Algèbres et Horloges
gravitation quantique II

J. Kouneiher* et A.Balan†

*Université Paris 7 Denis Diderot,
case 7064, 2, place Jussieu, F-75005 Paris
†Ecole Polytechnique, URA 169 CNRS F-91128 Palaiseau

This is an informal introduction to the non-commutative geometry and to the theory of Hopf algebras and their connections to physics. We reformulate the classical and quantum mechanics of a particle moving on a homogeneous spacetime and we also give the context in which the compatibility requirements on the structure maps reduce to the compatibility of the gravitation and quantum mechanics. The symetry between observables and states reformulated in the form of a Hopf algebra structure is a realisation of the Mach principle. Finaly, we propose an experience relating gravitation and the wave particle duality, gravitation to the phase and superposition quantum principle.

1 Introduction

Force est de constater que l'une des problématiques les plus anciennes et les plus difficiles de notre monde se trouve être celle de l'essence de l'espace et du temps, deux notions fondamentales s'il en est. En effet, elles demeurent deux bornes incontournables pour qui prétend manipuler les composantes élémentaires de la matière et les forces primaires de l'Univers. Cette essence est-elle de type discret ou continu ? La Grèce ancienne s'interrogeait déjà sur la signification physique du point; ainsi les deux philosophes grecs Parménide et Zeno [1] l'ont rejetée, argant la contradiction logique engendrée par une localisation infiniment précise dans le temps et dans l'espace. Newton et Kant ont mis en relief l'antériorité de ces deux concepts aux phénomènes physiques qui sont comme des événements se déroulant dans leur arène [2] [3].
Le 20 ème siècle vit la naissance de deux grandes théories physiques, la Relativité Générale et la Mécanique Quantique.

La Relativité Générale étendit notre connaissance des propriétés globales de l'espace et du temps à très grande échelle, ce qui posa le problème de la topologie de l'Univers; à cette avancée conceptuelle, la Géométrie Différentielle fut le réceptacle mathématique.
La Mécanique Quantique, travaillant à très petite échelle, se trouva être promotrice de la notion d'algèbre d'observables qui fut introduite afin de surmonter l'incertitude autour du point. Aussi a-t-elle des rapports très étroits avec la géométrie non-commutative où le point est considéré au travers du spectre d'une algèbre non commutative, selon les travaux de J.von Neumann [4].
P.A.M.Dirac eut l'intuition d'une possible révolution conceptuelle des notions géométriques; dans ses écrits fondamentaux de 1926 [5] , il évoque la quantification de la physique de l'espace de phase au moyen d'une déformation non commutative de l'algèbre des fonctions et des différentielles de l'espace. Ces nouvelles notions parurent étranges si ce n'est inutiles du point de vue de la Relativité Générale. A.Einstein prit le parti du développement des idées géométriques pour la résolution des problèmes physiques, la non commutativité lui semblant par nature incompatible avec la géométrie telle qu'il l'entendait [6]. Au cours de plusieurs décennies, de nombreuses tentatives furent lancées dans l'optique d'une unification de ces deux grandes théories physiques. C'est ainsi que l'on voulu trouver remède au conflit en élargissant le cadre de l'une des théories afin d'englober l'autre, ou de plonger les deux dans une troisième. Il est à évoquer la formulation Hamiltonienne de la Relativité Générale par R.Arnowitt, S.Deser et C.Misner [7] ainsi que l'équation plus tardive de Wheeler-De Witt [8] qui généralise l'équation de Schrödinger pour un espace à trois dimensions, en tant que deux essais pour la quantification de la Relativité Générale. Parallèlement, la quantification géométrique fut développée dans l'esprit d'obtenir les règles de la Mécanique Quantique au moyen des opérateurs différentiels engendrés par la géométrie, en développant des notions fines comme, entre autres, les espaces de jets, les fibrés vectoriels, les variétés symplectiques [9] [10] [11]. Il apparaît que, malgré de tels efforts, ces théories sont restées inconciliables et ont divergé; même si la compréhension de leur différent s'est appronfondi et l'intéret de leurs déformations s'est affirmé.
L'intéret de cet article est de montrer qu'il n'y a pas désaccord entre la Relativité Générale et la Mécanique Quantique. La première partie introduit le calcul non-commutatif lié aux problèmes de quantification. Par un formalisme d'algèbres de Hopf autoduales, on montre que

les deux sont compatibles; ce qui est l'objet de la troisième partie, sur l'autodualité. La dernière partie étudie les conséquences de l'autodualité et présente une expérience.

2 La géométrie non commutative

2.1 Les déformations de la Mécanique

Les fondateurs de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique ont montré leurs limites classiques dans la Gravitation et la Mécanique Newtonienne. C'est ainsi que ces premières entrent dans le cadre mathématique des déformations de structures. Lesquelles jouent un rôle de premier plan dans nombre de domaines physiques; un exemple simple pouvant être fourni par le groupe de Lorentz, déformation du groupe de Galilé lorsque le facteur 1/c,(avec c, vitesse de la lumière), tend vers zéro; le groupe de Lorentz est alors dit être soumis à une *contraction* dans le groupe de Galilé. De même, la procédure de quantification proposée par J.E.Moyal [12] est une déformation de l'algèbre de Poisson qui est retrouvée par contraction lorsque le facteur h, la constante de Planck, tend vers zéro. Enfin, la Relativité Restreinte peut être considérée en tant que contraction de la Relativité Générale lorsque le facteur G, la constante gravitationelle, tend vers zéro. C'est ainsi qu'on peut imaginer une nouvelle théorie physique unifiant les deux premières et utilisant les trois constantes fondamentales de la Nature c, G et h.

2.2 L'algèbre de Grassmann

L'algèbre de Grassmann des formes extérieures en mathématique et de la théorie supersymétrique en physique, mélangeant les particules fermioniques et bosoniques est la notion charnière de la géométrie des supervariétés qui peut être considérée comme un modèle particulièrement rigide de géométrie non commutative [13]. Une variété supersymétrique peut se décrire en termes de coordonnées locales commutatives $\{x_i\}$ et anti-commutatives $\{\theta_i\}$. La généralisation l'algèbre des fonctions sur une variété sera l'algèbre des fonctions sur la supervariété qui sont des fonctions à valeurs Grassmaniennes sur la variété d'origine:

$$F = F_0(x) + W_{\alpha_1}(x)\theta^{\alpha_1} + ... + W_{\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n}(x)\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2}...\theta^{\alpha_n}.$$

Une telle algèbre est naturellement Z_2-graduée; en tant qu'espace vectoriel, il existe une décomposition en deux parties, l'une de graduation 0 et l'autre 1; on a alors les règles de commutations suivantes:

$$FG + (-1)^{grad(F).grad(G)} GF = 0.$$

Le degré est 0 pour une puissance paire de θ et 1 pour une puissance impaire. Le modèle physique utilise les variables $\{x_i\}$ des coordonnées de l'espace-temps Minkowskien et les variables $\{\theta_i\}$ des coordonnées des spineurs de type 1/2 du groupe de Lorentz. On est alors en mesure d'introduire la généralisation Z_2-graduée de l'algèbre de Poincaré dont les générateurs combinent les dérivations ordinaires et spinorielles:

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha + \sigma^\gamma_{\alpha\beta^\cdot} \overline{\theta}^{\beta^\cdot} \partial_\gamma, \quad \mathcal{D}_{\beta^\cdot} = \partial_{\beta^\cdot} + \sigma^\gamma_{\alpha\beta^\cdot} \theta^\alpha \partial_\gamma.$$

La dérivation de degré 1 ∂_α satisfait à la règle de Leibniz graduée suivante:

$$\partial_\alpha(\theta^\beta\theta^\gamma) = \delta^\beta_\alpha\theta^\gamma - \delta^\gamma_\alpha\theta^\beta,$$

qui entraîne: $\partial_\alpha\partial_\beta + \partial_\beta\partial_\alpha = 0$. La théorie des supersymétries a pour conséquence physique importante la possibilité d'interpréter des phénomènes au cours desquels les fermions se transforment en bosons et vice versa [14] [15] [16] [17]. Différentes hypothèses ont été formulées quant à l'énergie nécessaire pour mettre en évidence de tels processus; à l'heure actuelle, il n'y a pas de preuve qu'ils puissent être accessibles à l'expérimentation.

2.3 L'algèbre de Heisenberg

L'algèbre de Heisenberg est engendrée par les opérateurs position et moment qui satisfont aux règles de commutation de l'algèbre de Poisson correspondante:

$$x^i x^j - x^j x^i = 0, p^i p^j - p^j p^i = 0, p^i x^j - x^j p^i = i\hbar\delta^{ij}.$$

Une telle algèbre est réalisable mathématiquement en termes d'opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert. De plus, si on se souvient qu'en mécanique classique sans interaction le moment vérifie la relation $p^k = m dx^k/dt$, on est amené à réécrire les relations de commutation:

$$dx^j x^k - x^k dx^j = i\hbar/m \; dt\delta^{jk},$$

ce qui suggère la déformation plus générale suivante:

$$x^i x^j - x^j x^i = 0, x^i dx^j - dx^j x^i = \sum a_k^{ij} dx^k.$$

La contrainte de consistence de la dérivée extérieure $d^2 = 0$ s'exprime alors:

$$a_k^{ij} = a_k^{ji}, \sum a_m^{ik} a_n^{jm} = \sum a_m^{jk} a_n^{im};$$

i.e. les matrices $a^{(i)}$ qui ont pour entrés les a_k^{ij} sont commutatives. L'anticommutation des différentielles est donc équivalente à la contrainte. En dimension un, la condition devient: $xdx - dxx = adx$. Il peut être montré qu'un tel calcul différentiel reste consistant même si l'on change le nombre a par une fonction de x. En dimension deux, on peut distinguer cinq réalisations différentes de ce calcul. De telles géométries non-commutatives ont été étudiées par F.Müller-Hoissen [18] dans la description des théories de jauge sur réseaux. Ce qui se conçoit bien si l'on considère la conséquence immédiate de $[x, dx] = adx$, c'est-à-dire:

$$x^n dx = dx(x+a)^n,$$

soit, pour toute fonction de x:

$$f(x)dx = dxf(x+a);$$

qui montre que commuter avec dx est équivalent à se translater de a. On est alors naturellement porté à considérer des groupes discrets de translations. On définit une dérivée à droite et à gauche de la façon suivante:

$$(\partial_x^D f)(x) = 1/a[f(x+a) - f(x)],$$
$$(\partial_x^G f)(x) = 1/a[f(x) - f(x-a)].$$

qui donnent les règles de Leibniz tordues suivantes:

$$\partial_x^D (fg)(x) = (\partial_x^D f)(x) g(x+a) + f(x)(\partial_x^D g(x)),$$
$$\partial_x^G (fg)(x) = (\partial_x^D f)(x) g(x-a) + f(x)(\partial_x^D g(x)).$$

On obtient d'intéressantes applications du calcul non-commutatif à la théorie de jauge sur réseaux.

2.4 Les espaces quantiques et groupes quantiques

Une déformation plus radicale consiste à déformer aussi bien les relations de commutation entre les coordonnées et les différentielles que les relations entre les coordonnées entre-elles et celles entre les différentielles. On est ainsi amené à une modification plus profonde de la structure de l'espace-temps. Les groupes de symétrie d'une telle géométrie demandent à être modifiés; ce qui a amené à l'introduction des groupes

quantiques par V.Drinfeld, L.Faddev et S.L.Woronowicz [19] [20] [21] . Une déformation d'un groupe de symétrie classique peut être obtenue au moyen d'une algèbre de Hopf. A considérer l'algèbre A des fonctions sur un groupe de Lie classique, il est à noter une structure particulière d'algèbre de Hopf [22]:
i. L'unité e du groupe donne une counité pour l'algèbre de Hopf:

$$\epsilon : A \to C; \epsilon(f) = f(e).$$

ii. La structure de groupe de Lie crée un coproduit:

$$\Delta : A \to A \otimes A; \Delta f(x, y) = f(xy).$$

iii. L'inversion pour le groupe donne l'antipode de l'algèbre de Hopf:

$$S : A \to A; (Sf)(x) = f(x^{-1}).$$

Le produit de l'algèbre de Hopf est celui des fonctions.
iv. L'opérateur 'volte' pour l'algèbre de Hopf est défini par:

$$\tau : A \otimes A \to A \otimes A; \tau(a \otimes b) = b \otimes a.$$

On a une anti-équivalence entre les algèbres stellaires de Hopf commutatives et les groupes topologiques. En supposant qu'on oublie l'espace topologique sous-jacent et qu'on garde la notion d'algèbre de Hopf, l'espace est retrouvé lorsque celle-ci est commutative au moyen du spectre. La commutativité du groupe se reflète dans la co-commutativité de l'algèbre de Hopf. La non-co-commutativité de l'algèbre de Hopf est une indication de la non-commutativité du groupe et donc d'une forme courbe pour le groupe, ce qui est exprimé dans l'existence d'une courbure riemannienne non nulle.
Un exemple élémentaire d'algèbre de Hopf est fourni en supposant donné un corps K. On considère $K[x]$; c'est une algèbre de Hopf commutative. On a un isomorphisme $K[x'] \otimes K[x''] = K[x', x'']$. Le co-produit est donné par la flêche: $\Delta : K[x] \to K[x', x'']$, qui est un morphisme d'algèbre avec $\Delta(x) = x' + x''$; la co-unité est donnée par la flêche: $\epsilon : K[x] \to K$, qui est un morphisme d'algèbre avec $\epsilon(x) = 0$; enfin, l'antipode est définie par: $S : K[x] \to K[x]$, morphisme d'algèbre et $S(x) = -x$.

Une extension naturelle de cette notion consiste à rejeter la commutativité; auquel cas, on obtient une structure dénommée *groupe quantique* [23]. Un aspect intéressant de ce concept est le fait que les groupes quantiques apparaîssent comme groupes de transformations d'espaces quantiques tels que les ont définis Yu.Manin, J.Wess et B.Zumino.
Un exemple simple est fourni au moyen du plan de Manin. On considère deux variables x et y soumises à la relation de q-commutation suivante: $xy = q\ yx$. Les transformations linéaires des paramètres qui respectent la relation de commutation $x' \ = \ a\,x \ + \ b\,y$, $y' \ = \ c\,x \ + \ d\,y$ avec des quantités a, b, c, d qui commutent aux x, y donnent les conditions suivantes:
$ac = q\ ca, bd = q\ db, ad = da + q\ cb - (1/q)bc.$
Il reste à définir les relations de commutations ab, bc et cd. On les obtient si on définit les différentielles: $\zeta = dx,\ \eta = dy,\ \zeta^2 = 0,\ \eta^2 = 0,$ soumises aux règles de p-commutation:

$$\zeta\eta \ + \ (1/p)\ \eta\zeta = 0,$$

avec un nouveau paramètre complexe p. A demander l'invariance de cette relation de commutation, on obtient:

$$bc = \ (q/p)\ cb,\ ab = p\ ba,\ cd = p\ dc.$$

L'algèbre de matrices 2.2 qui est définie à partir des a,b,c,d et des relations de commutation reçoit une structure d'algèbre de Hopf; le coproduit est défini par: $\Delta(a, b, c, d) = (aa + bc, ab + bd, ca + dc, cb + dd)$, et l'antipode par l'inversion des matrices. Pour définir le déterminant d'une matrice, on demande la conservation de l'élément de volume défini par les différentielles: $\zeta'\eta' = D_q\zeta\eta$, ce qui entraîne aussitôt la définition: $D_q \ = \ ad - pbc \ = \ da - (1/q)bc$. L'antipodie peut alors s'exprimer par: $S(a, b, c, d) \ = \ D_q(a, pqb, (1/p)c, d)$. On obtient alors une algèbre de Hopf qui est soumise aux (p,q)-relations de commutation; elle est notée: $Gl_{p,q}(2, C)$.
Un calcul différentiel sur de telles algèbres a été développé; il a été obtenu des extensions des notions de connexions, de courbure et de champs de jauge.

Un autre exemple est celui du tore non-commutatif, étudié par M.A.Rieffel [24]. Lorsque l'on considère un tore de dimension n, T^n; l'algèbre des fonctions sur le tore est $C(T^n)$ qui est une algèbre stellaire engendrée

[25] par n générateurs coordonnées qui commutent. Un n-tore non-commutatif sera alors une algèbre stellaire dont les générateurs ont pour commutateurs des multiples scalaires de l'opérateur identité. A.Connes [26] [27] a montré que ces algèbres ont une structure différentiable naturelle définie par l'action ergodique du tore T^n comme automorphisme. Le comportement du tore non-commutatif est semblable à celui du tore commutatif quant à sa K-théorie [28]; les K-groupes sont identiques et ils sont KK-équivalents. Il existe de plus une déformation continue du tore non-commutatif dans le tore ordinaire. Le tore non-commutatif peut être généré au moyen d'une forme anti-bilinéaire θ sur Z^n [29] par la formule suivante:

$$u_x u_y = exp(\pi i \theta(x,y)) u_{x+y}.$$

Tout tore non-commutatif A_θ possède une trace canonique τ qui généralise la mesure de Lebesgue sur un tore ordinaire et définit un homomorphisme de $K_0(A_\theta)$ [28]dans R, généralisation de la dimension d'un fibré vectoriel. On trouve: $K_0(A_\theta) \cong Z^{2^{n-1}}$. Le tore non-commutatif de dimension deux est ainsi un produit semi-direct de l'algèbre de convolution sur Z avec l'algèbre des fonctions sur le cercle et l'action est engendrée par une rotation d'angle fixe; lorsqu'il est nul, on retombe sur les fonctions sur le tore ordinaire deux dimensionnel.

2.5 La géométrie différentielle non-commutative

La géométrie différentielle non-commutative prend racine dans l'observation qu'un point peut être aussi considéré comme un idéal maximal de l'algèbre commutative des fonctions continues sur une variété. Par de telles considérations, on est amené à étendre le calcul différentiel aux algèbres stellaires; on a alors des analogues en calcul non commutatif des notions telles que les formes différentielles, la théorie de Hodge, la dualité de Poincaré, les connexions [30] [31] [32]. Un exemple simple de calcul non commutatif se fonde sur les matrices carrées n.n à coefficients complexes:
on considère une base de matrices hermitiennes à trace nulle, E_k, qui vérifie les relations suivantes:

$$E_k E_m = (1/n) g_{km} 1 + S^j_{km} E_j - (i/2) C^j_{km} E_j,$$

les coefficients S sont réels et $S^j_{km} = S^j_{mk}$, $S^k_{km} = 0$, $C^j_{km} = -C^j_{mk}$, $C^k_{km} = 0$, et $g_{km} = C^p_{kl} C^l_{pm}$. Les C sont les constantes de structure du groupe de Lie Sl(n,C) et les g définissent la forme de Killing-Cartan. On prend des dérivations définies par:

$$\partial_k E_m = ad(iE_k)E_m = i[E_k, E_m] = C^l_{km} E_l;$$

les identités de Jacobie donnent alors:

$$\partial_k \partial_m - \partial_m \partial_k = C^l_{km} \partial_l.$$

L'espace vectoriel des dérivations ainsi engendrées n'est pas un module sur l'anneau des matrices n.n; notable différence avec le calcul commutatif où les champs de vecteurs sont un module pour les fonctions.
Les formes duales des ∂ sont les θ définies par:

$$\theta^k(\partial_m) = \delta^k_m 1,$$

on a alors un module sur les matrices:

$$E_l \theta^k(\partial_m) = \theta^k(E_l \partial_m).$$

La dérivée extérieure est définie usuellement:

$$dE_k(\partial_m) = \partial_m(E_k) = i[E_k, E_m] = C^l_{mk} E_l,$$

de façon explicite, on obtient, en résolvant le système:

$$dE_k = C^l_{km} E_l \theta^m.$$

Les identités de Jacobie donnent alors: $d^2 = 0$ et la forme canonique $\theta = \sum E_k \theta^k$ vérifie la propriété de courbure nulle:

$$d\theta + \theta \wedge \theta = 0.$$

La dérivée de Lie $L_X = i_X d + di_X$ conserve la 2-forme $\Omega = d\theta$; on a: $L_X \Omega = 0$, pour tout champ X de dérivation $Der(M_n(C))$.
Cette 2-forme Ω est symplectique et le crochet de Poisson obtenu ainsi vérifie:

$$\{E_k, E_m\} = i[E_k, E_m],$$

ce qui montre que dans cet exemple, la mécanique classique et quantique s'entremêlent intimement.
La forme volume et la dualité de Poincaré s'expriment sur les matrices n.n.

Cette construction nous met en mesure de construire un analogue non-commutatif de la théorie de Kaluza-Klein.
A considérer une variété de dimension 4, V_4,on prend:

$$A = C^\infty(V_4) \otimes M_n(C).$$

On montre alors que les dérivations s'écrivent:

$$Der(A) = [Der(C^\infty(V_4)) \otimes 1] \oplus [C^\infty(V_4) \otimes Der(M_n(C)].$$

Un champ de Higgs sera alors donné dans ce langage par un élément Φ d'un module hermitien H sur A et la dérivée covariante définie par:

$$\nabla(\Phi D) = (\nabla\Phi)D + \Phi \otimes dD,$$

pour un Φ dans H et un D dans A.
Le choix d'un élément unitaire e est alors équivalent à un choix de jauge; la dérivée covariante et le champ s'intègrent:

$$\nabla e = e \otimes d\alpha$$
$$\Phi = eB$$

La courbure de α donne:
$F = (F^0_{\mu\nu}1 + G^k_{\mu\nu}E_k)dx^\mu \wedge dx^\nu + [(D_\mu B^0_l)1 + (D_\mu B^m_l E_m)]dx^\mu \wedge \theta^l + G^m_{kl}E_m\theta^k \wedge \theta^l$;
avec $F^0_{\mu\nu} = \partial_\mu\alpha^0_\nu - \partial_\nu\alpha^0_\mu$, ce qui permet de définir le champ de jauge U(1); ainsi que:

$$G^k_{\mu\nu} = \partial_\mu\alpha^k_\nu\partial_\nu\alpha^k_\mu + C^k_{lm}\alpha^l_\mu\alpha^m_{nu};$$

qui définit le champ de jauge SU(2). Le triplet scalaire B^0_k a pour dérivée:

$$D_\mu B^0_k = (1/m)(\partial_\mu B^0_k)$$

et le multiplet B^m_k a pour dérivée covariante:

$$D_\mu B^m_k = (1/m)(\partial_\mu B^m_k + C^m_{sr}\alpha^s_\mu B^r_k$$

enfin la contribution potentielle du multiplet de Higgs est:

$$G^m_{kl} = (1/m^2)(C^p_{kl}B^m_p - C^m_{sr}B^s_k B^r_l).$$

Un tel modèle unifié de U(1).SU(2) s'avert en fait irréaliste; d'autres versions correspondant plus avec l'expérience ont été proposées.

3 L'autodualité

On reformule la Mécanique Quantique sur des espaces homogènes en termes d'algèbres de Hopf, ce qui permet d'introduire une réaction à l'action du groupe des symétries classique.
Historiquement, l'algèbre de Hopf la plus élémentaire est celle d'un groupe et les propriétés les plus simple des groupes se généralisent aux algèbres de Hopf. L'analogie est surtout poursuivie dans les algèbres de Hopf triangulaires ou quasi-triangulaires. Elles sont étudiées pour leurs liens avec les équations de Yang-Baxter Quantiques [19][33], équations apparues dans les travaux de Baxter sur les modèles de réseaux exactement solvables en deux dimensions et dans l'approche algébrique de la diffusion inverse quantique [34]; elles sont aussi en connexion avec la factoriabilité de la matrice de diffusion.[35] Les algèbres de Hopf quasi-triangulables donnent des représentations solutions des équations YBQ. La R-matrice solution des équations YBQ fournit réciproquement une algèbre de Hopf.
On peut les considérer comme l'algèbre de symétries d'un système.

3.1 Systèmes dynamiques de la Mécanique classique

On cherche une reformulation algébrique du mouvement classique d'une particule sur des géodésiques d'un espace-temps riemannien. On traite le cas des métriques simples, c'est-à-dire des espaces-temps homogènes, en utilisant des résultats connus de géométrie différentielle. Si on a une action transitive effective α d'un groupe de Lie G_1 sur une variété G_2; celle-ci, modulo quelques restrictions, va se mettre sous la forme d'un espace homogène muni d'une métrique naturelle telle que le flot géodésique redonne l'action α du groupe [36]. La métrique est d'Einstein si l'espace est irréductible et le groupe d'isotropie compact. La métrique est définie par l'action du groupe qui transporte la forme de Killing. On peut assouplir la notion de non-dégénérescence de la métrique en la supposant singulière ou infinie ou de signature indéfinie; ce qui correspond à une particule se déplaçant dans certaines directions seulement ou plongeant dans un trou noir. Dans ce contexte, la Mécanique classique est formulée par le triplet:

$$(G_1, G_2, \alpha).$$

L'algèbre de Lie du groupe code les géodésiques sur la variété; on peut la voir comme l'espace des vitesses et la variété est l'espace des positions. L'espace des observables classiques est l'espace $\mathcal{G}_1 \otimes C\ (\ G_2)$.

3.2 Quantification des systèmes dynamiques vue comme un produit semi-direct et relation avec l'algèbre de Weyl

On quantifie le système dynamique classique en termes algébriques pour trouver l'algèbre des observables de la Mécanique quantique par l'analogue d'une construction due à Gelfand, Naimark et Segal [54]. On travaille avec l'algèbre de convolution du groupe G_1 [37]. C'est l'algèbre stellaire obtenue en prenant les fonctions sur le groupe et le produit de convolution. Selon l'analyse harmonique sur les groupes, on a une équivalence de catégories entre les représentations unitaires du groupe de Lie G_1 et les représentations de l'algèbre stellaire de convolution. On redéfinit l'algèbre classique des observables comme étant $C^*(G_1) \otimes C(G_2)$.

L'algèbre quantique des observables est un produit semi-direct défini par l'action α et une propriété universelle.

On a le diagramme suivant des injections dans le produit semi-direct:

$$C^*(G_1) \quad \longrightarrow \quad C^*(G_1) \triangleright_\alpha C(G_2) \quad \longleftarrow \quad C(G_2).$$

Si $-$ est une représentation unitaire du groupe G_1 sur un espace de Hilbert H et $*$ une représentation du groupe G_2 sur le même espace telle qu'on ait un entrelacement par l'action α: $\bar{u}f^*\bar{u}^{-1} = [\alpha_u(f)]^*$; avec pour $f \in C(G_2)$, et $\alpha_u(f)(s) = f(\alpha_{u^{-1}}(s))$.
La propriété universelle qui définit le produit semi-direct est donnée par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} C^*(G_1) & \longrightarrow & C^*(G_1) \triangleright_\alpha C(G_2) & \longleftarrow & C(G_2) \\ & \searrow - & \downarrow & \swarrow^* & \\ & & H & & \end{array}$$

On a alors une flêche des observables classiques dans les observables quantiques, flêche qui définit le foncteur de quantification des observables:

$$C^*(G_1) \otimes C(G_2) \longrightarrow C^*(G_1) \triangleright_\alpha C(G_2).$$

Dans le cas où les groupes sont un espace vectoriel fixé et où l'action est définie au moyen de l'action à gauche, on retrouve l'algèbre de Weyl classique [47].

3.3 Conservation de la structure de groupe sur l'espace de phase: les équations de champs pour α

Dans le schéma de la mécanique quantique ci-dessus, la métrique est donnée par l'action α du groupe G_1; lorsque l'on considère une action sur un groupe G_2, les observables classiques forment une algèbre de Hopf de type *autoduale* (l'algèbre de Hopf duale est équivalente). On veut conserver la condition d'auto-dualité dans la quantification de l'algèbre des observables classiques; on étudiera ensuite la signification physique de cette contrainte. Lorsqu'on quantifie les observables au moyen de l'action de α, on altère la condition d'auto-dualité de l'algèbre de Hopf. Pour retrouver la symétrie, on a besoin d'introduire une réaction β de G_2 sur G_1 qui va rétablir l'équilibre. On cherche une algèbre de Hopf quantique qui soit un biproduit semi-direct:

$$C^*(G_1) \bowtie_\alpha^\beta C(G_2).$$

Ce qui demande des conditions de compatibilité entre α et β:

$$\forall u, v \in G_1; \forall s, t \in G_2$$

$$\alpha_{u^{-1}}(e) = e, \beta_{s^{-1}}(e) = e$$

$$\alpha_{u^{-1}}(st) = \alpha_{u^{-1}}(s)\alpha_{(\beta_{s^{-1}}(u))^{-1}}(t) \;\; ; \beta_{s^{-1}}(uv) = \beta_{s^{-1}}(u)\beta_{(\alpha_{u^{-1}}(s))^{-1}}(v).$$

Ce sont les équations de α pouvant être vues comme des équations de champs gravitationnels du second ordre; β joue le rôle de champ auxiliaire. Pour toute solution de ces équations, on obtient une algèbre de Hopf qui peut être comprise comme l'algèbre des observables de la quantification du mouvement d'une particule se déplaçant dans un espace-temps homogène.

3.4 La dimension un et la relation entre G, c et ħ

On considère les équations sur la droite; la solution triviale est:

$$\alpha_u(s) = s \text{ et } \beta_s(u) = u;$$

on recherche les autres solutions sous la forme suivante: $\alpha_u(s) = s + f(-u, s)$ et $\beta_s(u) = u + g(-s, u)$; ce qui entraîne des conditions sur f et g, avec les conditions aux limites suivantes:

$$f(u, 0) = f(0, s) = g(0, u) = g(s, 0) = 0.$$

La résolution des équations donne α et β:

$$\alpha_u(s) = (1/B)\ ln(1 + \exp(Au).(\exp(Bs) - 1)),$$

$$\beta_s(u) = (1/A)\ ln(1 + \exp(Bs).(\exp(Au) - 1)).$$

On prend maintenant la limite B tend vers l'infini avec $A/B = \hbar$, ce qui donne $\alpha_u(s) = 0$ si $s \leq -\hbar u$ et $\hbar u + s$ sinon.

Par quantification, l'évolution temporelle du crochet des opérateurs position et moment est donnée par: $[\hat{p}, \hat{q}] = i(d/dt)|_{t=0}\alpha_{-t}(\hat{q})$. Les équations en présence d'un Hamiltonien libre, $H = \hat{p}^2/2m$, sont les suivantes:

$(d/dt)\hat{p} = 0;$

$(d/dt)\hat{q} = i/\hbar[H, \hat{q}] = 1/(2m\hbar)[\hat{p}(d/dt)|_{t=0}\alpha_t(\hat{q}) + (d/dt)|_{t=0}\alpha_t(\hat{q})\hat{p}].$

Les résoudre donne alors:

$$\dot{q} = [p/m](1 - \exp(-Bq))$$

La chute libre d'une particule vers un trou noir fournit la valeur: $B = c^2/m_A G$, avec m_A la masse gravitationelle active et $1/B = [m.m_A/m_p^2]\lambda_{Com}$, avec $\lambda_{Com} = \hbar/mc$ la longueur d'onde de Compton; on a alors: $m_p = (\hbar c/G)^{1/2}$, avec m_p, la masse de Planck.

3.5 L'exemple du groupe $SU(2)$ et R^3

On considère l'exemple du groupe $SU(2)$ agissant sur R^3. L'action de α est donnée par:

$$\alpha_u(s) = 1/2[s.s]/[s_3+1]e_3 + rot_u(s - 1/2[s.s]/[s_3+1]e_3);$$

et β est défini ainsi:

$$\beta_s \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} = [|u_2|^2\{(s_3+1)^2 + (s_1+is_2)\}^2]^{-1/2} \ .$$

$$\begin{pmatrix} u_1 - (s_1 - is_2)u_3 & u_2(s_3+1) \\ u_3(s_3+1) & u_4 + (s_1+is_2)u_2) \end{pmatrix},$$

avec rot_u la rotation de R^3 qui correspond à l'image standard dans $SO(3)$ de $u \in SU(2)$; et e_3 le troisième vecteur de l'espace R^3.
Les orbites de α donnent des espaces homogènes réductibles, ils sont symétriques et leur métrique est d'Einstein. Les équations de compatibilité entre α et β jouent le rôle des équations d'Einstein.

4 Les conséquences théoriques et expérimentales de l'autodualité

4.1 Les liens avec les théories conformes

Les théories conformes peuvent s'algébriser au moyen des quasi-algèbres de Hopf.
Par définition, une quasi-algèbre de Hopf sera une algèbre associative A sur un corps K avec une counité ϵ, une comultiplication Δ et un élément inversible Φ de $A \otimes A \otimes A$ qui satisfont aux axiomes suivants:
i. $(id \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi^{-1}(\Delta \otimes id)(\Delta(a))\Phi$, pour a dans A.
ii.$(\Delta \otimes id \otimes id)(\Phi)(id \otimes id \otimes \Delta)(\Phi) = (\Phi \otimes id)(id \otimes \Delta \otimes id)(1 \otimes \Phi)$.
iii. $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id$.
iv. $(id \otimes \epsilon \otimes id)(\Phi) = 1$.

Les quasi-algèbres de Hopf admettent une certaine symétrie de jauge au sens où, si on se donne un élément inversible de $A \otimes A$, $(\mathcal{F})$ tel que: $(\epsilon \otimes id)(\mathcal{F}) = 1 = (id \otimes \epsilon)(\mathcal{F})$, on peut effectuer un changement par $\mathcal{F}$:

$$\Delta^{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}$$

$$\Psi^{\mathcal{F}}\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)(\mathcal{F})\Psi(id \otimes \Delta)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_{23}^{-1}.$$

Les théories conformes se codent en ces termes:
Soit G, un groupe fini, $C[G]$ son algèbre de groupe sur les nombres complexes et $\mathcal{F}(G)$ l'algèbre des fonctions à valeurs dans le cercle. On se donne un 3-cocycle à valeurs dans le cercle. La quasi-algèbre de Hopf associée sera $D(G)^c = \mathcal{F}(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{C}[\mathcal{G}]$. Pour la classification des quasi-algèbre de Hopf $D(G)^c$, la 'volte' équivalence revient à la condition de

cobordisme du cocycle; ce qui permet de classifier ces algèbres par le $H^3(G,T)$.
Dijkgraaf et al. ont montré que la catégorie des représentations de dimension finie est semi-simple et que l'anneau de fusion est isomorphe à une théorie de champ conforme sur orbifold; ce qui suggère que les théories conformes peuvent être classifiées par le H^3 [39].
De même, en théorie des champs topologiques, on considère la catégorie C des variétés de dimension d dont les flêches sont les variétés cobordantes. Une théorie des champs est alors un foncteur F de cette catégorie dans la catégorie des espaces vectoriels qui change le produit de variétés en le produit tensoriel des espaces vectoriels, selon un isomorphisme c. A chaque théorie des champs topologiques est associé un certain groupe quasi-quantique, groupe des sections plates sur la catégorie: $Aut(C,F,c)$.

Récemment, il a été remarqué que les quasi-algèbres de Hopf sont en liaison avec la théorie des nombres algébriques; ce qui constitue une partie de l'Esquisse d'un Programme de A.Grothendieck [40].

4.2 L'autodualité et les théories de cordes

En théories de cordes, le rôle de l'espace-temps peut être joué par les applications du cercle dans une variété espace-temps ordinaire de dimension quatre; $App(S^1,M^4)$. Contrairement au cas des géodésiques et de la théorie des particules ponctuelles, les cordes donnent des tubes qui peuvent interagir et engendrer des confluences en forme de pantalon. La quantification des cordes algèbrise l'étude. Les contraintes des théories de cordes prennent alors la forme des équations de Yang-Baxter quantiques qui ont motivé l'introduction des groupes quantiques et quasi-algèbres de Hopf [19] [49][48] . Ces théories sont conjecturées intégrables. La réaction β agit sur le produit semi-direct qui définit l'algèbre quantique et joue un rôle similaire à la R-matrice d'une équation de Yang-Baxter quantique.
Il est à espérer que la contrainte d'autodualité telle qu'elle est exprimée plus haut joue à ce niveau un rôle non négligeable d'autant plus que des dualités entre les différentes théories des cordes ont été mises en évidence [46]. Un lien entre les monopoles magnétiques [1] et les solutions

[1] Un monopole est la donnée d'une $SU(2)$-connexion A et un champ de Higgs ϕ qui satisfont à l'équation de Bogomolny suivante: $D_A\phi = *F_A$, avec D_A la dérivée covariante, F_A, la courbure de la connexion A et *, l'opérateur de Hodge; l'énergie du monopole est supposée finie, ce qui implique que la norme de ϕ tend vers une valeur

des équations de Yang-Baxter est évoqué par M.Atiyah [41]; les raisons en sont que:
i. La théorie de jauge de Witten-Chern-Simons est relié à certaines représentations du groupe des tresses et à des solutions de l'équation de Yang-Baxter [42].
ii.Toutes les équations solubles telles que les équations KdV apparaissent en réduisant la dimensionalité dans les équations de Bogomolny qui définissent les monopoles magnétiques [43].
iii.Les fibrés de Higgs-Hitchin dérivables par réduction dimensionelle des équations de Bogomolny jouent un rôle clef dans certains aspects de la théorie de E.Witten [42].
Dans la cas des monopoles magnétiques de type [44] dépendant d'un groupe de Lie G compact tel que $SU(2)$ et ayant une charge entière, le monopole est caractérisé par ses courbes spectrales qui sont algébriques. Pour une charge $N = 1$, la courbe est rationnelle; pour $N = 2$, elle est elliptique. Pour une charge supérieure à 2, la courbe est d'un genre supérieur, elle est soumise à de nombreuses contraintes qui sont difficilement résolubles; cependant lorsque l'on a une symétrie cyclique d'ordre N donnée par des rotations autour d'un axe de l'espace, on peut facilement l'expliciter. Le lien avec les équations Yang-Baxter apparait lorsque N est le nombre des états dans le modèle chiral de Potts [41]. La signification physique est que la masse du monopole tend vers zéro.

4.3 Le principe de Mach et la dualité de l'algèbre de Hopf

Selon les équations d'Einstein, on a:

$$Ric_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R + \Lambda g = T,$$

avec Ric le tenseur de Ricci, g la métrique, R la courbure et Λ la constante cosmologique.
Le mouvement classique des particules est déterminé par la géométrie de l'espace-temps subordonnée ici à l'action α. Réciproquement, la distribution des particules massives définit l'espace-temps.
Il s'agit donc d'un système fermé où la réalité est solution d'un problème autoconsistant; sa motivation se trouve dans les écrits d'A.Einstein, influencé par la pensée positiviste de E.Mach [50].

...c'est contraire à l'esprit scientifique de concevoir un objet (le continuum espace-temps) qui agit lui même, mais sur lequel on ne peut

constante à l'infini. Le degré de ϕ est un entier identifié avec la charge magnétique ou le nombres du monopole [44] [45].

agir. C'est la raison pour laquelle E.Mach fut amené à éliminer l'espace comme cause active dans le système de la mécanique. A son avis, une particule matérielle ne se déplace pas d'un mouvement uniforme par rapport à l'espace, mais par rapport au centre de gravité de toutes les masses présentes dans l'univers; de sorte que l'ensemble des causes des phénomènes mécaniques est clos, à l'encontre de la mécanique de Newton et Galilé. Afin de développer ces idées dans le cadre de la théorie moderne de l'action à travers un milieu, les propriétés du continuum espace-temps qui déterminent l'inertie doivent être considérées comme des propriétés de champ de l'espace, du même ordre que le champ électrodynamique (Einstein [50]p.56).

En d'autres termes, le reproche que formule E.Mach à la mécanique Newtonienne est le fait qu'elle fait appel à l'espace et le temps absolu qui sont des éléments non-intrinséques au sens suivant:
1. ils sont contingents dans le sens où une modification de leur choix n'apporte pas de modification à la structure mathématique qui soustend la théorie.
2.ils jouent un rôle dans la détermination de l'évolution et du degré de liberté de la théorie.
3. ils sont non-dynamiques dans la mesure où leur choix n'est pas déterminé par la solution des équations dynamiques de la théorie et ne peuvent être influencés par la dynamique.
Dans le cas de la Mécanique Quantique, les éléments non-intrinsèques sont donnés par la correspondance entre les opérateurs et les observables classiques, le produit interne et le temps. Dans l'interprétation conventionnelle de la Mécanique Quantique, ces éléments réfèrent à des actions classiques hors du système quantique étudié, ce qui fait que la théorie est locale et ne s'applique pas à l'univers dans sa globalité [51].

A toute action d'une particule sur une autre, il existe une réaction égale et opposée. E.Mach vit là une vérité qui résultait de la troisième loi de Newton et qui avançait le problème de l'observateur et l'observé. Dans sa critique de la conception Newtonienne de l'accélération et de la gravité [52], il souleva la question de savoir si une particule est accélérée lorsqu'elle est seule dans l'Univers; cette connaissance implique l'existence d'une autre particule qui fait référence.

on dit qu'un corps laisse inchangé sa direction et sa vitesse dans *l'espace; notre assertion n'est rien d'autre que plus ou moins une référence abréviée à l'univers en entier* (Mach [52]p.286) [2].

On peut donc dire que c'est l'existence de cette nouvelle particule qui est cause de l'accélération de la première. A l'inverse, un changement de point de vue entre les particules donne une accélération égale et opposée de la seconde vis-à-vis de la première. A.Einstein, dans sa démarche, a tenté de réaliser les conceptions de E.Mach mais il n'a pas pu s'abstraire de l'espace-temps qui joue un rôle secondaire dans la Relativité Générale. Dans son équation, l'espace-temps est déterminant du mouvement de la particule sur une géodésique de l'espace. Réciproquement, la particule massive déforme l'espace qui est ainsi déterminé par l'ensemble des particules. Il y a coexistence de ces deux phénomènes entre espace-temps d'un côté et particules de l'autre.
Cette problématique entre observateur et observé peut être étendue au cadre de la Mécanique Quantique. Dans ce cadre, les observables sont les éléments auto-adjoints d'une algèbre stellaire abstraite A et les états sont les éléments positifs de l'espace dual A^* [53] [54]. On suppose l'algèbre stellaire unitaire et les états ϕ tels que $\phi(1) = 1$; ce qui signifie que la probabilité est entre 0 et 1. Il y a correspondance entre l'algèbre des observables et ses états. C'est cette réciprocité entre états et observables qui donne dans notre cas la condition d'autodualité de l'algèbre de Hopf; ce qui implique une réaction β. Comme l'action α est déterminante de la géométrie, les équations d'autodualité sont comparables aux équations d'Einstein.
Dans le cas de l'espace R^n, l'algèbre des observables est usuellement celle de Weyl qui n'est pas de type auto-dual. L'action α est modifiée par la condition d'autodualité; ce qui montre que des forces gravitationnelles sont contraintes par des conditions de symétrie en accord avec le point de vue de E.Mach. Il y a, à ce niveau, interaction entre le quantique et le gravitationnel.

4.4 La gravité et la dualité onde-particule, expérience

On développe ici le point de vue de l'autodualité en vue d'une expérience possible.
La physique Newtonienne présente deux procédures différentes pour la détermination de la masse.

[2] voir appendice1

Le rapport de masses de deux corps est défini en mécanique de deux manières qui diffèrent fondamentalement l'une de l'autre; en premier lieu, en tant que le rapport des accélérations que leur donne la même force motrice (la masse inerte); et en second lieu, en tant que rapport des forces qu'elles subissent dans le même champ gravitationnel (la masse gravitationnelle)(Einstein [50]p.56).

Par le principe d'équivalence, A.Einstein identifie la masse inerte et la masse gravitationnelle; ce qui soulève l'ambiguité entre les deux définitions de la masse.
L'espace-temps est lui-même défini de deux procédures différentes. On peut le déduire du comportement des horloges selon les travaux de Synge et Penrose[55] [56] ; ou par les trajectoires des particules en chute libre [57].
L'existence des horloges exactes est en fait reliée à la Mécanique Quantique, comme le fait remarquer Penrose. Chaque particule de masse m possède une fréquence propre qui est liée à sa masse selon les équations de Einstein-Planck: $E = mc^2 = h\nu_0$, avec c la vitesse de la lumière et h, la constante de Planck. La fréquence de la particule est liée à celle de son onde selon la dualité onde-particule de L.De Broglie. Et la trajectoire relativiste est la limite du mouvement quantique de l'onde de la particule.
On est donc passé de l'une des déterminations à l'autre via la Mécanique Quantique.
Le mouvement de l'onde d'une particule de spin 1/2 est déterminé par l'équation de Dirac [58]:

$$i\gamma^\mu D_\mu \Psi - mc/\hbar \Psi = 0,$$

avec γ les matrices de Dirac et $D = \nabla + i\Omega$, ∇ la dérivée covariante des vecteurs et Ω la 1-forme de connexion spinorielle.
On applique l'approximation WKB à $\Psi = \alpha\, exp(i\Phi)$, en supposant α et $K_\mu = -\partial_\mu \Phi$, des fonctions à variations lentes; on trouve ainsi:

$$K_\mu K^\mu = m^2c^2/\hbar^2,$$
$$K^\mu D_\mu \alpha = -1/2(\nabla^\mu K_\mu)\alpha.$$

La première de ces équations est l'équation d'eikonale en optique et la seconde montre que le transport parallèle de α le long des courbes intégrales de K_μ induit une croissance ou décroissance de sa valeur selon que les courbes sont convergentes ou divergentes.
L'expérience sera ainsi:

on considère un jet de particules identiques qui ont des moments bien définis; on le sépare en deux faisceaux qui interfèrent ultérieurement après réflexion. Ces deux faisceaux peuvent être représentés par deux ondes $\Psi_1 = \alpha_1\ exp(i\Phi_1)$ et $\Psi_2 = \alpha_2\ exp(i\Phi_2)$. La différence de phase ΔX dans la région de l'interférence est définie par:

$$\Delta X = \bar{\Psi}^1\Psi^2/|\bar{\Psi}_1\Psi_2|$$

ΔX détermine la variation de $\bar{\Psi}\Psi$ après l'interférence dans une petite région. On a:

$$\Delta X = \Delta\theta + \Delta\Phi\ ,$$

avec $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \oint_\gamma K_\mu dx^\mu$ et exp ($i\Delta\theta) = \bar{\alpha}_1\alpha_2/|\bar{\alpha}_1\alpha_2|$.
où γ est le lacet construit à partir des deux faisceaux par leur chemin [3]. On remarque que $P^\mu = \hbar/cK^\mu$ est l'énergie-impulsion, selon l'approximation WKB. Par conséquent, le déphasage $\Delta\Phi$ est dû au couplage de l'énergie-impulsion de la particule avec la géométrie. $\Delta\theta$ est le déphasage lié au couplage du spin avec la courbure de l'espace-temps.
Au point de séparation du faisceau, on a deux courbes intégrales γ_i des deux champs de vecteurs K^μ; ce qui donne, selon l'approximation WKB:
$\alpha_i(x) = exp(-1/2\int_{\gamma_i}^x \nabla^\mu K_\mu d\tau)\Theta\{exp(-i\int_{\gamma_i}^x \Omega_\mu(\tau)(dx^\mu/d\tau)d\tau)\}\alpha_i(0)$,
avec Θ, l'opérateur d'ordre sur le chemin, selon la notation des théories des champs. Si les deux chemins se retouchent, on obtient une expression du déphasage:
$exp(i\Delta\theta) = \bar{\alpha}_1 T\alpha_1/|\bar{\alpha}_1 T\alpha_1|$, avec $T = \Theta\{exp(i\oint_\gamma \Omega_\mu(\tau)(dx^\mu/d\tau)d\tau)\}$.
Si γ est une courbe infinitésimale,

$$\Delta\theta = 1/2[\bar{\alpha}B_{\mu\nu}\alpha]/[\bar{\alpha}\alpha]d\sigma^{\mu\nu},$$

avec $B_{\mu\nu} = \partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + i[\Omega_\nu, \Omega_\mu]$ et σ, l'aire infinitésimale entourée par γ; par l'approximation, on trouve: $\Delta\theta = c/(4\hbar)S_{ab}R^{ab}_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}$, où $S_{ab} = \hbar/c\bar{\alpha}M^{ab}\alpha/[\bar{\alpha}\alpha]$ et $R^{ab}_{\mu\nu} = e^a_\rho e^b_\sigma R^{\rho\sigma}_{\mu\nu}$; $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ est le tenseur de Riemann. On peut généraliser cette procédure à des particules de spin arbitraire.
Dans le cas d'un champ de jauge quelconque, $D_\mu\Psi = \partial\Psi/\partial x^\mu + i\Omega_\mu\Psi$ avec $\Omega_\mu = A^j_\mu T_j$; les T_j sont des représentants des générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de jauge et les A^j sont les potentiels de jauge.

Un cas particulier du déphasage est celui de l'effet d'Aharanov-Bohm, où le déphasage est non nul pour une interférence de topologie non triviale [60].

[3] L'application du théorème de Stokes est délicate car il y a discontinuité de K_μ aux points de séparation et de rencontre des deux faisceaux.

Dans le cas où la torsion est non-nulle, on aurait:

$$\Delta\theta = K_\mu Q^\mu_{rho} d\sigma^{\mu\rho} = c/\hbar P_\mu Q^\mu_{\nu\rho} d\sigma^{\nu\rho}$$

La limite classique des équations donne:
$\Delta\theta v^\mu = c/\hbar d\sigma^{\mu\nu} DP_\nu/Ds$; $(\Delta P/\Delta s)_{courbure} = 1/2 S_{ab} R^{\mu ab}_\nu$ et de même: $(\Delta P/\Delta s)_{champsdejauge} = \tau_j F^{i\mu}_\nu v^\nu$
Pour une particule qui se déplace dans un espace-temps avec torsion; $(\Delta P/\Delta s)_{torsion} = 2P_\rho Q^{\mu\rho}_\nu v^\nu$. La force totale qui s'exerce sur la particule est alors la somme du vecteur de la courbure et de la torsion.
Ces équations ont été obtenue à partir du concept de déphasage dans une interférence quantique. l'équation pour le champ de jauge montre que la variation locale de l'énergie-impulsion de la particule est produit par déphasage. Comme il y a conservation globale de l'énergie-impulsion, on a un échange local entre la particule et le champ d'énergie-impulsion.On a donc un tenseur d'énergie-impulsion lié au champ de jauge. Si on cherche un Lagrangien pour le champ, un choix naturel est celui des équations de Yang-Mills, on le relie au déphasage. Les actions entre la particule et le champ sont par principe équivalents. L'expérience d'interférence montre que le déphasage dépend de l'énergie-impulsion et de la distance géométrique parcourue par le faisceau. On a obtenu une expression covariante de cette différence de phase. On retrouve l'idée de base de la relativité générale par le principe de réciprocité champ-particule; en effet, il implique que les particules qui interfèrent modifient la géométrie par le tenseur énergie-impulsion.
On a montré que les équations du champ sont d'origine quantique, explicables par le déphasage dans une interférence quantique.
Dans les limites classiques le déphasage peut donner l'équation des géodésiques. En effet, dans un repére local, le déphasage est de façon infinitésimale comparable à une différence de phase entre deux faisceaux qui interfèrent dans un espace-temps plat selon une géodésique dont la limite classique est une droite. Dans cette limite il n'y a alors pas d'échange local entre le champ et la particule. Le champ conserve localement son énergie-impulsion. On peut alors suivre la procédure usuelle et trouver les équations de champ d'Einstein [61].

5 Conclusion

Les théories de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique trouvent une formulation naturelle en language algébrique sans nécessité de concept d'espace-temps. Le principe de covariance en Relativité Générale peut se voir en termes de catégories comme une transformation naturelle:

$$R_X \circ \Phi^* = \Phi^* \circ R_Y,$$

avec X et Y des objets de la catégorie des variétés lisses et Φ une flêche; S est un foncteur qui associe à une variété un champ de 2-covecteurs symétriques; $S(\Phi) = \Phi^*$; I est un foncteur qui associe à une variété X un élément inversible de $S(X)$; et R est une tranformation naturelle entre les deux foncteurs I et S.
De même, comme il a été vu, il existe une formulation algébrique de la Mécanique Quantique avec des algèbres de Hopf. On peut traduire ce formalisme en termes de fibrés et champs de jauge. On est ainsi conduit à adopter le point de vue suivant:
Les grandes avancées de la physique et des mathématiques se sont généralement accompagnées d'unifications. Le progrès se trouve tributaire de structures mathématiques plus englobantes qui regroupent une conception de nombreux phénomènes physiques en des principes fondamentaux pouvant être pris comme axiomes. C'est par une remise en cause de certains concepts antérinés qu'un net progrès est possible. C'est ainsi qu'on a vu l'espace absolu remplacé au profit de l'espace-temps de la Relativité Générale, projet inachevé de géométrisation de la physique; de même la Mécanique Quantique relègue le concept de mesure et montre son incertitude. Notre philosophie tend à reconsidérer le concept d'espace-temps qui se trouve rejeté par l'unification des deux théories.
On note ici un parallèle avec les théories de cordes quant à l'indétermination de la nature et dimension de leur espace-temps.

6 Appendice1

Modèle d'une théorie Machienne:
la dynamique de cette théorie dépend de la distance relative entre deux points: $r_{ij}(s) = |x_i(s) - x_j(s)|$. Cette distance est liée au concept de connexité intrinsèque qui fournit l'espace-temps par classe d'équivalence: deux points ayant même relations sont équivalents. La localité est donnée par quotient de la topologie de la relation.
s est un paramètre de temps et la vitesse est donnée par: $v_{ij} = dr_{ij}/ds$. La dynamique est invariante par changement d'échelle monotomne. Le choix d'un système de coordonnées est considéré, mais la théorie n'en dépend plus si on impose une invariance de jauge par les transformations suivantes:

$$X \to X + A(s) + (R(s) \wedge X)$$

avec A une translation et R une rotation. On définit le taux de change-

ment total: $DX/ds = \partial X/\partial s + A^*(s) + (R^*(s) \wedge X)$,
avec $A^*\Delta s$ et $R^*\Delta s$ des changements du premier ordre. On considère les valeurs (A_0^*, R_0^*) de ces paramètres qui minimisent la forme quadratique: $\sum_i DX^i/dsDX^i/ds$. La dérivée intrinsèque sera alors définie par:

$$dX/ds|_{int} = DX/ds(A_0^*, R_0^*).$$

L'action invariante par changement de jauge est donnée de la façon suivante:

$$S(X, A^*, R^*) = \int ds(\sum m_i/2DX^i/dsDX^i/ds)^{1/2}(-V)^{1/2},$$

avec V, le potentiel $V = \sum_{i\neq j} V(X^i - X^j)$ négatif. L'équation d'Euler-Lagrange s'obtient en extrêmisant par rapport à A^* et R^*:

$$d/ds(m_i(-V/T)^{1/2}dX^i/ds) - (T/-V)^{1/2}\partial V/\partial X^i = 0,$$

avec $T = \sum m_i/2DX^i/dsDX^i/ds$. Pour éliminer la dépendance non-locale, on fixe la jauge suivante qui détermine le temps:

$$T + V = 0.$$

Dans cette jauge le système évolue suivant les lois de Newton. Les batements de l'horloge sont déterminés par la distribution de l'énergie dans l'univers en entier ainsi que le repére inertiel [51].

7 Remerciements

Cet article développe le contenu du séminaire Fondation L.De Broglie qui s'est déroulé en juin 1996 à l'invitation de G.Lochak. On tient à remercier de dernier pour son intérêt et ses encouragements.

8 Adresses

Joseph Kouneiher, Université Paris 7 Denis Diderot, case 7064, 2, place Jussieu 75005 PARIS; email: kouneiher@paris7.jussieu.fr. UPR 318 CNRS.
Antoine P.M.Balan, Ecole Polytechnique, URA 169 CNRS F-91128 Palaiseau; email: balan@clipper.ens.fr.

References

[1] B.Russel, *The History of western Philosophy*, Allen & Unwin, London (1954)

[2] I.Newton, *Principia*, traduction de Florian Cajori, University of California Press,(1960).

[3] I.Kant, *Critique de la Raison pure*, GF, Flammarion, 1987.

[4] J.Von Neuman, *Mathematical foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University, (1955).

[5] P.A.M.Dirac, *The Foundamental Equations of Quantum Mechanics*, Proc. Roy. Soc., A 109, p.642 (1926).

[6] P.A.M.Dirac, dans The Mathematical Intelligencer, 11 p.58 (1989).

[7] R.Arnowitt, S.Dieser & C.Misner, dans Recents Developpements in General Relativity, ed. L.Witten, Wiley, New-York and London, (1962).

[8] B.De Witt, Phys.Rev.D(1962).

[9] J.M.Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris (1969).

[10] D.Simms, dans Différential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Lecture notes in Mathematics, 570, ed.K.Bleuler & A.Reetz, Springer-Verlag, p 1-11(1975).

[11] B.Kostant, *Quantization and Unitary Representations*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, 170, p.237-253,(1970).

[12] J.F.Moyal, *Quantum Mechanics as statistical Theory*, Proc.Cambridge Phil. Soc.,45, p.99,(1949).

[13] B.De Witt, *Supermanifolds*, Cambridge monographs on Mathematical-Physics, (1992), 2 ème ed.

[14] F.A.Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New-York- London, (1966).

[15] D.V.Volkov & V.P.Akalov, Phys.Lett.B,46 B,p.109(1973).

[16] J.Wess & B.Zumino, Nucl.Phys.B,70 B,(1974).

[17] L.Corwin, Y.Nieman & S.Sternberg, Rev.Mod.Phys., 647, p.573(1975).

[18] A.Dimakis & F.Müller-Hoissen, Phys.Lett.B,(1993).

[19] V.G.Drinfeld, *Quantum Groups*, in Proc.Inter.Congress of Math., p.798,(1986).

[20] L.D.Faddeev, *From integrable Models to Quantum Groups*, dans 'Fields & Particules', Proc. Schladuming Winter School, p.89(1990).

[21] S.L.Woronwicz, *Compact Matrix Pseudogroups*, Com.Math.Phys., p.613,(1987).

[22] A.Guichardet, *Groupes Quantiques*, Intered. CNRS 1995.

[23] V.Chari & A.Pressley, *Quantum Groups*, Cambridge university, press 1995, ch. 16 16.4 p.556.

[24] M.A.Rieffel, *Projective Modules over Higher-Dimensional non-commutative Tori*, Can.J.Math., vol.XL, no 2, 1988, p.257-338.

[25] J.Cuntz,C.A.Elliot,F.M.Goodman & P.E.T.Jorgensen, *On the classification of non-commutative tori*, II,C.R.Math.Rep.Acad.Sci.Canada 7(1985),p.189-194.

[26] A.Connes, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*,C.R.Acad. Sci. Paris, 290(1980), p.599-604.

[27] A.Connes, *A survey of foliations and operators algebras and applications*, Proc.Symp.Pure Math.38(AMS,Providence)p.521-628.

[28] M.V.Pimsner & D.Voiculescu, *Exact Sequences for K-groups & Ext-groups of certain crossed product C^*-algebras*,J.Operator theory 4(1980), p.93-118.

[29] G.A.Elliot, *On the K-theory of C^* -algebra generated by a projective representation of a torsion-free discrete abelian group*, dans Operator Algebras and group representations1(Pitman,London,1984), p.157-184.

[30] D.Quillen, *Superconnections and the Chern character*, Topology24, p.89(1985).

[31] A.Connes, *Géométrie non-commutative*, Intereditions,Paris(1990).

[32] A.Connes & J.Lott, *Particle Modeles & non-commutative Geometry*, Nucl.Phys.B (proc.suppl.), 18p.29(1990).

[33] R.J.Baxter, *Exactly Solvable Models in statiscal Mechanics*,(Academic, 1982).

[34] E.K.Sklyanin & L.D.Faddev, Sov.Phys.Dokl.23(1978)902.

[35] A.B.Zamolodchikov, Com.Math.Phys.79(1981)p.489.

[36] S.Kobayashi & K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol 2, ch.X, ChXI, (1963), New-York, Wiley.

[37] G.K.Pedersen, *C^*-algebras & their automorphism groups*, (New-York Academic, 1979)

[38] R.Dijkgraaf, V.Pasquier et P.Roche (1992), $Quasi - quantum\ groups\ related\ to\ orbifold\ models$, dans Integrable Systems & Quantum Groups, M.Carfora,M.Martinelli & A.Marjuoli (eds) p75-98, world scientific, Singapour.

[39] R.Dijkgraaf & E.Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Com.Math.Phys.129, p.393-429(1990).

[40] A.Grothendieck(1984), *Esquisse d'un programme*, écrit dans les notes de l'université de Montpellier.

[41] M.Atiyah, *Magnetic Monopols and the Yang-Baxter équations*, Int.Journal of Modern Physics A, vol.6, no 16 (1991)p2761-2774.

[42] E.Witten, *Quantum field theory & the Jones polynomial*, Comm.Math.Phys.121 (1989),p351.

[43] L.Mason & G.Sparling, *Nonlinear Schrödinger and KdV equations are reductions of self-dual Yang-Mills*, Université de Pittsburgh, preprint (1989).

[44] M.F.Atiyah & N.J.Hitchin, *The geometry & dynamics of magnetic monopols*, Princeton Univ.Press (1988).

[45] M.F.Atiyah, *Magnetic monopols in hyperbolic spaces*, Proc.Bombay Colloquium 1984 on vectors bundles on algebraic varieties, Oxford Univ.Press(1987),p1-34.

[46] E.Witten, Conférence dans The Institute Letter, Princeton Newjersey, printemps 1996.

[47] O.Bratteli & D.W.Robinson, *Operator algebras & quantum statistical mechanics*, vol II(Berlin-Springer;1979).

[48] G.Moore & N.Seiberg, *Polynomial equations for rational conformal field theories*, Princeton IAS physics preprint IASSNS-hep 88/18, 1968.

[49] V.F.R.Jones, *Subfactors & related topics*,Berkeley mathematics preprint,1988.

[50] A.Einstein, *The Meaning of Relativity*,Princeton University Press, 1988.

[51] J.Kouneiher & A.Balan, *Théories physiques intrinsèques.*, à paraître.

[52] E.Mach, *The Sciences of Mechanics*, chII, 1893, transl.T.J.Mc Cormack , open court publ., 1989(v,vii).

[53] G.Mackey, *Unitary Group Representations*, Benjamin, New-York, 1978.

[54] I.Segal, *Mathematical Problems of Relativistic Physics*, Amer.Math.Soc., Providence,RI,1963.

[55] J.L.Synge, *Relativity: the general theory*, chp.III (North Holland, Amesterdam,1960).

[56] R.Penrose, dans Battelle Rencontres, ed. C.M.Dewitt & J.A.Wheeler; Benjamin, New-York.

[57] H.Weyl & J.A.Wheeler, sec.2, (Benjamin, New-York, 1968), p.1472(1977).

[58] P.A.M.Dirac, Proc.R.Soc.Lond.A180,1,(1942).

[59] J.Anandan, Phys.Rev.Lett.34,

[60] Y.Aharamov & D.Bohm, Phys.Rev. 115,485(1959).

[61] C.W.Misner, K.S.Thorne & J.A.Wheeler, *Gravitation*, (Freeman,1973).

(Manuscrit reçu le 9 octobre 1996)