Les symétries P , T , C , les solutions à énergie négative
et la représentation des antiparticules
dans les équations spinorielles
(Partie II: équations non linéaires)

GEORGES LOCHAK

Fondation Louis de Broglie 23, quai de Conti 75006 Paris

*Cet article est dédié à la mémoire de Louis
de Broglie à l'occasion du dixième anniver-
saire de sa mort*

RÉSUMÉ. On examine les symétries P, T, C [1] d'équations lagrangien-
iennes invariantes chirales et à masse non linéaire, comme celles
de Heisenberg, Finkelstein, Rodichev, ou du monopôle magnétique
(étudiée par l'auteur): elles ont les symétries P et T mais pas C ,
elles violent le théorème C, P, T et n'ont pas de paires particule-
antiparticule de charges électriques opposées. Seules les paires
magnétiques gauche-droite subsistent. En outre, ces équations vio-
lent en général la loi de Planck, elles propagent des ondes qui ne sont
pas des ondes de de Broglie et leur limite de l'optique géométrique ne
se raccorde pas à la mécanique classique. Elles s'écartent résolument
de la mécanique quantique et ne peuvent être fécondes que dans des
voies entièrement nouvelles.

ABSTRACT. We examine the P, T, C symmetries [1] of chiral invari-
ant lagrangian equations with a nonlinear mass term, like Heisen-
berg, Finkelstein, Rodichev equations, or the one of a magnetic
monopole (given by the author): they have P and T but not C
symmetries, they violate the CPT theorem and have no particle-
antiparticle pairs with opposite electric charges. Only remain mag-
netic left and right pairs. In addition, such equations generally vio-
late Planck's law, they propagate waves that are not de Broglie
waves and they are not connected with classical mechanics at the
geometric optics limit. They resolutely move away from quantum
mechanics and can be fruitful only in entirely new ways.

1. Introduction.

Nous voulons étendre aux équations non linéaires notre récente étude sur les symétries P, T, C [1]. Sans prétendre, cela va de soi, à l'exhaustivité nous nous bornerons aux équations lagrangiennes relativistes dont seul le "terme de masse" (et non pas la partie différentielle) est affecté par la non linéarité. Nous nous arrêterons plus longuement sur celles qui possèdent l'*invariance chirale*. Mais, avant de poursuivre, nous voulons faire une remarque générale sur les équations non linéaires en mécanique quantique, qui paraît avoir été négligée jusqu'ici. Nous partirons d'une question simple: quelles sont les conditions qui permettent à l'équation de Dirac de satisfaire aux principes généraux de la théorie des quanta et de se raccorder avec la mécanique classique à la limite de l'optique géométrique? Considérons donc l'équation:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \left(\partial_\mu i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \kappa_0 \psi = 0 ; \\ (x_\mu = \{x_k, ict\} ; A_\mu = \{\mathbf{A}, iV\}; \kappa_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}) \end{aligned} \quad (1,1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k = i \begin{pmatrix} 0 & s_k \\ -s_k & 0 \end{pmatrix} ; k =, 2, 3 ; \\ \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} ; \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1,2)$$

où les A_μ sont les potentiels de Lorentz et s_k les matrices de Pauli. Nous l'écrirons aussi en représentation de Weyl, qui ne nous est pas nécessaire dans l'immédiat mais qui nous intéressera plus loin car elle fait apparaître les composantes chirales du spineur de Dirac:

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow U\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} ; U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_4 + \gamma_5) \\ U \gamma_k U^{-1} = -\gamma_k ; U \gamma_4 U^{-1} = \gamma_5 ; U \gamma_5 U^{-1} = \gamma_4 \end{aligned} \quad (1,3)$$

(c'est le fait de diagonaliser γ_5 qui caractérise la représentation)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - s \cdot \nabla i \frac{e}{\hbar c} (V + \mathbf{s} \cdot \mathbf{A}) \right] \xi + i\kappa_0 \eta = 0 \\ \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + s \cdot \nabla - i \frac{e}{\hbar c} (V - \mathbf{s} \cdot \mathbf{A}) \right] \eta + i\kappa_0 \xi = 0 ; (\kappa_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}) \end{aligned} \quad (1,4)$$

Pour voir comment l'équation de Dirac rend compte de la loi de Planck, nous écrivons le lagrangien :

$$\begin{aligned}
 L &= \hbar c \left\{ \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu] + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \kappa_0 \bar{\psi} \psi \right\} ; \quad \{[\partial] = (\partial \rightarrow) - (\leftarrow \partial)\} \\
 &= \frac{\hbar c}{i} \left\{ \xi^+ \left(\frac{1}{2c} [\partial_t] - \frac{ie}{\hbar c} V \right) \xi - \xi^+ \mathbf{s} \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \xi \right. \\
 &\quad \left. + \eta^+ \left(\frac{1}{2c} [\partial_t] - \frac{ie}{\hbar c} V \right) \eta + \eta^+ \mathbf{s} \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \eta + i\kappa_0 (\xi^+ \eta + \eta^+ \xi) \right\} \\
 &\hspace{15em} (1,5)
 \end{aligned}$$

ce qui définit le tenseur d'énergie-impulsion et donc la densité d'énergie :

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \bar{\psi})} (\partial_t \psi) + (\partial_t \bar{\psi}) \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \psi)} - L \\
 &= \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \xi)} (\partial_t \xi) + (\partial_t \xi^+) \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \xi^+)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \eta)} (\partial_t \eta) + (\partial_t \eta^+) \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \eta^+)} - L \\
 &\hspace{15em} (1,6)
 \end{aligned}$$

Comme $L = 0$ en vertu des équations du mouvement (nous reviendrons sur ce point), la densité prend la forme :

$$w = \frac{\hbar}{2i} (\bar{\psi} \partial_t \psi - \partial_t \bar{\psi} \psi) = \frac{\hbar}{2i} \left\{ (\xi^+ \partial_t \xi - \partial_t \xi^+ \xi) + (\eta^+ \partial_t \eta - \partial_t \eta^+ \eta) \right\} \hspace{15em} (1,7)$$

Prenons alors une solution stationnaire :

$$\psi = e^{i\omega t} \phi(\mathbf{r}) \hspace{15em} (1,8)$$

La densité d'énergie correspondante sera :

$$w = \phi^+ \phi \hbar \omega = (\xi^+ \xi + \eta^+ \eta) \hbar \omega \hspace{15em} (1,9)$$

et si l'onde est normée nous trouverons, en intégrant sur l'espace :

$$E = \hbar \omega \hspace{15em} (1,10)$$

ce qui montre que la *loi de Planck* est contenue dans l'équation de Dirac.

Calculons maintenant les ondes planes à partir de (1,4) en l'absence de champ extérieur, soit :

$$\xi = a e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ; \quad \eta = b e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \hspace{15em} (1,11)$$

où ω , $\mathbf{k}$, a et b sont constants (a et b sont des spineurs). Il vient:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{c} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}\right) a + \kappa_0 b &= 0 \\ \left(\frac{\omega}{c} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}\right) b + \kappa_0 a &= 0 \end{aligned} \quad (1,12)$$

L'annulation du déterminant donne la relation de dispersion:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 + \kappa_0^2; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \mathbf{n} \quad (1,13)$$

(ν = fréquence; λ = longueur d'onde; $\mathbf{n}$ = vecteur unité).

Multiplions la phase de l'onde (1,11) par la constante de Planck et nous aurons, compte tenu de (1,10):

$$\hbar\omega t - \hbar\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = Et - \left(\frac{h}{\lambda}\right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \quad (1,14)$$

Or l'onde plane est, par définition, dans le domaine de l'optique géométrique. Nous trouverons donc le raccord avec la mécanique classique en identifiant cette phase à l'intégrale d'action de Hamilton, ce qui impose que $\hbar\mathbf{k}$ représente un moment de Lagrange $\mathbf{p}$, d'où la formule de la longueur d'onde de de Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1,15)$$

Celle-ci est donc incluse, comme la loi de Planck, dans l'équation de Dirac. Enfin, multiplions la loi de dispersion (1,13) par $\hbar^2$ en tenant compte de (1,15), et nous trouverons l'expression de l'énergie, d'où l'équation de Hamilton-Jacobi et le raccord avec la mécanique classique (en exprimant E et $\mathbf{p}$ comme gradient d'univers de l'action):

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2 \quad (1,16)$$

La remarque que nous voulions faire est la suivante: pour retrouver ces résultats, nous nous sommes tout le temps servi de *la linéarité de l'équation de Dirac*. En effet, pour trouver la loi de Planck, il fallait que, dans la formule (1,6), le lagrangien soit nul en vertu de l'équation du mouvement, ce qui est une conséquence de la linéarité de l'équation, donc

d'un *lagrangien quadratique*. On trouve donc la formule (1,9), mais celle-ci contient une densité: pour obtenir la loi de Planck, il faut l'intégrer sur l'espace et l'onde doit être *normée*: autre conséquence de la linéarité.

On pourrait penser qu'une équation linéaire n'est pas nécessaire car il suffit qu'elle soit *homogène de degré un* pour que l'onde soit normable et que le lagrangien - homogène de degré deux - s'annule pour toute solution de l'équation. C'est vrai et nous en verrons un exemple plus loin (au §4) mais cela ne suffit pas pour trouver la longueur d'onde de de Broglie car, pour que la formule (1,15) ait un sens, il faut: 1) que (1,13) soit la *loi générale* de dispersion déduite de l'équation des ondes et: 2) qu'elle s'identifie (à $\hbar^2$ près) à l'expression (1,16) de l'énergie, pour retrouver l'équation de Hamilton-Jacobi. Or (1,16) nous est imposée par la relativité et si la loi (1,13) la rejoint dans le cas de l'équation de Dirac, c'est que celle-ci donne par itération l'équation de Klein-Gordon, laquelle a été construite sur (1,16): la coïncidence n'était donc pas fortuite, elle était préétablie! Mais il est clair que cela n'arrivera pas avec une équation non linéaire parce que la loi de dispersion sera différente et nous verrons, dans l'exemple d'équation homogène que nous citerons, que celle-ci possède *certaines* solutions qui satisfont à la condition, mais pas toutes: la solution générale ne se raccorde pas avec la mécanique classique et ne donne pas l'onde de de Broglie.

En outre, pour être en accord avec les principes de la mécanique quantique, la loi de Planck et l'onde de de Broglie ne suffisent pas. Il faut encore le *principe de superposition* qui joue un rôle essentiel dans les calculs d'interaction, or ce principe sera évidemment faux pour une équation non linéaire, sinon *asymptotiquement* dans des régions de très faible amplitude de l'onde et à condition que les termes non linéaires s'y affaiblissent: c'est là-dessus que comptait Louis de Broglie dans sa théorie de l'onde à bosse, dont le but était de décrire le lien entre l'onde et le corpuscule en représentant ce dernier par une région intense de l'onde.

Donc nous pouvons dire qu'en général, **lorsqu'on cherche des équations d'onde non linéaires, on s'écarte de la mécanique quantique et même du raccord avec la mécanique classique**. Il serait naïf de chercher une mécanique quantique non linéaire qui remplacerait celle que nous connaissons. Les équations non linéaires racontent une autre histoire et leur raccord avec la mécanique quantique, ou classique, ne saurait être qu'asymptotique voire impossible: leur recherche n'a de sens que si l'on chasse sur des terres étrangères, sur lesquelles la

mécanique quantique ne s'aventure pas, telles que la structure des particules, le lien entre l'onde et la particule, la description des transitions quantiques, etc (ce dernier problème est même non lagrangien et sort du cadre de cet article).

2. Les grandeurs tensorielles définies par un spineur.

Pour trouver la forme générale du terme de masse non linéaire, il faut chercher tous les scalaires définis par un spineur. Or il n'y en a que deux, auxquels tous les autres se ramènent. En effet, l'algèbre de Clifford projette les formes bilinéaires du spineur sur 16 grandeurs tensorielles qui s'écrivent, en représentation de Dirac:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \bar{\psi}\psi ; J_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi ; M_{\mu\nu} = -i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi ; \\ \Sigma_\mu &= -i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi ; \Omega_2 = -i\bar{\psi}\gamma_5\psi\end{aligned}\quad (2,1)$$

où Ω_1 est un invariant relativiste, Ω_2 un pseudo-invariant, J_μ un vecteur, Σ_μ un pseudo-vecteur (nous verrons de plus près ces symétries) et $M_{\mu\nu}$ un tenseur antisymétrique. En représentation de Weyl, on a:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \xi^+\eta + \eta^+\xi ; \Omega_2 = i(\xi^+\eta - \eta^+\xi) ; (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = 4(\xi^+\eta)(\eta^+\xi)) \\ J_\mu &= \{J_4, \mathbf{J}\} = \{i(\xi^+\xi + \eta^+\eta), -(\xi^+s\xi - \eta^+s\eta)\} \\ \Sigma_\mu &= \{\Sigma_4, \Sigma\} = \{i(\xi^+\xi - \eta^+\eta), -(\xi^+s\xi + \eta^+s\eta)\} \\ M_{\mu\nu} &= \{M_{j4}, M_{jk}\} = \{(\xi^+s\eta - \eta^+s\xi), (\xi^+s\eta + \eta^+s\xi)\}\end{aligned}\quad (2,2)$$

ce qui fait ressortir *deux vecteurs chiraux isotropes* ([1] et [6]):

$$X_\mu = \{i\xi^+\xi, -\xi^+s\xi\} ; Y_\mu = \{i\eta^+\eta, \eta^+s\eta\} \quad (2,3)$$

qui s'échangent par parité et par conjugaison de charge (voir plus loin Tableau 3), et qui vérifient les relations:

$$\begin{aligned}J_\mu &= X_\mu + Y_\mu ; \Sigma_\mu = X_\mu - Y_\mu ; \\ X_\mu X_\mu &= 0 ; Y_\mu Y_\mu = 0 ; X_\mu Y_\mu = -\frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\end{aligned}\quad (2,4)$$

D'après les identités de Pauli-Kofink ([2] à [5]), toutes les contractions des grandeurs tensorielles qui produisent des scalaires se ramènent

aux invariants de Lorentz Ω_1 et Ω_2 :

$$\begin{aligned}
 -J_\mu J_\mu &= \Sigma_\mu \Sigma_\mu = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 ; J_\mu \Sigma_\mu = 0 \\
 M_{\mu\nu} M_{\mu\nu} &= 2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) ; M_{\mu\nu} \widetilde{M}_{\mu\nu} = 4\Omega_1 \Omega_2 \\
 J_\mu M_{\mu\nu} &= \Omega_2 \Sigma_\nu ; \Sigma_\mu M_{\mu\nu} = \Omega_2 J_\nu ; J_\mu \widetilde{M}_{\mu\nu} = \Omega_1 \Sigma_\nu ; \Sigma_\mu \widetilde{M}_{\mu\nu} = \Omega_1 J_\nu \\
 \Rightarrow J_\mu \Sigma_\nu M_{\mu\nu} &= \Omega_2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) ; J_\mu \Sigma_\nu \widetilde{M}_{\mu\nu} = \Omega_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)
 \end{aligned} \tag{2,5}$$

3. Forme générale du lagrangien (interaction électrique).

Pour une charge électrique, la forme générale du lagrangien est évidente:

$$\begin{aligned}
 L_e &= L_D + \hbar c F(\Omega_1, \Omega_1) \\
 &= \hbar c \left\{ \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu] + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + F(\Omega_1, \Omega_1) \right\}
 \end{aligned} \tag{3,1}$$

où L_D est la partie différentielle du lagrangien de Dirac et $F(\Omega_1, \Omega_2)$ une fonction pour l'instant quelconque, de dimension L^{-1} . Insistons encore sur le fait que, d'après (2,5), le terme non linéaire $F(\Omega_1, \Omega_2)$ est le plus général possible (sans dérivées) et qu'il comprend tous les termes de la forme:

$$F(J_\mu J_\mu) ; F(\Sigma_\mu \Sigma_\mu) ; F(M_{\mu\nu} \widetilde{M}_{\mu\nu}) ; F(J_\mu \Sigma_\nu M_{\mu\nu}) \text{ etc} \tag{3,2}$$

4. Les équations invariantes chirales.

Nous définissons l'“invariance chirale” par la loi de jauge globale suivante, dite “jauge de Touschek”:

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta/2} \psi \quad (\theta = \text{Cnste}) \tag{4,1}$$

Elle a été introduite en théorie des particules élémentaires par plusieurs auteurs, dont Touschek [6], Pauli [7], Gürsey [8], Heisenberg et al. [10], mais elle n'a été considérée, en général, que de façon formelle, alors qu'elle a une signification à la fois géométrique et électromagnétique. Commençons par la géométrie. En représentation de

Weyl (1,3), où γ_5 est diagonale, (4,1) se scinde en deux transformations de phase, avec des signes opposés sur ξ et η :

$$\xi \rightarrow e^{i\theta/2}\xi ; \eta \rightarrow e^{-i\theta/2}\eta \quad (4,2)$$

Il s'ensuit que, dans (2,2) et (2,3), les grandeurs tensorielles dans lesquelles ξ et η ne se "croisent" pas, se conservent dans la transformation:

$$X_\mu \rightarrow X_\mu ; Y_\mu \rightarrow Y_\mu ; J_\mu \rightarrow J_\mu ; \Sigma_\mu \rightarrow \Sigma_\mu \quad (4,3)$$

tandis que les grandeurs dans lesquelles ξ et η se "croisent", tournent d'un angle θ . En particulier, le "plan chiral" construit sur Ω_1 et Ω_2 tourne de θ . On trouve en effet [11]:

$$\begin{pmatrix} \Omega'_1 \\ \Omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \quad (4,4)$$

Ce plan est "chiral" parce que, Ω_1 étant un invariant et Ω_2 un pseudo-invariant, la rotation change de sens avec la parité, si bien que l'angle θ est un *pseudo-invariant*. Si on définit des coordonnées polaires ρ et β^1 (où ρ est un invariant relativiste et β un pseudo-invariant):

$$\rho = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = 2\sqrt{(\xi+\eta)(\eta+\xi)}; \beta = \text{Arctg} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad (4,5)$$

la transformation (4,1) ou (4,2) se ramène à une *rotation du plan chiral*:

$$\beta \Rightarrow \beta + \theta \quad (4,6)$$

Les *équations invariantes chirales* dérivent donc d'un lagrangien invariant par rotation du plan chiral; le terme non linéaire ne dépend pas de β et est fonction du rayon ρ seul:

$$F(\Omega_1, \Omega_2) = F\left(\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}\right) = F\left(2\sqrt{(\xi+\eta)(\eta+\xi)}\right) = F(\rho) \quad (4,7)$$

Pour trouver les propriétés électromagnétiques de la jauge chirale, nous introduisons la *loi locale* suivante [11] et un pseudo-vecteur potentiel B_μ :

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\theta/2}\psi ; B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu\theta \quad (4,8)$$

¹ Cet angle était désigné par A dans mes précédentes publications, ce qui serait ici une source de confusion avec le potentiel $\vec{A}$ de Lorentz.

Comme θ est un pseudo-invariant, $\partial_\mu \theta$ est un pseudo-vecteur, comme B_μ .

L'équation linéaire suivante est invariante par cette loi de jauge:

$$\gamma_\mu (\partial_\mu - g\gamma_5 B_\mu) = 0 \quad (iB_\mu = (\mathbf{B}; iW)) \quad (4,9)$$

Elle a été étudiée dans [11]. C'est l'équation d'un *monopôle magnétique*. La charge magnétique g est ici un *invariant vrai* et non un pseudo-invariant, contrairement à ce qui se passe dans d'autres théories². Le terme de masse est nul en raison de la loi de jauge, de sorte qu'en représentation de Weyl, l'équation se scinde en deux équations séparées gauche et droite:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - s \cdot \nabla - i \frac{g}{\hbar c} (W + \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right] \xi &= 0 \\ \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + s \cdot \nabla + i \frac{g}{\hbar c} (W - \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \right] \eta &= 0 \end{aligned} \quad (4,10)$$

Ces équations conservent les courants chiraux gX_μ et gY_μ qui sont des courants magnétiques (gauche et droit). D'après (2,4), le pseudo-vecteur Σ_μ est du genre espace et égal à la *différence* entre X_μ et Y_μ (J_μ est du genre temps et égal à leur somme). Le lagrangien de (4,9) et (4,10) s'écrit:

$$\begin{aligned} L_M &= \hbar c \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu] - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu \right) \psi \\ &= \frac{\hbar c}{i} \left\{ \begin{aligned} &\xi^+ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c} [\partial_t] - \frac{g}{\hbar c} W \right) \xi - \xi^+ s \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] + \frac{g}{\hbar c} \mathbf{B} \right) \xi \\ &+ \eta^+ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c} [\partial_t] + \frac{g}{\hbar c} W \right) \eta + \eta^+ s \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] - \frac{g}{\hbar c} \mathbf{B} \right) \eta \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4,11)$$

et le lagrangien non linéaire le plus général est [11]:

$$\begin{aligned} L_m &= \hbar c \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu] - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu \right) \psi + F(\rho) \right] \\ &= \frac{\hbar c}{i} \left\{ \begin{aligned} &\xi^+ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c} [\partial_t] - \frac{g}{\hbar c} W \right) \xi - \xi^+ s \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] + \frac{g}{\hbar c} \mathbf{B} \right) \xi \\ &+ \eta^+ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c} [\partial_t] + \frac{g}{\hbar c} W \right) \eta + \eta^+ s \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] - \frac{g}{\hbar c} \mathbf{B} \right) \eta + iF(\rho) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4,12)$$

² La chiralité du magnétisme ne se trouve pas dans la constante de charge, qui est un scalaire, comme toutes les constantes physiques, mais dans l'opérateur de charge $G = g\gamma_5$.

où ρ est donné en (4,5) et $F(\rho)$ est une fonction de dimension L^{-1} .

L'équation qui en dérive s'écrit, en représentation de Dirac:

$$\gamma_\mu \left(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c} \gamma_5 B_\mu \right) \psi + \kappa(\rho) \frac{\Omega_1 - i\gamma_5 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \psi = 0 \quad (4,13)$$

avec:

$$\kappa(\rho) = \frac{dF(\rho)}{d\rho} \quad (4,14)$$

et, en représentation de Weyl:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - s \cdot \nabla \xi - i \frac{g}{\hbar c} (W + \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \xi + i \kappa(\rho) \sqrt{\frac{\eta + \xi}{\xi + \eta}} \eta &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + s \cdot \nabla \eta + i \frac{g}{\hbar c} (W - s \cdot \mathbf{B}) \eta + i \kappa(\rho) \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta + \xi}} \xi &= 0 \end{aligned} \quad (4,15)$$

Ce sont les équations spinorielles non linéaires les plus générales d'un *monopôle magnétique*. On remarque que le terme de masse de chacune des équations (4,15) a la même phase que le terme différentiel correspondant, ce qui montre une indépendance de phase entre les composantes chirales ξ et η qui n'existe pas dans l'équation de Dirac (1,4). Ce degré de liberté supplémentaire provient de l'invariance chirale, que l'équation de Dirac ne possède pas, et cela introduit entre ces équations et celle de Dirac une différence fondamentale: il s'ensuit, en particulier, que (4,13) ou (4,15) conserve le magnétisme, alors que l'équation de Dirac (1,4) ne le conserve pas, du moins en général³. On comprend que, même si l'on introduit dans l'équation de Dirac un terme d'interaction magnétique, elle ne représentera pas un monopôle (sauf cas particulier); inversement, si l'on remplace l'interaction magnétique par une interaction électrique dans une équation du type (4,13) ou (4,15), elle ne représentera pas un électron, malgré des ressemblances [15], [16].

Voyons maintenant deux cas particuliers des équations (4,13) et (4,15):

³ Bien que l'équation de Dirac ne conserve pas le magnétisme, elle contient un sous-ensemble de solutions qui le conservent: celles qui obéissent à la condition de Majorana [14]. Ces solutions sont sur le cône de lumière et elles conservent les courants isotropes X_μ et Y_μ .

1) L'équation cubique.

Elle correspond à un terme de degré quatre dans le lagrangien. D'après (4,12), en l'absence de champ extérieur, nous écrirons:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\hbar c}{2} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} [\partial_{\mu}] \psi \pm l^2 \rho^2) \quad (l = \text{Cnte}) \\
 &= \frac{\hbar c}{2i} \left(\xi^+ \frac{1}{c} [\partial_t] \xi - \xi^+ s \cdot [\nabla] \xi + \eta^+ \frac{1}{c} [\partial_t] \eta + \eta^+ s \cdot [\nabla] \eta \pm il^2 \rho^2 \right) \quad (4,16)
 \end{aligned}$$

Il est intéressant d'écrire l'équation sous ses différentes formes, toutes équivalentes, d'après (2,5) et (4,15):

$$\gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi m l^2 (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi) \gamma_5 \gamma_{\mu} \psi = 0 \quad (4,17_1)$$

$$\gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi \pm l^2 (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) \gamma_{\mu} \psi = 0 \quad (4,17_2)$$

$$\gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi \pm l^2 [\bar{\psi} \psi - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \gamma_5] \psi = 0 \quad (4,17_3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{s} \cdot \nabla \xi \pm 2il^2 (\eta^+ \xi) \eta = 0 \quad (4,17_4)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{s} \cdot \nabla \eta \pm 2il^2 (\xi^+ \eta) \xi = 0$$

La première a été proposée par Heisenberg [9], [10] (à qui nous empruntons la constante: $\pm l^2$) et la deuxième par Finkelstein et al. [12], toutes deux en vue d'une théorie des particules élémentaires. L'équation de Heisenberg a été retrouvée dans un autre contexte par Rodichev [13] en tant qu'équation spinorielle écrite dans un espace avec *torsion*. L'équation (4,173) a été donnée par G. Lochak comme cas particulier de l'équation du monopôle magnétique: elle est équivalente aux deux premières et l'on montre ([11], IJTP) que la présence d'un monopôle provoque une torsion de l'espace, ce qui établit un pont avec l'équation de Rodichev. Enfin, l'équation (4,174) n'est autre que (4,173) en représentation de Weyl: c'est donc un cas particulier de (4,15) et c'est une représentation de l'équation de Heisenberg.

2) L'équation homogène.

Prenons, dans le lagrangien (4,14), un terme de masse $m_0(\rho)$ linéaire en ρ (l'équation restera non linéaire en ψ) [11]:

$$F(\rho) = \kappa_0 \rho \quad ; \quad \kappa(\rho) = \kappa_0 = \text{Cnte} \quad (4,18)$$

et l'équation (4,15) conservera sa forme, mais avec $\kappa_0 = Cnte$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - s \cdot \nabla \xi - i \frac{g}{\hbar c} (W + \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \xi + i \kappa_0 \sqrt{\frac{\eta^+ \xi}{\xi^+ \eta}} \eta &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + s \cdot \nabla \eta + i \frac{g}{\hbar c} (W - \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \eta + i \kappa_0 \sqrt{\frac{\xi^+ \eta}{\eta^+ \xi}} \xi &= 0 \end{aligned} \quad (4,19)$$

Elle est homogène de degré un et son lagrangien est de degré deux:

$$L_m = \frac{\hbar c}{i} \left\{ \begin{aligned} &\xi^+ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c} [\partial_t] - \frac{g}{\hbar c} W \right) \xi - \xi^+ s \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] + \frac{g}{\hbar c} \mathbf{B} \right) \xi \\ &+ \eta^+ \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c} [\partial_t] + \frac{g}{\hbar c} W \right) \eta + \eta^+ s \cdot \left(\frac{1}{2} [\nabla] - \frac{g}{\hbar c} \mathbf{B} \right) \eta \\ &+ 2i \kappa_0 \sqrt{(\xi^+ \eta)(\eta^+ \xi)} \end{aligned} \right\} \quad (4,20)$$

Avec une *interaction électrique*, l'équation s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - s \cdot \nabla \xi - i \frac{e}{\hbar c} (V + \mathbf{s} \cdot \mathbf{A}) \xi + i \kappa_0 \sqrt{\frac{\eta^+ \xi}{\xi^+ \eta}} \eta &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + s \cdot \nabla \eta - i \frac{e}{\hbar c} (V - \mathbf{s} \cdot \mathbf{A}) \eta + i \kappa_0 \sqrt{\frac{\xi^+ \eta}{\eta^+ \xi}} \xi &= 0 \end{aligned} \quad (4,21)$$

C'est le cas particulier étudié dans [15] et [16]. Le lagrangien, grâce à son homogénéité, s'annule en vertu des équations du mouvement, comme dans le cas linéaire, et il donne la loi de Planck (1,10); nous verrons au §6 qu'il existe des solutions - *mais pas toutes* - qui donnent l'onde de Broglie et le raccord avec la mécanique classique. Mais nous verrons aussi que l'équation (4,21) ne rend pas compte des paires particule-antiparticule.

5. Les symétries.

Nous étudierons les symétries des équations à partir des lagrangiens (3,1) et (4,11), en commençant par les parties linéaires L_D et L_M , et nous formerons pour cela un **Tableau 3** à partir des **Tableaux 1** et **2** de la 1-ère partie [1]:

Tableau 3

		P	T	C
ψ	$\rightarrow$	$\gamma_4\psi$	$-i\gamma_3\gamma_1\psi^*$	$\gamma_2\psi^*$
ξ	$\rightarrow$	η	$s_2\xi^*$	$-is_2\eta^*$
η	$\rightarrow$	ξ	$s_2\eta^*$	$is_2\xi^*$
X_4	$\rightarrow$	Y_4	X_4	Y_4
$\mathbf{X}$	$\rightarrow$	$-\mathbf{Y}$	$-\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$
Y_4	$\rightarrow$	X_4	Y_4	X_4
$\mathbf{Y}$	$\rightarrow$	$-\mathbf{X}$	$-\mathbf{Y}$	$\mathbf{X}$
J_4	$\rightarrow$	J_4	J_4	J_4
$\mathbf{J}$	$\rightarrow$	$-\mathbf{J}$	$-\mathbf{J}$	$\mathbf{J}$
Σ_4	$\rightarrow$	$-\Sigma_4$	Σ_4	$-\Sigma_4$
Σ	$\rightarrow$	Σ	$-\Sigma$	$-\Sigma$
Ω_1	$\rightarrow$	Ω_1	Ω_1	$-\Omega_1$
Ω_2	$\rightarrow$	$-\Omega_2$	$-\Omega_2$	$-\Omega_2$
e	$\rightarrow$	e	$-e$	$-e$
g	$\rightarrow$	g	g	g
V	$\rightarrow$	V	$-V$	V
$\mathbf{A}$	$\rightarrow$	$-\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
W	$\rightarrow$	$-W$	W	W
$\mathbf{B}$	$\rightarrow$	$\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$

Notons que, dans ce tableau, les potentiels électromagnétiques sont C -invariants parce qu'ils sont *extérieurs* au système, alors que dans le Tableau 2 [1] ils changeaient de signe parce qu'ils étaient *émis* par le système. Muni de ce Tableau 3, on trouve la variance des parties différentielles L_D et L_M des lagrangiens de Dirac (3,1) et du monopôle magnétique (4,11):

Tableau 4

		P	T	C
L_D	$\rightarrow$	L_D	L_D	$-L_D$
L_M	$\rightarrow$	L_M	L_M	$-L_M$

En prenant les variances de Ω_1 et Ω_2 du Tableau 3, nous aurons celles des termes non linéaires $F(\Omega_1, \Omega_2)$, dont nous donnerons quelques exemples. Les variances des équations correspondantes résulteront des Tableaux 4 et 5.

Tableau 5

		P	T	C
Ω_1	$\rightarrow$	Ω_1	Ω_1	$-\Omega_1$
Ω_2	$\rightarrow$	$-\Omega_2$	$-\Omega_2$	$-\Omega_2$
$\mathbf{F} = \Omega_1$ (Dirac)	$\rightarrow$	$+F$	$+F$	$-F$
$F = \Omega_1^2$	$\rightarrow$	$+F$	$+F$	$+F$
$F = \Omega_1^3$	$\rightarrow$	$+F$	$+F$	$-F$
$\mathbf{F} = \mathbf{G}(\Omega_1, \Omega_2)\Omega_1, (\mathbf{G} > 0)$	$\rightarrow$	$+F$	$+F$	$-F$
$F = F(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$	$\rightarrow$	$+F$	$+F$	$+F$
$F = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$ $= -(i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$	$\rightarrow$	$+F$	$+F$	$+F$
$= (i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)(i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)$				
$F = \Omega_1\Omega_2$	$\rightarrow$	$-F$	$-F$	$+F$

On voit, d'après ce tableau, que les invariances C, P, T seront rarement toutes les trois respectées, car il faut pour cela que le terme non linéaire soit P et T invariant et change de signe avec C , comme le font Ω_1 et la partie différentielle du lagrangien (Tableau 3). En particulier, des équations comme celle du monopôle magnétique, ou celle de Heisenberg, ne sont pas C -invariantes parce que **la C -invariance est incompatible avec l'invariance chirale**, pour la raison un peu paradoxale que l'invariance chirale donne **trop de symétrie** au terme non linéaire et donc à l'intégrale d'action. En effet, nous avons vu au $\text{\AA}3$ que, *dans le lagrangien*, un terme de masse est invariant chirale s'il est fonction du rayon ρ seul: il sera par là-même P, T, C invariant; or pour que l'équation soit C -invariante, il devrait, au contraire, changer de signe avec C , comme le fait Ω_1 dans le lagrangien de Dirac. C'est cet excès de symétrie du lagrangien qui empêche donc la C -invariance de l'équation. Mais les invariances P et T demeurent, avec la définition de T donnée dans [1] et en haut du Tableau 3, si bien que **les équations invariantes chirales n'obéissent pas au théorème CPT**.

Le fait qu'une équation ne soit pas C -invariante ne lui interdit pas d'avoir des solutions avec les deux signes de l'énergie, mais elles

ne décriront plus de *paires particule-antiparticule*, comme c'était le cas pour l'équation de Dirac. Néanmoins, des paires pourront exister en raison de la T -invariance, en ce sens que l'un des éléments de la paire descend le cours du temps, tandis que l'autre le remonte [1]. Mais **les paires définies par conjugaison de charge et celles définies par inversion du temps ne sont pas les mêmes**: dans le premier cas, les éléments de la paire sont de chiralités opposées et vont dans le même sens par rapport au temps, tandis que dans le second cas ils ont même chiralité et vont en sens inverse par rapport au temps ([1] et Tableau 3 ci-dessus).

6. Le signe des fréquences dans les équations invariantes chirales.

Nous devons distinguer entre le signe des fréquences et celui des énergies car nous avons vu au §1 que la fréquence d'une solution stationnaire (1,8) dans une équation non linéaire ne définit l'énergie par la loi de Planck que si la solution est normable et annule le lagrangien, ce qui n'est en général pas le cas.

Considérons l'équation invariante chirale (4,15) en l'absence de champ et cherchons la solution onde plane avec des phases indépendantes:

$$\xi = ae^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad ; \quad \eta = be^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} \quad (6,1)$$

Elles obéiront au système:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{c} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}\right) a + \kappa(\rho) \sqrt{\frac{b+a}{a+b}} b &= 0 \\ \left(\frac{\omega'}{c} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}'\right) b + \kappa(\rho) \sqrt{\frac{a+b}{b+a}} a &= 0 \end{aligned} \quad (6,2)$$

En combinant ces équations, on trouve la relation de dispersion:

$$\begin{aligned} \det[\Omega + \mathbf{s} \cdot \mathbf{K} - \kappa^2] &= 0 \\ \left(\Omega = \frac{\omega\omega'}{c^2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \ ; \ \mathbf{K} = \frac{1}{c} (\omega' \mathbf{k} - \omega \mathbf{k}') + i \mathbf{k} \times \mathbf{k}'\right) \end{aligned} \quad (6,3)$$

soit, en développant ([11]: I.J.T.P. 1985):

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \left(\frac{\omega'^2}{c^2} - k'^2\right) - 2 \left(\frac{\omega\omega'}{c^2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'\right) \kappa^2(\rho) + \kappa^4(\rho) = 0 \quad (6,4)$$

On voit que cette relation est loin de la relation (1,13) et donc du raccord avec la mécanique classique. Certes, il y a des ondes, dans cette théorie, mais en général ce ne seront plus des ondes de de Broglie, parce que, dans (1,14), nous ne pourrions plus identifier $\hbar\mathbf{k}$ à un moment de Lagrange de la dynamique analytique. Une telle identification ne deviendra possible que dans le cas particulier où les phases sont égales:

$$\xi = a e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} ; \eta = b e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (6,5)$$

car la relation (6,4) se réduit alors à la forme classique:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \kappa^2(\rho) ; (k = \sqrt{\mathbf{k}^2}) \quad (6,6)$$

Et encore, cette ressemblance n'est-elle que formelle puisque $\kappa_0(\rho)$ dépend en général des amplitudes a et b , *sauf dans le cas particulier* de l'équation homogène (4,19) ou (4,21), où $\kappa(\rho) = \kappa_0 = Cn\tau$, qui permet le raccord avec la mécanique classique et l'interprétation des ondes (6,5) en tant qu'ondes de de Broglie. Mais même dans ce cas, il ne s'agit que de solutions particulières et il n'y a aucune raison d'éliminer les autres. Revenons donc au système général (6,2) que nous écrivons:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{c} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{k}\right) a + \kappa(\rho) e^{i\beta} b &= 0 \\ \left(\frac{\omega'}{c} - \mathbf{s}\cdot\mathbf{k}'\right) b + \kappa(\rho) e^{-i\beta} a &= 0 \end{aligned} \quad (6,7)$$

en utilisant la relation suivante obtenue à partir de (4,5):

$$\eta^+\xi = \frac{\rho}{2} e^{i\beta} \quad (\text{on a ici : } \eta^+\xi = a^+b) \quad (6,8)$$

Compte tenu de (6,4), les solutions de (6,2) s'écrivent:

$$a ; b = -\frac{e^{-i\beta}}{\kappa(\rho)} \left(\frac{\omega}{c} + \mathbf{s}\cdot\mathbf{k}\right) a \quad (6,9)$$

En prenant pour valeurs indépendantes le spineur a , la fréquence ω et les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}'$, le spineur b est donné par (6,9) et la fréquence ω' par (6,4). On peut faire apparaître, dans (6,9), l'angle α entre les vecteurs $\mathbf{k}$ et a^+sa . Cet angle est défini par la relation:

$$a^+(\mathbf{s}\cdot\mathbf{k}) a = (a^+a) k \cos \alpha \quad (6,10)$$

en raison de l'identité:

$$(a^+a)^2 = (a^+ \mathbf{s} \mathbf{a})^2 \tag{6,11}$$

On tire alors de (6,7) les expressions de $\kappa(\rho)\rho/2$, en fonction de ω, k, α et a , ou de ω', k', α' et b :

$$\kappa(\rho) \frac{\rho}{2} = -a^+a \left(\frac{\omega}{c} + k \cos \alpha \right) \tag{6,12}$$

$$\kappa(\rho) \frac{\rho}{2} = -b^+b \left(\frac{\omega'}{c} + k' \cos \alpha' \right) \tag{6,12'}$$

et comme:

$$\rho > 0 ; a^+a > 0 ; b^+b > 0 \tag{6,13}$$

la parenthèse, dans (6,12) ou (6,12'), a le signe contraire de $\kappa_0(\rho)$, ce qui impose le signe de ω et ω' dans les ondes planes (6,1), contrairement à ce qui se passait dans l'équation de Dirac⁴.

Pour construire des exemples nous allons résoudre (6,4) en $\kappa_0(\rho)$:

$$\kappa^2(\rho) = \frac{\omega\omega'}{c^2} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} (\omega \mathbf{k}' - \omega' \mathbf{k})^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2 - (k k')^2} \tag{6,14}$$

Dans le cas particulier $\mathbf{k}' = \varepsilon \mathbf{k} = \pm \mathbf{k}$, on a:

$$\begin{aligned} \kappa^2(\rho) &= \frac{\omega\omega'}{c^2} - \varepsilon k^2 + \varepsilon' k \left(\frac{\omega}{c} - \varepsilon \frac{\omega'}{c} \right) ; \\ & \left(\varepsilon = \pm 1 ; \varepsilon' = \pm 1 ; k = \sqrt{\mathbf{k}^2} ; k' = \sqrt{\mathbf{k}'^2} \right) \end{aligned} \tag{6,15}$$

Nous devons satisfaire à la double condition que les seconds membres de (6,12) et (6,15) soient positifs. Prenons quelques cas.

a) $\varepsilon = \varepsilon' = 1$. Donc $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ et l'on a, d'après (6,15):

$$\kappa^2(\rho) = \left(\frac{\omega}{c} - k \right) \left(\frac{\omega'}{c} + k \right) \tag{6,16}$$

⁴ C. Daviau a été le premier à remarquer que les deux signes de ω et ω' ne sont pas toujours admissibles dans (6,4).

d'où deux conditions possibles:

$$\begin{aligned} (1) & : \frac{\omega}{c} - k > 0 \text{ et } \frac{\omega'}{c} + k > 0 ; \\ (2) & : \frac{\omega}{c} - k < 0 \text{ et } \frac{\omega'}{c} + k < 0 \end{aligned} \quad (6,17)$$

D'après (6,12), il existe des α pour lesquels la condition (1) ci-dessus est compatible avec $\kappa(\rho) < 0$ et la condition (2) avec $\kappa(\rho) > 0$. Si $\kappa(\rho) < 0$, au moins l'une des fréquences est positive; si $\kappa(\rho) > 0$, au moins l'une des fréquences est négative. Si $\omega' = \omega$, et comme on a déjà supposé que $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$, les composantes chirales auront même phase. Le signe de la fréquence est imposé (puisque l'une au moins a le signe contraire de κ) et il n'y aura pas de paires particule-antiparticule. En revanche, la relation de dispersion (6,16) se réduit ici à la relation classique (6,6).

C'est, en particulier, le cas des équations (4,17) et donc de l'équation de Heisenberg pour laquelle le signe de la fréquence est opposé à $\pm l^2$.

b) $\varepsilon = -1$; $\varepsilon' = \pm 1$. Donc $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ (composantes chirales se propageant en sens opposés). On trouve, d'après (6,15):

$$\kappa^2(\rho) = \left(\frac{\omega}{c} + \varepsilon' k \right) \left(\frac{\omega'}{c} + \varepsilon' k \right) \quad (6,18)$$

ce qui donne, dans le cas $\omega = \omega'$:

$$\frac{\omega}{c} = \varepsilon [k + \varepsilon' \kappa(\rho)] \quad ; \quad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1) \quad (6,19)$$

Comme on dispose séparément de k et de a , donc de α , on vérifie que, d'après (6,12), les deux signes de ω sont possibles, mais sans être associés par paires comme chez Dirac. Remarquons encore combien la loi de dispersion (6,19) est différente de la loi classique (6,6).

c) Composantes chirales de phases opposées:

$$\omega' = -\omega \quad ; \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k} \quad (6,20)$$

D'après (6,14), on trouve la relation de dispersion d'un *tachyon*, [11]:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 - \kappa^2(\rho) \quad (6,21)$$

D'après (6,12), ω peut prendre les signes $\pm$ car tout se joue sur le signe de $(\omega/c + k \cos \alpha)$ or, d'après (6,21): $|\omega/c| < k$, donc le signe de $k \cos \alpha$ peut l'emporter puisque nous disposons de $\cos \alpha$.

On construirait facilement d'autres exemples mais nous nous contenterons d'un seul, celui un peu "monstrueux" d'une équation (non chirale) qui viole toutes les lois de symétrie C, P, T .

7. Le "petit monstre".

C'est une équation curieuse mais simple qui dérive du lagrangien suivant (avec $\kappa_0 = Cnte$):

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{hc}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_\mu [\partial_\mu] \psi + \frac{\kappa_0}{2} \Omega_1 \Omega_2 \right) \\
 &= \frac{hc}{2i} \left\{ \xi^+ \frac{1}{c} [\partial_t] \xi - \xi^+ \mathbf{s} \cdot [\nabla] \xi + \right. \\
 &\quad \left. \eta^+ \frac{1}{c} [\partial_t] \eta + \eta^+ \mathbf{s} \cdot [\nabla] \eta + \frac{i \kappa_0}{2} \left[(\xi^+ \eta)^2 - (\eta^+ \xi)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{7,1}$$

En représentation de Dirac, elle s'écrit:

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi + \frac{i \kappa_0}{2} [(\bar{\psi} \psi) \gamma_5 + (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)] \psi = 0
 \tag{7,2}$$

et, en représentation de Weyl:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \mathbf{s} \cdot \nabla \xi + i \kappa_0 (\xi^+ \eta) \eta &= 0 \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{s} \cdot \nabla \eta - i \kappa_0 (\eta^+ \xi) \xi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7,3}$$

Malgré une ressemblance trompeuse, ces équations sont très différentes des équations (4,17), qui étaient P et T invariantes. Ici, *il n'y a plus aucune invariance*, sauf l'invariance relativiste: en comparant le Tableau 4 à la dernière ligne du Tableau 5, on voit que les trois invariances P, T et C sont violées. Les ondes planes sont de la forme (1,11) avec:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\omega}{c} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \right) a + \kappa_0 (a^+ b) b &= 0 \\
 \left(\frac{\omega}{c} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \right) b + \kappa_0 (b^+ a) a &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7,4}$$

De même qu'au Å6 on trouve, grâce à (6,8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{c} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}\right) a + \kappa_0 \frac{\rho}{2} e^{-i\beta} b &= 0 \\ \left(\frac{\omega}{c} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{k}\right) b + \kappa_0 \frac{\rho}{2} e^{i\beta} a &= 0 \end{aligned} \quad (7,5)$$

D'où la relation de dispersion:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 - \kappa_0^2 \frac{\rho^2}{4} \quad (7,6)$$

C'est celle d'un tachyon (cette équation a toutes les bizarreries!). Comme au Å6, on obtient une relation analogue à (6,12):

$$\left(\frac{\omega}{c} + k \cos \alpha\right) a^+ a + \kappa_0 \frac{\rho^2}{4} e^{-2i\beta} = 0 \quad (7,7)$$

d'où $\beta = n\pi/2$ et les deux signes de ω sont possibles mais non conjugués.

8. Rappel sur les énergies négatives dans l'équation de Dirac.

Avant d'examiner le signe de l'énergie dans les équations non linéaires, nous allons le faire sur l'équation de Dirac en reprenant, sous une forme un peu plus condensée et en y ajoutant quelques précisions, l'étude de Louis de Broglie dans *L'électron magnétique* [17]. Nous utiliserons pour cela la représentation α de Dirac (et non plus γ)⁵:

$$\begin{aligned} -i \alpha_4 \gamma_k &= \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & s_k \\ s_k & 0 \end{pmatrix} ; k = 1, 2, 3 ; \\ \alpha_4 &= \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} ; \psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8,1)$$

L'équation (1,1) devient (en l'absence de champ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathbf{s} \cdot \nabla \chi + i \kappa_0 \Phi &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{s} \cdot \nabla \Phi - i \kappa_0 \chi &= 0 \end{aligned} \quad (8,2)$$

⁵ Rappelons quel est l'intérêt des principales représentations de l'équation de Dirac: la représentation γ rend l'équation manifestement covariante relativiste, la représentation α sépare les énergies des deux signes, le représentation de Weyl (ou représentation spinorielle) sépare les chiralités gauche et droite.

L'onde plane à énergie positive⁶ s'écrit:

$$\Phi_+ = A_+ e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ; \chi_+ = B_+ e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (\omega = c\sqrt{k^2 + \kappa_0^2}) \quad (8,3)$$

$$\left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0\right) A_+ + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} B_+ = 0 \quad (8,4)$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{k} A_+ + \left(\frac{\omega}{c} - \kappa_0\right) B_+ = 0$$

On retrouve, bien entendu, la relation de dispersion (1,13). En prenant B_+ comme spineur indépendant, les composantes de l'onde s'écrivent:

$$A_+ = \frac{-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} B_+ ; \quad B_+ \quad (8,5)$$

L'onde à énergie négative qui se propage dans le même sens s'écrit, avec le même $\omega > 0$ et le même $\mathbf{k}$:

$$\Phi_- = A_- e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} ; \chi_- = B_- e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (\omega = c\sqrt{k^2 + \kappa_0^2}) \quad (8,6)$$

$$\left(\frac{\omega}{c} - \kappa_0\right) A_- - \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} B_- = 0 \quad (8,7)$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{k} A_- - \left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0\right) B_- = 0$$

D'où les composantes suivantes, en prenant cette fois A_- comme spineur indépendant, pour avoir le même dénominateur ($\omega/c + \kappa_0$):

$$A_- ; B_- = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} A_- \quad (8,8)$$

Or $|\mathbf{k}| \ll \kappa_0 \rightarrow (\omega/c + \kappa_0) \cong 2\kappa_0 \rightarrow |A_+| \ll |B_+|$ et $|B_-| \ll |A_-|$: la composante Φ transporte alors les énergies négatives et la composante χ les énergies positives. C'est ce qui arrive à l'approximation non relativiste, mais nous verrons que ce n'est pas le seul cas.

Si $B_+(\mathbf{k})$ et $A_-(\mathbf{k})$ sont des fonctions données de $\mathbf{k}$, les solutions générales à énergies positives ou négatives sont données par les intégrales

⁶ Nous avons le droit de parler indifféremment de fréquence ou d'énergie négative car nous avons vu au §1 que, pour l'équation de Dirac, la loi de Planck est vraie.

de Fourier:

$$\Phi_+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} B_+(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k}$$

$$\chi_+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} B_+(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (8,9)$$

$$\Phi_-(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A_-(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (8,10)$$

$$\chi_-(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} A_-(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k}$$

Considérons maintenant des conditions initiales quelconques $\Phi^0(\mathbf{r})$, $\chi^0(\mathbf{r})$ à l'instant $t = 0$, écrites sous forme d'intégrales de Fourier:

$$\Phi^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} ; \quad (8,11)$$

$$\chi^0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

Ces intégrales dépendant de deux spineurs $F(\mathbf{k})$ et $G(\mathbf{k})$, il est impossible de résoudre le problème de Cauchy à l'aide des seules solutions à énergies positives qui n'en contiennent qu'un seul, $B_+(\mathbf{k})$. Ou alors, il faudrait que:

$$\frac{-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} B_+(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k}) ; B_+(\mathbf{k}) = G(\mathbf{k}) \quad (8,12)$$

ce qui suppose que F et G sont eux-mêmes liés par la relation particulière:

$$F(\mathbf{k}) = \frac{-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} G(\mathbf{k}) \quad (8,13)$$

On aurait une réponse analogue avec des solutions à énergies négatives. Au contraire, si l'on cherche à résoudre le problème de Cauchy

à l'aide d'une somme de solutions des deux signes de l'énergie, on a deux équations à deux inconnues:

$$\begin{aligned} \frac{-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} B_+(\mathbf{k}) + A_-(\mathbf{k}) &= F(\mathbf{k}) \\ B_+(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{\frac{\omega}{c} + \kappa_0} A_-(\mathbf{k}) &= G(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (8,14)$$

d'où:

$$\begin{aligned} B_+(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2 \frac{\omega}{c}} \left[-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k} F(\mathbf{k}) + \left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0 \right) G(\mathbf{k}) \right] \\ A_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2 \frac{\omega}{c}} \left[\left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0 \right) F(\mathbf{k}) + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} G(\mathbf{k}) \right] \end{aligned} \quad (8,15)$$

En introduisant ces expressions dans (8,9) et (8,10) on trouve la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{2 \frac{\omega}{c}} \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{c} - \kappa_0 \right) F - \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} G \right] e^{i\omega t} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0 \right) F + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} G \right] e^{-i\omega t} \right\} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (8,16)$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{2 \frac{\omega}{c}} \left\{ \left[-\mathbf{s} \cdot \mathbf{k} F + \left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0 \right) G \right] e^{i\omega t} \right. \\ &\quad \left. + \left[\mathbf{s} \cdot \mathbf{k} F - \left(\frac{\omega}{c} - \kappa_0 \right) G \right] e^{-i\omega t} \right\} d\mathbf{k} \end{aligned}$$

Si $F(\mathbf{k}) \equiv 0$, les conditions initiales seront concentrées sur le spineur χ , d'après (8,11). Nous savons vu que, pour les ondes planes à l'approximation non relativiste, χ est "porteur" des énergies positives, mais cette propriété ne dure pas car (8,16) s'écrit dans ce cas:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}}{2 \frac{\omega}{c}} G \left[-e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right] d\mathbf{k} \\ \chi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 \frac{\omega}{c}} G \left[\left(\frac{\omega}{c} + \kappa_0 \right) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\omega}{c} - \kappa_0 \right) e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right] d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (8,17)$$

et nous voyons que $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ne reste pas nul et que les deux signes de l'énergie apparaissent, aussi bien dans Φ que dans χ . Mais si, dans l'espace $\mathbf{k}$, le support de $G(\mathbf{k})$ est petit et concentré sur l'origine:

$$G(\mathbf{k}) \neq 0 \text{ ssi : } |\mathbf{k}| \leq k_0 \ll \kappa_0 \rightarrow \frac{\omega}{c} \cong \kappa_0 \quad (8,18)$$

on voit que:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \cong 0 \text{ ; } \chi(\mathbf{r}, t) \cong \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{|\mathbf{k}| \leq k_0 \ll \kappa_0} G(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (8,19)$$

La composante $\Phi(\mathbf{r}, t)$ s'évanouit, $\chi(\mathbf{r}, t)$ ne transporte que des énergies positives et celles-ci suffisent à résoudre le problème de Cauchy. Si nous avons supposé, au contraire, que $G(\mathbf{k}) \equiv 0$, nous serions parvenus à la conclusion inverse, avec $\chi(\mathbf{r}, t) \cong 0$ et des énergies négatives.

Traduisons la condition (8,18) dans l'espace physique. En vertu de (8,11), on a l'inégalité entre écarts quadratiques⁷ (voir Annexe):

$$\sigma_{\mathbf{r}} \cdot \sigma_{\mathbf{k}} \geq \frac{3}{2} \text{ ; } (\sigma_{\mathbf{r}})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{r}^2 |\chi^0(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \text{ ; } (\sigma_{\mathbf{k}})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}^2 |G(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad (8,20)$$

Donc:

$$G(\mathbf{k}) \neq 0 \text{ ssi } |\mathbf{k}| \ll \kappa_0 \Rightarrow \sigma_{\mathbf{k}} \ll \kappa_0 \Rightarrow \sigma_{\mathbf{r}} \gg \frac{3}{2 \kappa_0} = \frac{3}{4\pi} \lambda_c \quad (8,21)$$

où λ_c est la longueur d'onde de Compton. Il s'ensuit qu'on pourra résoudre le problème de Cauchy et donc représenter l'évolution d'un paquet d'ondes de Dirac, en se servant uniquement des solutions à énergies positives (resp. négatives) si et seulement si le paquet d'ondes initial est concentré sur la composante χ (resp. Φ) en occupant un domaine plus grand que la longueur d'onde de Compton λ_c . Au contraire, si le domaine initial est plus petit que la longueur d'onde de Compton, on aura obligatoirement un mélange d'énergies des deux signes. Ces résultats étaient énoncés sans démonstration dans *l'Electron magnétique* [17].

⁷ On la trouve dans [18] et [19], à une seule dimension, d'où un facteur 1/2 au lieu du 3/2 qui apparaît à trois dimensions. Bien que les relations d'Haisenberg en découlent, cette inégalité n'est pas quantique: c'est une conséquence de l'inégalité de Schwarz et de la formule de Plancherel.

Nous avons écrit ce paragraphe pour rappeler le caractère indispensable des énergies des deux signes dans la théorie de Dirac. Voyons maintenant ce qu'il en est dans les équations non linéaires.

9. Le signe de l'énergie dans les équations non linéaires.

D'après (1,6), la densité d'énergie s'écrit:

$$w = \frac{\hbar}{2i} (\bar{\psi} \partial_t \psi - \partial_t \bar{\psi} \psi) - L \tag{9,1}$$

Le lagrangien L est donné par (3,1) dans le cas électrique et (4,12) dans le cas magnétique ou plus généralement, d'une équation chirale. Prenons d'abord le cas (3,1) et écrivons l'équation de Lagrange et sa conjuguée:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \left(\partial_\mu + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \frac{\partial F}{\partial \psi} &= 0 \\ (-\partial_\mu + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu) \bar{\psi} \gamma_\mu + \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \end{aligned} \tag{9,2}$$

Il s'ensuit:

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu] + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \psi \right) = 0 \tag{9,3}$$

soit encore, en exprimant F en fonction de Ω_1 et Ω_2 :

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu] + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \Omega_1 \frac{\partial F}{\partial \Omega_1} + \Omega_2 \frac{\partial F}{\partial \Omega_2} = 0 \tag{9,4}$$

En introduisant (3,1) et (9,4) dans la densité d'énergie (9,1) pour le cas stationnaire (1,8), on obtient:

$$w = \hbar \omega \psi^+ \psi + \hbar c \left(\Omega_1 \frac{\partial F}{\partial \Omega_1} + \Omega_2 \frac{\partial F}{\partial \Omega_2} - F \right) \tag{9,5}$$

Dans le cas (4,12) d'une équation chirale, F s'écrit:

$$F = F \left(\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \right) = F(\rho) \tag{9,6}$$

et la densité d'énergie prend la forme plus simple:

$$w = \hbar \omega \psi^+ \psi + \hbar c \left(\rho \frac{dF(\rho)}{d\rho} - F(\rho) \right) \tag{9,7}$$

Dans le cas général, on voit sur (9,5) que si F est homogène de degré un en Ω_1 et Ω_2 , le terme entre parenthèses s'évanouit, l'onde devient normable et l'énergie obéit à la loi de Planck. Dans le cas particulier d'une équation chirale, on voit sur (9,7) qu'il en est ainsi lorsque $F(\rho)$ est homogène de degré un en ρ : nous avons vu au §4 que l'équation obéit à la loi de Planck. Mais il faut souligner que celle-ci n'apparaît que dans des cas particuliers.

Qu'en est-il maintenant du signe de l'énergie? D'après le Tableau 3, le terme de Planck en $\hbar\omega$ change de signe pour les transformations T et C , mais à condition, bien sûr, que l'équation soit T - ou C -invariante. Ainsi avons-nous vu, par exemple, au §5, que les équations chirales, ne sont pas C -invariantes, mais elles possèdent quand-même des solutions ayant des fréquences et donc des énergies de Planck $\hbar\omega$ des deux signes, en raison de leur T -invariance. Cependant, il ne s'ensuit pas que le terme entre parenthèses (9,5) et (9,7) change de signe lui aussi. En outre, le terme $\hbar\omega\psi^+\psi$ ne donne vraiment la loi de Planck que si $\psi^+\psi$ est normé, ce qui est généralement impossible avec une équation non-linéaire, en dehors du cas de l'homogénéité à un.

On voit qu'en général, on ne trouvera pas, dans une équation non linéaire, des solutions associées par paires avec des énergies de signe opposés comme c'était le cas pour l'équation de Dirac. En particulier, *ce ne sera pas le cas pour les équations chirales, hormis l'équation homogène pour laquelle le terme en question s'annule. En particulier, il n'existe pas de paires particule-antiparticule dans l'équation de Heisenberg.*

On pourrait faire de l'existence des paires une condition qui imposerait le choix du terme non linéaire. Par exemple, un terme tel que celui-ci, dans le lagrangien:

$$F = \Omega_1 G(\Omega_1, \Omega_2) \quad (9,8)$$

où G est une fonction paire de Ω_1 et Ω_2 , répondrait à la condition. En particulier, on pourrait prendre:

$$F = \Omega_1^2 \quad (9,9)$$

De même, parmi les équations chirales, vues sous cet angle, seule l'équation homogène conviendrait. Mais les équations chirales ne sont pas faites pour l'électricité mais pour le magnétisme et, dans ce cas, la non linéarité n'empêche pas l'existence de paires conjuguées car elles

sont conjuguées gauche et droite et il suffit pour cela que le terme non linéaire s'annule pour $\eta = 0$ (pour qu'il reste un monopôle gauche ξ) et pour $\xi = 0$ (pour qu'il reste un monopôle droit η). L'équation homogène (4,19) ne remplit pas cette condition mais celle-ci est satisfaite par une équation telle que (4,173).

10. Conclusion.

Tout ce qui précède confirme ce que nous disions dans l'Introduction, à savoir que la mécanique quantique est d'essence linéaire, comme Dirac l'affirmait en se fondant sur le principe de superposition [20, Å4]. Nous citons, nous aussi, ce principe, dans l'Introduction, mais les exemples que nous avons développés montrent que, chose plus grave, la loi de Planck et l'onde de de Broglie disparaissent aussi, avec la linéarité, et avec elles les bases mêmes de la théorie quantique. Somme toute, ce n'est pas étonnant **car toute la théorie des quanta est partie de l'oscillateur harmonique, de la théorie linéaire des ondes et de l'intégrale de Fourier**. Nous avons vu que la non-linéarité détruit aussi certaines symétries et entraîne la perte de la C -invariance, du théorème CPT et de la représentation des paires particule-antiparticule, tout au moins dans le cas électrique, car les paires de monopôles subsistent, étant associées par chiralités opposées.

Tout cela va dans le sens d'une remarque paradoxale mais pénétrante de René Thom⁸ : *“Quoi qu'on en dise, la mécanique quantique est moins générale que la mécanique classique”*. C'est pourquoi, comme nous le disions dans l'Introduction, entrer dans la non-linéarité, c'est sortir du monde de la mécanique quantique, et s'attaquer à d'autres problèmes. Mais la difficulté est d'écrire de nouvelles équations, alors qu'on a perdu les points de repères de la linéarité. Une “pêche à la ligne” formelle, comme on l'a longtemps pratiquée, ne peut être que stérile car la non-linéarité n'est pas une propriété mais l'abandon d'une propriété, et elle ouvre un trop grand éventail de possibilités. Seule la découverte de principes physiques nouveaux pourrait quelque peu refermer l'éventail.

C'est à cela que visait Louis de Broglie avec la *Thermodynamique de la particule isolée* dont le but était d'étendre le champ de la mécanique quantique en unissant les principes de Maupertuis, de Fermat et de Carnot. Comme ses recherches sur la mécanique ondulatoire s'étaient appuyées sur la réunion des deux premiers principes, à

⁸ Lors d'une conversation privée.

l'approximation de l'optique géométrique, il pensait qu'en leur adjoignant le troisième, *dans les états stationnaires*, il s'ouvrirait par la suite une voie d'évasion vers les processus irréversibles et les transitions quantiques, de même qu'en partant de l'optique géométrique, il avait ouvert la voie à la théorie des ondes.

Jadis, il lui avait fallu un point de contact entre la mécanique et l'optique, qu'il avait trouvé en identifiant les lois de Planck et d'Einstein sur l'énergie, d'où une *équivalence entre l'énergie, la masse et la fréquence ondulatoire*. Dans cette nouvelle étape, il lui fallait trouver des points de contact entre la mécanique, l'optique et la thermodynamique; il y parvint en exprimant sous forme relativiste des analogies anciennes, connues depuis Helmholtz et Boltzmann, entre *l'action et l'entropie* et entre la *température et la fréquence*. Mais il ne s'agissait plus de la fréquence ondulatoire mais de la fréquence d'horloge qu'il avait jadis attribuée à toute particule matérielle, mais qui était restée inutilisée, comme une sorte de valence libre de la théorie, qui trouva soudain un emploi.

Malheureusement, cette nouvelle idée (voir [21], [22]) n'eut pas la fortune de la mécanique ondulatoire, mais cela ne prouve pas qu'elle était fautive. Peut-être va-t-on paraphraser, un jour, à son sujet, ce que de Broglie écrivit à propos de la théorie des accès de Newton: "*Admirable idée, véritable préfiguration de la mécanique ondulatoire, mais qui, venue prématurément dans l'histoire de la science, ne fut pas développée et tomba dans l'oubli*"? Pourtant, si l'on savait la développer, elle introduirait une nouvelle structure et donc de nouvelles règles en mécanique quantique, ouvrant la voie à de nouvelles équations. C'est ce qui fut tenté par des élèves de de Broglie qui cherchèrent à identifier les états quantiques à des cycles limites de Poincaré (on trouvera cette idée exposée sous des formes différentes, avec une abondante bibliographie, dans [23] et [24]), mais une telle théorie est non lagrangienne et sort du cadre du présent article, comme nous le disions dans l'Introduction. Mais nous avons montré ici, en parlant de problèmes de symétrie, que même dans le cadre lagrangien dès que l'on quitte la linéarité, un monde nouveau s'ouvre devant nous.

Annexe: démonstration de l'inégalité (8,20).

Nous reprendrons, avec quelques modifications, la démonstration donnée en [17] et [18]. Soient donc deux suites de fonctions f_n et g_n et

l'inégalité de Schwarz:

$$\left| \sum_n \int f_n g_n \, dx dy dz \right|^2 \leq \left(\sum_n \int f_n^+ f_n \, dx dy dz \right) \left(\sum_n \int g_n^+ g_n \, dx dy dz \right) \quad (\text{A,1})$$

Introduisons un spineur χ et son conjugué χ^+ en posant:

$$\begin{aligned} f_1 &= x \chi, & f_2 &= x \chi^+, & g_1 &= \frac{\partial \chi^+}{\partial x}, & g_2 &= \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ f_3 &= y \chi, \dots, & g_4 &= \frac{\partial \chi}{\partial y}; & f_5 &= z \chi, \dots, & g_6 &= \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A,2})$$

Il s'ensuit:

$$\frac{1}{4} \left| \int \mathbf{r} \cdot \nabla (\chi^+ \chi) \, dx dy dz \right|^2 \leq \left(\int \mathbf{r}^2 \chi^+ \chi \, dx dy dz \right) \left(\int \nabla \chi^+ \cdot \nabla \chi \, dx dy dz \right) \quad (\text{A,3})$$

Soit, en intégrant par parties avec χ normé et nul aux limites:

$$\left(\int \mathbf{r}^2 \chi^+ \chi \, dx \, dy \, dz \right) \left(\int \nabla \chi^+ \cdot \nabla \chi \, dx \, dy \, dz \right) \geq \left(\frac{3}{2} \right)^2 \quad (\text{A,4})$$

Dans les références [17] et [18], on pose: $-i\hbar\nabla = \mathbf{p}$ pour trouver les relations d'Heisenberg, mais ce n'est pas notre but et nous introduirons la transformée de Fourier de χ :

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{k}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{k} \quad (\text{A,5})$$

et celle du gradient de χ :

$$\nabla \chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} -i \mathbf{k} G(\mathbf{k}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{k} \quad (\text{A,6})$$

D'où, d'après la formule de Plancherel:

$$\int \nabla \chi^+ \cdot \nabla \chi \, dx \, dy \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}^2 G^+(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k} \quad (\text{A,7})$$

L'inégalité (A,4) s'écrit alors:

$$\left(\int \mathbf{r}^2 \Phi^+ \Phi \, dx \, dy \, dz \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}^2 F^+(\mathbf{k}) F(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k} \right) \geq \left(\frac{3}{2} \right)^2 \quad (\text{A,8})$$

soit encore, en désignant par $\sigma_{\mathbf{r}}$ et $\sigma_{\mathbf{k}}$ les écarts quadratiques:

$$\sigma_{\mathbf{r}} \cdot \sigma_{\mathbf{k}} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{A,9})$$

C'est ce qui était donné en (8,20).

Références

- [1] G. Lochak, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **21**, 1997, ...
- [2] W. Pauli, *Annales de l'I.H.P.*, **6**, 1936, 109.
- [3] W. Kofink, *Annalen der Physik*, **30**, 1937, 91; **38**, 1940, 421, 436, 565, 583.
- [4] O. Costa de Beauregard, *J. Math. Pures et Appl.*, **22**, 1943, 85; *Ann. Fond. L. de Broglie*, **14**, 1989, 342.
- [5] T. Takabayasi, *Progress of Theoret. Phys.*, Suppl. **4**, 1957, 1.
- [6] B. Touschek, *Nuovo Cimento*, **5**, 1957, 1281.
- [7] W. Pauli, *Nuovo Cimento*, **6**, 1957, 204.
- [8] F. Gürsey, *Nuovo Cimento*, **7**, 1958, 411.
- [9] W. Heisenberg, *Conférence Internationale sur les Hautes Energies*, Genève, 1958.
- [10] W. Heisenberg, H. Dürr, H. Mitter, S. Schlieder & K. Yamakaki, *Zs. Naturforschung*, **14a**, H. 5/6, 1959.
- [11] G. Lochak, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **8**, 1983, 345 ; **9**, 1984, 5; ' *Int. J. of Theoret. Phys.*, **24**, 1985, 1019; Contrib. à: *Information, Complexity and Control in Quantum Physics*, A. Blaquièrre, S. Diner and G. Lochak ed., Springer, Wien, N.Y., 1987; contrib. à: *Advanced Electromagnetism (Foundations, Theory and Applications)*, T.W. Barrett and D.M. Grimes ed., World Scientific Publishing Company, Singapore, 1995.
- [12] R. Finkelstein, P. Le Levier & M. Ruderman, *Phys. Rev.*, **16**, 1951, 326.
- [13] V.I. Rodichev, *Soviet Physics JETP*, **13**, 1961, 1029.
- [14] G. Lochak, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **17**, 1992, 203.
- [15] C. Daviau & G. Lochak, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **16**, 1991, 43.
- [16] C. Daviau, *Thèse*, Nantes, 1993; *Ann. Fond. L. de Broglie*, **19**, 1994, 349.
- [17] L. de Broglie, *L'électron magnétique*, Hermann, Paris, 1934.
- [18] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, N.Y.
- [19] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1982.
- [20] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Fourth Edition, Oxford, Clarendon Press, 1958.

- [21] L. de Broglie, *La thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [22] L. de Broglie, *Diverses questions de mécanique et de thermodynamique classiques et relativistes*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [23] F. Fer, *L'irréversibilité, fondement de la stabilité du monde physique*, Gauthier-Villars, Paris, 1977.
- [24] G. Lochak, *L'irréversibilité en physique*, *Ann. Fond. L. de Broglie*, **13**, 1988, 409-447.

(Manuscrit reçu le 23 janvier 1997)