\pi \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Tous ces résultats, dont la démonstration mathématique fait essentiellement intervenir la formule de Green, sont bien connus. On voit déjà apparaître ici une circonstance sur laquelle nous serons amenés à insister longuement: dans l'équation aux dérivées partielles qui règle la répartition du champ dans l'espace, on introduit au second membre, pour ainsi dire de l'extérieur, comme sources du champ les corpuscules de matière étendus ou ponctuels, puis on est obligé de dire que si l'on place un corpuscule d'épreuve de masse m_k au point $\vec{r}$ il subira la force gravifique $-m_k(\overrightarrow{\text{grad}} V)_{\vec{r}_k}$, le potentiel étant défini, grâce à l'équation de Poisson, par l'ensemble des autres corpuscules. On a l'impression, en y réfléchissant, que cette manière d'exprimer les choses est un peu bâtarde et n'est pas définitive. La vraie solution du problème serait, semble-t-il, une "incorporation" plus complète du corpuscule dans le champ qui expliquerait à la fois pourquoi le champ dépend de la présence des corpuscules et pourquoi le mouvement des corpuscules dépend du champ.

On remarquera encore que cette théorie classique du champ de gravitation repose, comme il est bien connu, sur la notion de propagation instantanée des actions à distance, ce qui exclut toute idée de propagation

progressive et explique l'apparition dans l'équation de Poisson du seul opérateur spatial Δ et non d'un opérateur contenant le temps tel que le Dalembertien
$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$
qui traduit l'existence de propagation avec la vitesse c.

L'un des faits capitaux de l'histoire de la physique au XIX^e siècle a été le développement de nos connaissances sur l'électricité aboutissant à la constitution de la théorie électromagnétique de Maxwell-Lorentz. Le champ électromagnétique y est défini par les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en chaque point et à chaque instant ou, si l'on préfère, par les deux potentiels $\vec{A}$ - potentiel vecteur et V - potentiel scalaire, tels que

$$\vec{H} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}V \quad .$$

Dans le vide, les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ évoluent au cours du temps suivant les équations :
$$-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H}$$
et sont soumis constamment aux deux conditions

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \quad .$$

On en déduit que les champs et les potentiels se propagent dans le vide avec la vitesse finie c, c'est à dire que l'on a

$$\Box\vec{H} = 0, \quad \Box\vec{E} = 0, \quad \Box\vec{A} = 0, \quad \Box V = 0 \quad .$$

Mais le champ électromagnétique a comme source les charges électriques immobiles ou en mouvement. Introduisant l'idée imposée par l'expérience que les charges électriques sont portées par des corpuscules électrisés qui existent normalement dans la matière, Lorentz, pour retrouver les équations macroscopiques de Maxwell, écrit les équations de l'électromagnétisme sous la forme :

$$\text{équations d'évolution} \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v}$$
$$\text{équations de condition} \qquad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0, \quad \mathrm{div}\,E = 4\pi\rho$$

où ρ est la densité locale de l'électricité dans les corpuscules électrisés, et $\vec{v}$ la vitesse locale de l'électricité. On voit alors apparaître dans les équations de la seconde colonne les termes en $\rho\vec{v}$ qui représentent les sources du champ électromagnétique et sont analogues au terme en ρ dans l'équation de Poisson. On démontre que de ces équations résultent

1) la conservation de l'électricité exprimée par

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

2) la propagation des potentiels exprimée par les équations

$$\Box\vec{A} = 4\pi\rho\vec{v} \qquad \Box V = 4\pi\rho$$

dont les solutions sont les “potentiels retardés” bien connus. Les deux dernières équations expriment la propagation des potentiels avec la vitesse finie c à partir des “sources” représentées par les termes ρ et $\rho\vec{v}$. Dans les phénomènes statiques $\vec{v} = 0$ et $\vec{A} = 0$ et l'on a

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

équation analogue à celle de Poisson avec un changement de signe au second membre dû au fait que si deux masses (toujours positives) exercent l'une sur l'autre une *attraction* gravifique, deux charges de même signe exercent l'une sur l'autre une *répulsion* électrostatique.

Mais ici encore ces équations, qui représentent l'influence de la présence et du mouvement des charges sur l'évolution des champs, ne nous disent rien de l'influence du champ électromagnétique sur le mouvement des charges. Ici encore il faut introduire la dynamique (newtonienne ou plutôt einsteinienne des corpuscules) en faisant une hypothèse sur la forme de “force” que le champ exerce sur la particule. Dans le cas de la gravitation classique, il suffirait de poser $f = m_k(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V)_{\vec{r}_k}$ pour la force exercée par le champ gravifique dérivant du potentiel V sur la masse m_k placée en $\vec{r}_k$, ce qui revient à dire que la masse $\rho d\tau$ contenue dans un élément $d\tau$ subit la force $\rho d\tau(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V)$. Dans la théorie électromagnétique sous la forme de Lorentz, il faut prendre une expression plus compliquée de la force que Lorentz a précisée en disant : si un élément de volume $d\tau$ contient une charge électrique $\rho d\tau$ animée de la vitesse $\vec{v}$, cet élément de charge placé dans le champ électromagnétique $\vec{E}, \vec{H}$ subit la force élémentaire (force de Lorentz) :

$$\vec{f}d\tau = \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{H}).$$

Ici encore on retrouve une représentation bâtarde qui dissocie l'action de la charge sur le champ de l'action du champ sur la charge et l'on souhaiterait une théorie plus synthétique qui, en *incorporant* davantage les charges dans le champ, donnerait à la fois l'évolution du champ et le mouvement des charges, sans nécessiter l'introduction de la "force" comme notion autonome.

D'ailleurs la théorie électromagnétique de Lorentz présente des inconvénients qui sont bien connus, notamment la nécessité démontrée par Poincaré d'introduire, pour assurer la stabilité de l'électron, si on l'imagine comme un petit corpuscule étendu dont toutes les parties se repoussent mutuellement, une pression d'origine inconnue, la pression de Poincaré, pour contrebalancer la tendance de l'électron à exploser. Comme la théorie de Lorentz ne peut aucunement expliquer l'origine de cette pression, cette théorie doit évidemment être considérée comme incomplète. On a donc tout naturellement fait plusieurs tentatives depuis cinquante ans pour remplacer les équations de Maxwell-Lorentz par des équations d'où seraient éliminés les termes ρ et $\rho\vec{v}$, donnés de l'extérieur, et ils seraient remplacés par des fonctions du champ électromagnétique, *un électron apparaissant ainsi comme une petite région de forte concentration du champ.* La première en date (je le crois du moins) de ces tentatives, a été celle de Mie qui est remarquable, celle beaucoup plus récente de M. Max Born a été aussi très remarquée. Nous allons les résumer rapidement.

Théorie de Mie [1,2].

Nous partirons des équations de l'électromagnétisme écrites en distinguant les inductions $\vec{B}$ et $\vec{D}$ et les champs $\vec{H}$ et $\vec{E}$ comme on le fait dans la théorie macroscopique de Maxwell. On a alors (en unités rationalisées)

$$1)\quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$2)\quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\vec{H} = -\vec{\imath} \quad \mathrm{div}\,D = \rho$$

$$3)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\imath} = 0$$

$$4)\quad -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \vec{E} \quad \mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$$

En notations relativistes, on écrit ces équations en introduisant le quadrivecteur courant s^i de composantes ρ, i_x, i_y, i_z, le quadrivecteur potentiel φ_i de composantes V, A_x, A_y, A_z et *deux* tenseurs antisymétriques F_{ik} et H_{ik} tels que $F_{i4} = E_i$, $F_{ik} = B_j$ où ikj est une permutation paire de 1,2,3 et $H_{i4} = D_i$ et $H_{ik} = H_j$ où ikj est une permutation paire de 1,2,3.

On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0 \\
&2) \quad \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s^i \\
&3) \quad \frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0 \\
&4) \quad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

Dans la théorie de Lorentz où l'on identifie $\vec{E}$ et $\vec{D}$, $\vec{H}$ et $\vec{B}$, on pose $F^{ik} = H^{ik}$.

Si l'on connaissait les φ_i et les H^{ik} (c'est à dire $\vec{A}, V, \vec{H}, \vec{D}$) en fonction de s^i et des F^{ik} (c'est à dire de $\vec{i}, \rho, \vec{E}, \vec{B}$), nous aurions dix équations d'évolution (contenant la dérivée $\partial/\partial t$) entre dix grandeurs. Les équations de condition $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{H}$ sont compatibles avec ces équations d'évolution, c'est à dire que, si on les suppose satisfaites au début, elles continuent à l'être ensuite : en effet, il résulte des équations d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} - \operatorname{rot} \vec{A}) = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{D}),$$

Dans la théorie de Lorentz où l'on pose $\vec{H} = \vec{B}$ et $\vec{E} = \vec{D}$, ρ et $\vec{i}$ ne sont pas connus en fonction de $\vec{A}$ et de V, ce qui oblige à admettre, nous l'avons vu, comme hypothèse supplémentaire, la loi de force de Lorentz. La théorie de Mie a eu pour but de supprimer cette hypothèse supplémentaire. Il a été ainsi amené dans le cas statique à considérer $-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ (qui est égal à $\vec{E}$) comme une sorte de pression équilibrant l'action de $\vec{E}$.

Introduisons maintenant la conservation de l'énergie par la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0$$

où W est la densité d'énergie et $\vec{S}$ le vecteur de Poynting donnant le flux de l'énergie, avec $\delta W = \vec{H}\delta\vec{B} + \vec{E}\delta\vec{D}$ et $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$.

Des équations (1) et (2) nous tirons

$$\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \mathrm{div}[\vec{E} \wedge \vec{H}] = -(\vec{E} \cdot \vec{i}) \qquad (a)$$

Au second membre figure (changé de signe) le travail du champ sur les charges : pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il doit être égal à $\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\, S$.

Or les équations (3) et (4) nous donnent

$$V\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{i}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \mathrm{div}(V\vec{i}) = -(\vec{E} \cdot \vec{i})$$

En retranchant de (a) et en posant

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} - V\vec{i}$$

on obtient bien

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{S} = 0$$

si l'on pose

$$\delta W = -V \cdot \delta\rho - \vec{i} \cdot \delta\vec{A} + \vec{H} \cdot \delta\vec{B} + \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$$

W et $\vec{S}$ se rapportent ici à l'énergie électromagnétique non liée aux charges. La présence du terme $-V\vec{i}$ dans $\vec{S}$ signifie que les électrons entraînent avec eux leur énergie.

δW a été exprimé à l'aide des variations des grandeurs ρ, $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{D}$. Il est plus rationnel de l'exprimer à l'aide des grandeurs tensionnelles φ et F, c'est à dire en fonction des variations des grandeurs V, $\vec{A}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Pour y parvenir, Mie envisage la fonction de Lagrange

$$L = W - \vec{E} \cdot \vec{D} + \rho V$$

telle que

$$\delta L = \vec{H} \cdot \delta\vec{B} - \vec{D} \cdot \delta\vec{E} - \vec{i} \cdot \delta\vec{A} + \rho\delta V \quad .$$

Si l'on connaît L comme fonction des φ^i et des F^{ik}, donc de $\vec{A}$, V, $\vec{B}$, et $\vec{E}$, les grandeurs $\vec{H}$, $\vec{D}$, ρ et $\vec{i}$ sont déterminées et l'on a

$$\delta L = \frac{1}{2} H^{ik} \delta F_{ik} + s^i \delta \varphi_i. \tag{b}$$

L étant un invariant, la fonction de Lagrange doit être une fonction des invariants que l'on peut former avec les φ_i et les F_{ik}. Ces invariants peuvent se ramener à L :

$$\varphi_i \varphi^i \quad , \quad \frac{1}{2} F^{ik} F_{ik} \quad , \quad \sum \pm F_{ik} F_{lm}$$

(où l'on prend le signe + ou − suivant que $iklm$ est une permutation paire ou impaire de 1,2,3,4) et enfin la longueur du vecteur $F_{ik}\varphi^i$.

L doit donc être une fonction convenablement choisie de ces invariants. La théorie de Lorentz pose

$$L = \frac{1}{2} F^{ik} F_{ik} = \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \quad \text{avec } B = H$$

Dans la théorie de Mie, le tenseur énergie–impulsion T_{ik} est donné par la formule générale

$$T_i^k = \frac{\partial L}{\partial F_{kr}} F_{ir} + \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} \varphi_i - \hbar \delta_{ik}$$

soit

$$T_i^k = F_{ir} H^{kr} + \varphi_i s^k - L \delta_i^k$$

On peut, ayant ainsi défini L, appliquer le principe de moindre action sous la forme $\delta \int L dw = \int \delta L dw = 0$ où dw est l'élément du volume espace-temps dont la forme générale est $\sqrt{g}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. On fait varier les φ_i de $\delta\varphi_i$, ce qui entraîne pour les F_{ik} la variation

$$\delta F_{ik} = \frac{\partial \delta \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta \varphi_k}{\partial x^i} \quad ,$$

d'où

$$\delta L = s^i \delta \varphi_i + H^{ik} \frac{\partial \delta \varphi_i}{\partial x^k}$$

Le principe de moindre action donne alors

$$\delta \int L dw = \int \left[s^i - \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} \right] \delta\varphi_i dw$$

et les crochets $s^i - \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k}$ doivent donc être nuls. D'où la conclusion que, si l'on admet la relation (1), le principe d'action stationnaire entraîne les équations (2). Donc si l'on admet la relation (4) entre champs et potentiels qui entraînent les équations (1) et si l'on se donne L en fonction des φ_i et des F_{ik}, ce qui permet de calculer les H^{ik} en vertu de (b) par

$$H^{ik} = \frac{\partial L}{\partial F^{ik}}$$

les s^i sont déterminés par

$$s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k}$$

et obéissant à $\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0$. Ainsi la donnée de L en fonction des potentiels $\vec{A}$ et V et des grandeurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ déterminent tout le champ électromagnétique *y compris la présence et le mouvement des charges* de sorte que, conformément au programme que l'on s'était assigné, le mouvement des charges est déterminé par l'évolution du champ. Pratiquement, les charges devront être considérées comme localisées dans de très petites régions (définissant le corpuscule électrisé où le champ a des valeurs très élevées). Nous arrivons ainsi à l'idée que le champ électromagnétique doit comprendre de petites régions de très grandes concentrations qui correspondent à l'image des corpuscules électrisés. Nous retrouverons cette image du "champ en bosses" quand nous parlerons des conceptions d'Einstein sur les corpuscules.

Il est intéressant de pousser un peu les calculs dans le cas où l'on adopte dans la théorie de Mie une forme simple pour L. Posons

$$L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w\left(\sqrt{\varphi_i \varphi^i}\right)$$

où w est une fonction inconnue de la longueur du quadrivecteur potentiel et bornons au cas statique où $\sqrt{\varphi_i \varphi^i} = V$. Alors $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{\imath}$ et $\vec{A}$ sont nuls et l'on a simplement

$$L = -\frac{1}{2} E^2 + w(V)$$

avec

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{D} \quad \text{et} \quad \text{div}\, \vec{D} = \rho = \frac{\partial L}{\partial V} = w'(V)$$

La densité ρ serait alors une fonction universelle de V et on aurait

$$\Delta V + w'(V) = 0$$

On voit que, sauf le cas trop particulier sans doute [1], où $w'(V)$ se réduit à une fonction linéaire de V, la non-linéarité va s'introduire dans les équations du champ. On commence à voir que la structure des champs à bosses ne pourrait sans doute être décrite qu'à l'aide d'équations non linéaires.

Si $w(V)$ n'est pas une fonction impaire ayant une dérivée paire, l'équation $\Delta V + w'(V) = 0$ ne se conserve pas quand on change V en $-V$, ce qui semble correspondre à la différence essentielle qui semble exister dans la nature entre les charges positives et les charges négatives : cet aspect de la théorie paraît donc satisfaisant. Par contre, il y a des difficultés dans le cas des champs variables avec présence des charges de signes contraires, car alors $\varphi_i \varphi^i = V^2 - A^2$ peut s'annuler en certains points de l'espace ce qui veut dire que $\sqrt{\varphi_i \varphi^i}$ pourrait devenir imaginaire dans certaines régions de l'espace. Il y a là une difficulté pour la théorie de Mie dans le cas que nous envisageons.

Mais des conséquences intéressantes se présentent quand nous considérons le cas d'une charge unique immobile en un point de l'espace. Nous pouvons alors admettre que le problème comporte une symétrie sphérique et écrire l'équation en V sous la forme :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + w'(V) = 0 \qquad (c)$$

Il est naturel d'astreindre $V(r)$ à être nulle à l'infini et par suite de poser

$$V(r) = \frac{e_0}{r} + \frac{e_1}{r^2} + \dots \quad \text{pour } r \to \infty$$

On voit alors qu'à l'infini, le développement $w'(V)$ commence par un terme au plus de l'ordre de r^{-4}; autrement dit $w(x)$ doit être pour $x \to 0$ au moins un infiniment petit du 3[e] ordre. Si l'on astreint $V(r)$ à être

[1] Nous rencontrerons ce cas exceptionnel dans la théorie du champ soustractif.

une fonction partout régulière, aussi bien pour $r = 0$ que pour $r \to \infty$, on trouve un problème de valeurs propres et de fonctions propres dont la solution, étant connue, fournirait tous les types possibles de corpuscules, conclusion dont l'intérêt est évident.

Pour une valeur propre et une fonction propre $V(r)$ déterminées, on pourrait calculer la charge totale et la masse totale des corpuscules, charge et masse sans doute concentrées presque exclusivement dans une très petite région autour de l'origine, mais néanmoins répandues dans tout l'espace. La charge totale e sera donnée par la formule

$$e = +\int_0^\infty w'(V) 4\pi r^2 dr = -4\pi \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r \to 0}$$

d'après (c) et la masse totale par la formule

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} (\mathrm{grad} V)^2 + w(V) - V w'(V) \right] r^2 dr$$

car $w = mc^2 = L + E^2 - \rho V$, d'où

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\infty \left[w(V) - \frac{1}{2} V w'(V) \right] r^2 dr$$

On pourrait donc, connaissant la véritable forme de L, calculer les diverses formes de corpuscules électrisés possibles avec leurs charges et leurs masses. Mais ce n'est évidemment là qu'un programme.

En dehors des difficultés que j'ai déjà signalées, on en a souvent signalé une autre : la théorie de Mie fait jouer aux potentiels φ_i un rôle physique essentiel alors qu'au nom de l'invariance de jauge, on se refuse en général à leur attribuer ce rôle. Je suis personnellement moins enclin que la plupart des autres théoriciens à rejeter tout sens physique des potentiels et cette objection contre la théorie de Mie ne me paraît pas décisive. Néanmoins il faut reconnaître que cette théorie n'est restée qu'une esquisse et n'a pas abouti à une vue complète de l'électromagnétisme.

Une autre tentative dans le même sens, mais avec des caractères plus compliqués, a été faite, vingt ans plus tard, par Max Born. Nous allons la résumer rapidement.

L'électromagnétisme non linéaire de Max Born.

La théorie de Born a pour point de départ une idée assez curieuse. La mécanique classique prend pour fonction de Lagrange d'un point matériel de masse m dans un champ dérivant du potentiel V, la grandeur $T - V$ avec $T = (1/2)mv^2$: énergie cinétique. Donc en l'absence de champ, $L = (1/2)mv^2$. Quand on passe à la dynamique relativiste, on est amené à prendre pour fonction de Lagrange d'un point matériel libre

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{avec } m_0 \text{ : masse propre et } \beta = \frac{v}{c}$$

qui, pour β petit devant l'unité, c'est à dire $v \ll c$, prend la forme approximative $L = -m_0c^2 + (1/2)mv^2$ et, comme la présence d'une constante dans L n'a pas d'importance, on retombe sur l'expression $L = (1/2)mv^2$. On peut aussi écrire $L = m_0c^2(1 - \sqrt{1-\beta^2})$.

M. Born a eu l'idée curieuse de modifier le Lagrangien classique du champ électromagnétique d'une manière analogue à celle qui fait passer de la fonction de Lagrange de la mécanique newtonienne à la fonction de Lagrange de la dynamique d'Einstein. Il remplace donc le Lagrangien $L = (1/2)(B^2 - E^2)$ de l'électromagnétisme classique par l'expression nouvelle

$$L = b^2\left(\sqrt{1+\frac{B^2-E^2}{b^2}} - 1\right)$$

où b est une constante universelle caractéristique de cet électromagnétisme nouveau. Si les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont petits devant b, on retrouve l'expression classique $L = (1/2)(B^2 - E^2)$.

On peut généraliser cette première forme de la fonction de Lagrange dans la théorie de Born en introduisant, à côté de l'invariant $B^2 - E^2$, l'invariant $(\vec{B}\cdot\vec{E})$. En posant $F^2 = B^2 - E^2$ et $G = (\vec{B}\cdot\vec{E})$, on est alors amené à envisager la fonction de Lagrange plus générale :

$$L = b^2\left(\sqrt{1+\frac{F^2-G^2}{b^2}} - 1\right)$$

En introduisant pour les grandeurs $\vec{D}$ et $\vec{H}$ la définition qui permet en mécanique analytique de déduire par dérivation les impulsions à partir de la fonction de Lagrange, on pose

$$\vec{H} = \frac{\partial L}{\partial \vec{B}} = \frac{\vec{B} - G\vec{E}}{\sqrt{1+\frac{F^2-G^2}{b^2}}} \qquad \vec{D} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E} + G\vec{B}}{\sqrt{1+\frac{F^2-G^2}{b^2}}} \qquad (d)$$

On admet les équations de Maxwell

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

d'où l'on tire comme il est bien connu

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}} V$$

En appliquant le principe de moindre action, on écrira

$$\int \delta L dw = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{B}} \delta \vec{B} + \frac{\partial L}{\partial \vec{E}} \delta \vec{E} \right) dw = 0$$

d'où

$$\int \left[\vec{H}\,\mathrm{rot}\,\delta \vec{A} - \vec{D} \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{A} - \overrightarrow{\mathrm{grad}} \delta V \right) dw \right] = 0$$

en faisant varier $\vec{A}$ et V; d'où encore par intégration partielle

$$\int \left[\left(\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \delta \vec{A} - \mathrm{div}\,\vec{D} \delta V \right] dw = 0$$

et par suite

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0$$

Nous obtenons donc finalement

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0$$

c'est-à-dire l'ensemble des équations de Maxwell sans second membre. Mais on voit que *même dans le vide* existe une susceptibilité magnétique et une constante diélectrique puisque les équations (d), si on laissait de côté le terme en G donnent :

$$\mu = \frac{\vec{B}}{\vec{H}} = \sqrt{1 + \frac{B^2 - E^2}{b^2}} \quad \text{et} \quad k = \frac{D}{E} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2 - E^2}{b^2}}}$$

d'où $k\mu = 1$. x^i étant l'une quelconque des quatre coordonnées d'espace-temps, on a

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{B}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial \vec{E}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x^i} = \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x^i} - \vec{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x^i}$$

Pour $i = 1$, on trouve par exemple en tenant compte de

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} =& \frac{\partial}{\partial x} (\vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} - \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \\ =& \frac{\partial}{\partial x} (\vec{H} \cdot \vec{B}) - B_x \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} - D_x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} - B_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} \right) \\ -B_z \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t} \right) &- D_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) - D_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

En tenant encore compte de

$$B_y \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (A_y H_x) - H_x \frac{\partial b_y}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

et de $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{D} = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [H_y B_y + H_z B_z - L] - \frac{\partial}{\partial y} [H_x B_y + E_x D_y] \\ - \frac{\partial}{\partial z} [H_x B_z + E_x D_z] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D} \wedge \vec{B}] = 0 \end{aligned}$$

et des expressions analogues obtenues de permutations circulaires sur x, y, z. Pour $i = 4$, on trouve :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} = \vec{H} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{D} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \cdot \vec{E}) + \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$$

où

$$\frac{\partial}{\partial t} [L + \vec{D} \cdot \vec{E}] + \operatorname{div} c (\vec{E} \wedge \vec{H}) = 0$$

Posons alors

$$\begin{aligned} X_x &= H_y B_y + H_z B_z \\ X_y &= H_x B_y + E_x D_y \\ X_z &= H_x B_z + E_x D_z \\ &\ldots\ldots \\ X_y &= Y_x \quad \ldots \text{etc} \ldots \\ &\ldots\ldots \\ S &= c\vec{D} \wedge \vec{B} = c\vec{E} \wedge \vec{H} \\ W &= \vec{D} \cdot \vec{E} + L \end{aligned}$$

On peut obtenir le tenseur impulsion-énergie par le tableau suivant :

$$T_{kl} = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z & S_x \\ Y_x & Y_y & Y_z & S_y \\ Z_x & Z_y & Z_z & S_z \\ S_x & S_y & S_z & w \end{vmatrix}$$

qui a la forme classique du tenseur impulsion énergie et qui est symétrique parce que $X_y = Y_x \ldots$, formules qui sont la conséquence de la rotation $\vec{B} \wedge \vec{D} = \vec{H} \wedge \vec{E}$ aisée à déduire de la formule (c). Pour des petites valeurs des champs, on retrouve les expressions classiques en tenant compte qu'alors on a $\vec{E} \simeq \vec{D}$, $\vec{H} \simeq \vec{B}$ et $L \simeq (1/2)(H^2 - E^2)$.

Il est facile de voir que les équations de propagation deviennent ici des équations non linéaires, la non linéarité s'introduisant dans les relations entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ et entre $\vec{B}$ et $\vec{H}$. Par exemple, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} &= -\operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{D}}{k}\right) \\ &= -\frac{1}{k}\operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{D} \\ &= -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} + \text{ termes non linéaires} \end{aligned}$$

et comme $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B}$ et que $\operatorname{div} vB = 0$

$$\Box\vec{B} = \text{ termes non linéaires}$$

et de même pour $\vec{H}$, $\vec{D}$ et $\vec{E}$. On voit donc paraître ici un peu comme dans la théorie de Mie, mais d'une façon plus compliquée, la non linéarité. Ce qui fait la parenté profonde des deux théories, c'est de faire apparaître dans le second membre des équations de propagation, des termes de "sources" qui, au lieu d'être donnés de l'extérieur comme dans l'électromagnétique classique, sont en quelque sorte *créés* par le champ lui-même *par un processus non linéaire.*

En théorie de Born comme en théorie de Mie, il est intéressant d'étudier spécialement le cas électrostatique qui correspond ici aux équations :

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0 = e\delta(r)$$

La seconde équation admet comme solution à symétrie radiale

$$D_r = \frac{e}{\pi r^2}$$

On remarque qu'on introduit ici implicitement un terme de source $e\,\delta(r)$ et donc que la théorie de Born ne réalise pas bien le programme d'incorporation du corpuscule dans le champ (remarque due à Bapp).

La première donne

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi$$

et l'on a entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ la relation (non linéaire)

$$D = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}}$$

d'où

$$D_r = -\frac{\frac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}} = \frac{e}{4\pi r^2}$$

On en tire

$$d\varphi = \frac{+bdr}{\sqrt{1 - \frac{16\pi^2 b^2 r^4}{e^2}}}$$

ou en posant $a = \sqrt{(4\pi b)/e}$ et $y = ar$

$$\varphi = +\frac{b}{a}\int_{ar}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}$$

avec la condition que φ s'annule à l'infini. Le potentiel étant partout fini, même à l'origine, on n'a plus à craindre que l'énergie devienne infinie. De plus pour $r \to \infty$, on a $\varphi = b/(a^2 r) = e/(4\pi r)$, potentiel de Coulomb. L'induction $\vec{D}$ est infinie en $r = 0$ et l'on a comme d'habitude

$$e = \int_\Sigma D_r dt$$

l'intégrale étant étendue à une sphère de centre l'origine. Le champ $\vec{E}$ reste partout fini puisque l'on a

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2 b^2 r^4}{e^2}}}$$

Les composantes E_x, E_y, et E_z sont discontinues quand on passe par l'origine car elles passent brusquement de $+b$ à $-b$.

L'énergie de l'électron sera

$$\int (\vec{D} \cdot \vec{E} + L) dv = \int \left(\frac{E^2}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} + \left(\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} - 1 \right) b^2 \right) dv$$

et elle doit être égale à $m_0 c^2$ (inertie de l'énergie). Donc

$$m_0 c^2 = b^2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} - 1 \right) dv = \int \left(\frac{\sqrt{1 + a^4 r^4}}{a^2 r^2} - 1 \right) b^2 dv$$

ou en posant $x = ar$

$$\begin{aligned} \frac{m_0 c^2}{b^2} &= \frac{1}{a^3} + \int \left(\frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^2} - 1 \right) x^2 dx \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{a^3} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} + \frac{x^4}{\sqrt{1 + x^4}} - x^2 \right) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{m_0 c^2}{b^2} = \frac{4\pi}{a^3} \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

L'intégrale qui peut s'exprimer à l'aide des fonctions elliptiques a pour valeur 1,8541 et l'on trouve

$$m_0c^2 = \frac{4\pi}{a^3}1,2361 \cdot b^2$$

d'où

$$\sqrt{\frac{b}{4\pi}} = \frac{m_0c^2}{e\sqrt{c}}\frac{1}{1,2361}$$

On trouve ainsi en u.e.s. rationalisées

$$\frac{b}{4\pi} = 3,96.10^{15}$$

d'où en u.e.s. ordinaires

$$b = 3,96.10^{15}\text{u.e.s.}$$

C'est là la valeur maximale que le champ E_r puisse atteindre. Cette valeur correspond au champ qui existerait dans la théorie classique à une distance $r_0 = \sqrt{(e/b)}$ de l'ordre de 10^{-13} cm de l'origine (de l'ordre du rayon classique de l'électron).

Equations du mouvement:

M. Born a montré que l'électron étant incorporé au champ électromagnétique par la non-linéarité, les équations du mouvement en résultaient. Une démonstration analogue reposant sur des raisonnements un peu différents avait été donnée en théorie de Mie.

La loi de conservation de l'énergie-impulsion

$$\frac{\partial T^{kl}}{\partial xl} = 0$$

donne les quatre équations

$$\operatorname{div} \vec{X} + \frac{\partial S_x}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad \operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Si l'on pose $W = \int wdv$ et $G = \int (\vec{S}/c)dv$, on obtient l'énergie et l'impulsion totales. On a donc

$$\int_\infty \vec{X} \cdot \vec{u}d\sigma + \frac{dG_x}{dt} = 0 \quad \dots \quad \int_\infty \vec{S} \cdot \vec{u}d\sigma + \frac{dW}{dt} = 0 \qquad (e)$$

où $\int_\infty$ est une intégration sur une sphère de rayon infiniment grand, $\vec{u}$ étant le vecteur normal unitaire sur la sphère.

On suppose que le champ extérieur reste sensiblement constant dans un domaine grand par rapport à l'électron (de dimension $\gg r_0$). Il suffit donc de traiter le problème dans le cas où à l'infini le champ se réduit à un champ constant qui représente le champ extérieur au voisinage de l'électron.

Soit alors $\vec{D}^{(e)}$ et $\vec{B}^{(e)}$ les inductions dans le champ extérieur constant, $\vec{D}^{(i)}$ et $\vec{B}^{(i)}$ les inductions dans le champ intérieur propre à l'électron. Les inductions totales sont :

$$\vec{D} = \vec{D}^{(i)} + \vec{D}^{(e)} \qquad \vec{B} = \vec{B}^{(i)} + \vec{B}^{(e)}$$

et l'on a

$$\vec{E}^{(e)} = \left(\frac{\partial w}{\partial \vec{D}}\right)_e \qquad \vec{H}^{(e)} = \left(\frac{\partial w}{\partial \vec{B}}\right)_e$$

les dérivées étant prises par rapport à $\vec{D}_e$ et $\vec{B}_e$. Le champ total $\vec{E}, \vec{H}$ pourra être séparé en un champ extérieur $E^{(e)}, H^{(e)}$ et un champ intérieur $E^{(i)}, H^{(i)}$ et l'on posera

$$\vec{E} = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(e)} \qquad \vec{H} = \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(e)}$$

En raison de la non-linéarité, $\vec{E}^{(i)}$ et $\vec{H}^{(i)}$ dépendent non seulement de $\vec{D}^{(i)}$ et $\vec{B}^{(i)}$, mais aussi de $\vec{D}^{(e)}$ et $\vec{B}^{(e)}$. On suppose

$$\lim_{r\to\infty} \vec{E}^{(i)} = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} \vec{H}^{(i)} = 0$$

Le champ intérieur ne diffère du champ total que par un champ constant et satisfait donc aux équations de forme maxwellienne du champ total. On trouve pour le vecteur de Poynting

$$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{\vec{S}^{(e)}}{c} + \vec{D}^{(e)} \wedge \vec{B}^{(i)} + \vec{D}^{(i)} \wedge \vec{B}^{(e)} + \frac{\vec{S}^{(i)}}{c}$$

$S^{(i)}$ est le vecteur de Poynting interne; $\vec{D}^{(i)} \wedge \vec{B}^{(i)}$. $\vec{S}^{(e)}$ est une constante qui ne nous intéresse pas parce qu'il donnera zéro quand nous prendrons la dérivée par rapport au temps. Nous aurons alors

$$\vec{G} = \vec{G}^{(i)} + \vec{D}^{(e)} \wedge \int \vec{B}^{(i)} dv - \vec{B}^{(e)} \int \vec{D}^{(i)} dv + C^{te}$$

La dérivée de l'énergie W par rapport au temps est

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \int \frac{dw}{dt} dv = \int \left(\frac{dw}{\vec{B}} \dot{\vec{B}} + \frac{dw}{\vec{D}} \dot{\vec{D}} \right) dv \\ &= \int (\vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}}) dv\end{aligned}$$

car on a $W = \vec{D} \cdot \vec{E} + L(\vec{B}, \vec{E})$ d'où

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{D}} = \vec{E} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial w}{\partial \vec{B}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{B}} = \vec{H}$$

On a donc, puisque les champs extérieurs sont constants

$$\frac{dW}{dt} = \int (\vec{H}^{(e)} \cdot \dot{\vec{B}}^{(i)} + \vec{E}^{(e)} \cdot \dot{\vec{D}}^{(i)} + \vec{H}^{(i)} \cdot \dot{\vec{B}}^{(i)} + \vec{E}^{(i)} \cdot \dot{\vec{D}}^{(i)}) dv$$

Définissons alors l'énergie interne par

$$W^{(i)} = \int dt \int (\vec{H}^{(i)} \cdot \dot{\vec{B}}^{(i)} + \vec{E}^{(i)} \cdot \dot{\vec{D}}^{(i)}) dv$$

Elle dépend du mouvement de la charge et du champ extérieur. On peu écrire

$$\left.\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{dW^{(i)}}{dt} + \vec{H}^{(e)} \cdot \int \dot{\vec{B}}^{(i)} dv + \dot{\vec{E}}^{(e)} \cdot \int \dot{\vec{D}}^{(i)} dv \\ \frac{d\vec{G}}{dt} &= \frac{dG^{(i)}}{dt} + \vec{D}^{(e)} \wedge \int \dot{\vec{B}}^{(i)} dv - \vec{B}^{(e)} \wedge \int \dot{\vec{D}}^{(i)} dv\end{aligned}\right. \qquad (f)$$

Pour expliciter les équations (e) , il faut calculer les intégrales de surface $\int_\infty \vec{X} \cdot \vec{u} d\sigma \quad \ldots \quad \int_\infty \vec{S} \cdot \vec{u} d\sigma$. Sur la surface d'intégration, les champs intérieurs sont très petits par rapport aux champs extérieurs constants et l'on pourra ne conserver que les termes du premier ordre par rapport aux champs intérieurs. Comme

$$\begin{aligned}X_x &= H_y B_y + H_z B_z + D_y E_y + D_z E_z \\ X_y &= -H_x B_y - E_x D_y \\ X_z &= -H_x B_z - E_x D_z\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}(\vec{X} \cdot \vec{u}) =& (\vec{X}^{(e)} \cdot \vec{u}) + H_x^{(e)} (\vec{B}^{(i)} \cdot \vec{u}) - E_x^{(e)} (\vec{D}^{(i)} \cdot \vec{u}) \\ &+ (\vec{B}^{(e)} \wedge \vec{u} \wedge \vec{H}^{(i)})_x + (\vec{D}^{(e)} \wedge \vec{u} \wedge \vec{E}^{(i)})_x\end{aligned}$$

et

$$(\vec{S}\cdot\vec{u}) = (\vec{S}^{(e)}\cdot\vec{u}) + \vec{E}^{(e)}(\vec{H}^{(i)}\wedge\vec{u}) - \vec{H}^{(e)}(\vec{E}^{(i)}\wedge\vec{u})$$

Partons maintenant des équations du champ interne

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{E}^{(i)} &= -\frac{\partial\vec{B}^{(i)}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B}^{(i)} = 0\\ \mathrm{rot}\,\vec{H}^{(i)} &= \frac{\partial\vec{D}^{(i)}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D}^{(i)} = 0\end{aligned}$$

Intégrons ces équations dans la sphère de très grand rayon en excluant une très petite sphère s entourant la charge. Comme $\vec{E}^{(i)}$ et $\vec{B}^{(i)}$ ne comportent pas de singularité, nous avons immédiatement à partir des équations de la première ligne

$$\int_\infty \vec{u}\wedge\vec{E}^{(i)}d\sigma = -\int_\infty \dot{\vec{B}}^{(i)}dv \qquad \text{et} \qquad \int_\infty \vec{u}\cdot\dot{\vec{B}}^{(i)}d\sigma = 0$$

Pour les équations de la seconde ligne, il faut tenir compte de la singularité de $\vec{D}^{(i)}$ qui, dans le système propre de la charge, a pour expression

$$\vec{D}^{(i)} = \frac{e}{4\pi r^2}$$

Tout se passe en ce qui concerne $\vec{D}^{(i)}$ comme s'il y avait une source ponctuelle e à l'origine, ce qui nous donne

$$\int_\infty \vec{u}\cdot\vec{D}^{(i)}d\sigma = \int_S \vec{u}\cdot\vec{D}^{(i)}d\sigma = e$$

On peut dire aussi que tout se passe comme si on avait au second membre de l'équation en $\mathrm{div}\,\vec{D}^{(i)}$ une densité “ponctuelle” $\rho(r) = e\delta(\vec{r})$. La symétrie relativiste indique alors que dans l'équation en

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}^{(i)} - \frac{1}{c}\frac{\partial D^{(i)}}{\partial t} = 0$$

tout doit se passer comme s'il existait à l'origine une densité de courant “ponctuelle” $\vec{j} = e\delta(\vec{r})\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la charge, ce qui conduit à écrire

$$\int_\infty (\vec{u}\wedge\vec{H}^{(i)})d\sigma = e\vec{v} + \int_\infty \dot{\vec{D}}^{(i)}dv$$

Nous pouvons maintenant intégrer les expressions obtenues plus haut pour $(\vec{X}\cdot\vec{u})$ et $(\vec{S}\cdot\vec{u})$ et nous obtenons

$$\int_\infty (\vec{X}\cdot\vec{u})d\sigma = -\,e\left[E_x^{(e)} + (\vec{v}\wedge\vec{B}^{(e)})_x\right] + \left(\vec{B}^{(e)}\wedge\int\dot{\vec{D}}^{(i)}dv\right)_x - \left(\dot{\vec{D}}^{(e)}\wedge\int\vec{B}^{(i)}dv\right)_x$$

et
$$\int_\infty \left(\vec{S}\cdot\vec{u}\right)d\sigma = -\,e\vec{v}\cdot\vec{E}^{(e)} - \vec{E}^{(e)}\int\dot{\vec{D}}^{(i)}dv - \vec{H}^{(e)}\int\dot{\vec{B}}^{(i)}dv \qquad (g)$$

Ces expressions sont obtenues en remarquant que les termes constants en $(\vec{X}^{(e)}\cdot\vec{u})$ et $(S^{(e)}\cdot\vec{u})$ ne donnent rien dans l'intégration.

Récrivons maintenant les équations (e)

$$\int_\infty (\vec{X}\cdot\vec{u})d\sigma + \frac{dG_x}{dt} = 0 \quad \ldots \quad \int_\infty (\vec{S}\cdot\vec{u})d\sigma + \frac{dW}{dt} = 0$$

en tenant des équations (f) et des équations (g) ci-dessus. On constate que les termes contenant des intégrales de volume $\int_\infty \ldots dv$ se composent et il reste

$$\frac{d\vec{G}^{(i)}}{dt} = e[\vec{E}^{(e)} + \vec{v}\wedge\vec{B}^{(e)}]$$
$$\frac{dW^{(i)}}{dt} = e\vec{v}\vec{E}^{(e)}$$

Ces équations sont les équations classiques en théorie de Lorentz. Le second membre de la première est la “force de Lorentz”. On voit donc que tout se passe *comme si* le corpuscule subissait la force de Lorentz. mais dans ces théories non linéaires (de Mie ou de Born), on n'a plus besoin de postuler arbitrairement l'existence de la force de Lorentz comme dans la théorie linéaire ancienne : le mouvement du corpuscule électrisé lui est, en effet, imposé par le fait qu'il a été incorporé au champ en tant que très petite région de haute concentration de champ et que son évolution au cours du temps se trouve déterminée par l'évolution générale du champ.

Résumé sur les théories de Mie et de Born.

Les théories de Mie et de Born constituent d'intéressantes tentatives de théories non linéaires du champ qui font disparaître des équations du champ les termes de source ρ et $\rho\vec{v}$ qui sont introduits comme éléments indépendants en théorie de Maxwell-Lorentz. Ces termes deviennent des fonctions du champ lui-même, ce qui permet de considérer les corpuscules comme de très petites régions de très grande concentration du champ. Les champs pourraient ainsi rester partout finis, ce qui élimine les énergies infinies que l'on rencontre en théorie de Lorentz dans le cas des corpuscules ponctuels. Cependant dans la théorie de Born l'induction $\vec{D}$, et sans doute son compagnon tensoriel le champ $\vec{H}$, peuvent présenter une singularité au "centre" du corpuscule, mais la régularité partout réalisée de l'induction $\vec{B}$ et du champ $\vec{E}$ qui interviennent seuls dans l'expression de l'énergie, suffit pour éliminer les énergies infinies. Le corpuscule se trouvant ainsi incorporé au champ, son évolution est entièrement réglée par celle du champ et l'évolution du champ entraîne que tout se passe comme si le mouvement du champ s'effectuait sous l'action de la "force de Lorentz".

Néanmoins ces très intéressantes tentatives n'ont pas abouti à des résultats réels. Elles sont restées plutôt des programmes. On a pu reprocher à la théorie de Mie de faire intervenir les potentiels comme grandeurs ayant un sens physique (ce qui ne me paraît pas une objection insurmontable) et aussi de ne pas être parvenue à remplir le très intéressant programme qu'elle s'était fixée. La théorie de Born, plus compliquée et peut être un peu plus artificielle dans sa précision plus grande, n'a pas finalement, elle non plus, conduit à des conclusions vraiment fécondes. D'ailleurs aucune de ces deux tentatives ne permet d'introduire d'une façon fructueuse l'idée des quanta et ne peut justifier le succès de la mécanique ondulatoire.

Néanmoins le but poursuivi par ces tentatives, c'est à dire l'incorporation des corpuscules dans le champ réalisant l'union des champs et des corpuscules et réduisant à l'unité le dualisme champ-corpuscule, paraît très intéressant. Nous allons voir réapparaître cet espoir de synthèse d'abord en relativité générale, puis sous une forme nouvelle qui contient les quanta et la mécanique ondulatoire et qui paraît pleine de promesses, dans l'interprétation causale de la mécanique ondulatoire par la double solution.

Références

[1] Annalen der Physik, t. 37, 39, 40 (1912 - 1913).
[2] Analyse par M. Born, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1937.