Louis de Broglie

Divers problemes concernant les ondes et les corpuscules

Cours professé a l'Institut Henri Poincaré en 1956–1957

(suite)

La loi du mouvement en relativité générale

Les questions relatives au rapport des corpuscules et des champs qui s'étaient posées dans la théorie électromagnétique se retrouvent naturellement dans la théorie de la gravitation en particulier sous la forme qu'elle a prise dans la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Sans rappeler en détail la théorie de la relativité générale, je me contenterai de dire que le champ de gravitation étant représenté par les dix composantes distinctes du tenseur métrique $g_{ik} = g_{ki}$, les équations du champ sont données par

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}g_\mu^\nu R = -\chi T_\mu^\nu$$

$$\text{ou} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\chi T_{\mu\nu}$$

ou $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel contracté

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\rho}F^\rho_{\mu\nu} + F^\epsilon_{\mu\rho}F^\rho_{\nu\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\rho_{\mu\rho} - \Gamma^\epsilon_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\epsilon\rho}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha}\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha})$$

R est l'invariant R^μ_μ et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion qui joue le rôle de "source" pour le champ de gravitation et qui obéit a la loi de conservation $T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(T^{\mu\nu}\sqrt{-g}) + \Gamma^\mu_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}\sqrt{g} = 0$. On démontre, c'est classique, qu'en premiere approximation, en considérant les valeurs de $g_{\mu v}$ comme tres voisines de leurs valeurs galilénnes $g_{44}^{(0)} = 1$, $g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -1$, $g^{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$, on retrouve l'équation de Poisson sous la forme

$$\Delta g_{44} = \chi\rho$$

ρ étant la densité de matiere qui figure dans l'expression des $T_{\mu\nu}$. Il suffit de poser V potentiel de gravitation tel que $g_{44} = 1 + \frac{2V}{c^2}$ et $\chi = \frac{8\pi g}{c^2}$ (g constante de la gravitation) pour obtenir la forme classique de l'équation de Poisson.

$$\Delta V = 4\pi g\rho$$

Mais ici, comme dans la théorie de Lorentz, les équations du champ dont la densité de matiere ρ est la source ne nous apprennent rien sur le mouvement de la matiere en présence du champ et, de meme qu'en théorie de Lorentz il faut adjoindre aux équations du champ les équations de la dynamique corpusculaire et admettre l'expression de la force de Lorentz, il avait fallu dans l'ancienne théorie de la gravitation admettre les équations de la dynamique ou intervenait la force de gravitation déduite de V par $F = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ et en relativité générale, il a fallu admettre, a côté des équations du champ $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi T_{\mu\nu}$, un autre postulat déterminant le mouvement des particules matérielles dans le champ de gravitation représenté par les $g_{\mu\nu}$. Ce postulat nouveau, c'est celui des géodésiques qui donne la forme des lignes d'univers dans l'espace-temps courbe ou regne le champ de gravitation et qui, naturellement, dans le cas d'un espace-temps euclidien, en l'absence du champ de gravitation, doit redonner et redonne effectivement le mouvement rectiligne et uniforme du principe de l'inertie. Ce "postulat des géodésiques" affirme que la ligne d'univers d'une particule matérielle coincide avec l'une des géodésiques de l'espace-temps définie par l'équation bien connue

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dx^2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Dans l'espace-temps courbe de métrique donnée par $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ les géodésiques sont les courbes de longueur minimum satisfaisant entre les points A et B a la condition $\delta \int_A^B ds = 0$ ce qui fait que dans l'espace-temps enclidien, elles représentent des trajectoires rectilignes parcourues d'un mouvement uniforme comme le veut le principe de l'inertie.

La théorie de la gravitation, en relativité générale comme dans sa forme ancienne, souffre donc du meme manque d'unité que l'électromagnétisme classique, en ce sens qu'elle est obligée d'ajoindre arbitrairement aux équations du champ ou la matiere joue le rôle de source un principe étranger donnant le mouvement des particules matérielles dans le champ; et la question se pose ici encore de voir si l'on ne pourrait pas incorporer les particules matérielles dans le champ des gravitation, en tant que petites régions de haute concentration du champ gravifique, de telle sorte que le mouvement de ces particules soit une conséquence de l'évolution du champ.

Mais en théorie relativiste de la gravitation, il apparaît une circonstance n'apparaissant pas en électromagnétisme : les équations ne sont pas linéaires. C'est ce que l'on voit en regardant l'expression rappelée plus haut des composantes $R_{\mu\nu}$ qui contient des produits des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres. C'est seulement quand les écarts des $g_{\mu\nu}$ par rapport a leurs valeur galiléennes sont tres faibles que l'on retombe approximativement sur des équations linéaires dans le vide comme l'équation de Laplace complétée dans la matiere par un second membre indépendant du champ qui donne l'équation de Poisson.

Dans une théorie ou les équations du champ sont linéaires, comme dans la théorie électromagnétique de Lorentz, on peut se donner arbitrairement les termes de source (ρ et $\rho\vec{v}$ dans la théorie de Lorentz) en fonction de x, y, z, t et il en résulte une évolution bien déterminée du champ : cela signifie que la répartition et le mouvement des particules (chargées) ne sont pas déterminés par l'évolution du champ. Mais on s'est vite aperçu qu'en relativité générale, il n'en était pas ainsi, meme quand on introduit au second membre des équations du champ le terme en $T_{\mu\nu}$.

Voici un raisonnement qui a été donné par Eddington et d'autres auteurs pour montrer que les équations du mouvement sont ici liées a l'évolution du champ.

Nous avons rappelé que le tenseur $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ obéit a l'équation de conservation

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \text{c.a d.} \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu}(T^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu}T^{\alpha\nu}\sqrt{-g}$$

(g déterminant des $g_{\mu\nu}$). Intégrons cette relation sur un quadrivolume d'espace-temps tres petit. Il vient par intégration partielle au 1er membre

$$\iiint T^{\mu 1}\sqrt{-g}dx_1dx_2dx_3dx_4 + \iiint T^{\mu 2}\sqrt{-g}dx_1dx_3dx_4 + ... + ...$$
$$= -\iiiint \Gamma^\mu_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\sqrt{-g}dx^1dx^2dx^3dx^4 \tag{1}$$

Supposons que notre petit quadrivolume soit traversé par le tube d'univers infiniment délié d'une seule particule de sorte que c'est seulement dans ce tube que le tenseur $T^{\mu\nu}$ est différent de zéro.

Nous définirons $T^{\mu\nu}$ a la maniere usuelle

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$$

ou ρ_0 est la densité propre de la matiere.

On peut poser $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = dv.c\,dt = dv_0\,ds$, dv_0 étant l'élément de volume tridimensionnel propre, ds l'élément de longueur de la ligne d'univers de la particule. dv_0 est l'élément de volume pour un observateur lié a la particule. On aura donc

$$\iiiint \rho_0 \sqrt{-g}\ dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \iiiint \rho_0 dv_0 ds = m_0 ds$$

m_0 étant la masse propre de la particule.

Le second membre de l'équation (de conservation de l'énergie impulsion intégrée) peut donc s'écrire $-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} m_0 ds$ tandis qu'au premier membre de cette équation, les intégrales triples étendues a la multiplicité tridimensionnelle qui limite le petit quadrivolume ne sont différents de zéro qu'aux points ou la ligne d'univers de la particule traverse cette multiplicité tridimensionnelle.

Nous pouvons choisir les coordonnées de façon qu'au voisinage immédiat de ces deux intersections la multiplicité tridimensionnelle ait pour équation $x^1 =$ Cte. Alors il ne restera dans la formule (1) que la premiere des intégrales triples de sorte que le premier membre sera égal a la différence des valeurs aux points d'intersection A et B de la quantité.

$$\iiint \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \rho_0 \sqrt{-g}\ dx^2 dx^3 dx^4$$

or on peut écrire

$$\sqrt{-g}\ \frac{dx^1}{ds} dx^2 dx^3 dx^4 = \frac{dv_0\ ds}{ds} = dv_0$$

et il reste simplement

$$|m_0 \frac{dx^\mu}{ds}|_A^B = \frac{d}{ds}(m_0 \frac{dx^\mu}{ds}) ds$$

ds étant la longueur (infiniment petite) de la ligne d'univers de la particule de A a B.

Finalement l'équation (1) nous donne

$$\frac{d}{ds}(m_0 \frac{dx^\mu}{ds}) + m_0 \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad (2)$$

Si l'on peut considérer la masse propre m_0 comme constante le long de la ligne d'univers, on retrouve l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Or l'équation a elle meme pour conséquence que m_0 doit etre une constante car on en tire (apres multiplication par $m_0\ g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}$)

$$m_0\ g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{d}{ds}(m_0\frac{dx^\mu}{ds}) = -m_0^2 g_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

et le second membre s'écrit en vertu de la valeur de $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$

$$-\frac{1}{2}m_0^2\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = -\frac{1}{2}m_0^2\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$$

d'ou

$$m_0 g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{d}{ds}(m_0\frac{dx^\mu}{ds}) = -\frac{1}{2}m_0^2\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$$

En ajoutant l'équation obtenue en permutant les indices μ, ν, on obtient

$$g_{\mu\nu}m_0\frac{dx^\nu}{ds}\frac{d}{ds}(m_0\frac{dx^\mu}{ds}) + g_{\mu\nu}m_0\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d}{ds}(m_0\frac{dx^\nu}{ds}) + m_0^2\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

soit

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}m_0^2) = 0$$

Or de $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, on tire $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1$, donc $\frac{d}{ds}(m_0^2) = 0$. L'équation (2) entraînant que m_0 est constant le long de la ligne d'univers montre bien que cette ligne d'univers est une géodésique.

Ainsi, bien que nous ayons maintenu au second membre des équations du champ de "terme de source" en $T_{\mu\nu}$, nous sommes parvenus a voir que le mouvement d'un corpuscule matériel dans un champ de gravitation pure (a l'exclusion de tout champ électromagnétique) doit etre représenté par une géodésique de l'espace-temps. Aucun résultat de ce genre ne pourrait etre obtenu avec des équations du champ qui seraient linéaires avec des termes de sources au second membre car alors on pourrait se donner arbitrairement la répartition et le mouvement des sources (meme supposées ponctuelles et réprésentées alors par des fonctions δ). C'est donc certainement le caractere non linéaire des équations du champ gravifique qui détermine le mouvement des corpuscules.

Toutefois, il faut faire encore ici une remarque importante. Il ne s'agit pas ici d'une véritable incorporation du corpuscule dans le champ puisque nous conservons au second membre des équations de champ des termes en $T_{\mu\nu}$ sans considérer que ces termes sont des fonctions du champ : les corpuscules ne sont donc pas considérées comme de tres petites régions de tres haute concentration du champ mais comme des tubes d'univers tres déliés "meublés" (suivant l'expression de MM. G. Darmois et A. Lichnerowicz) par de la matiere. Il est simplement prouvé qu'en vertu des équations meme du champ, le probleme ne comporte une solution que si le tube meublé de matiere a son axe disposé suivant une géodésique. Il s'agit donc d'une sorte de condition de compatibilité et non de l'incorporation du corpuscule dans le champ.

Le probleme a été étudié d'une façon approfondie par M. Georges Darmois notamment au cours de conférences faites a l'Université de Bruxelles en 1926 et publiées en 1927 dans le Mémorial des Sciences Mathématiques sous le titre "Les équations de la gravitation einsteinienne". M. André Lichnerowicz a appronfondi et étendu de diverses manieres les idées de M. Darmois sur ce probleme et il a exposé son point de vue dans le chapitre III de son beau livre récent sur "Les théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnétisme" (Masson, 1955), chapitre qui a pour titre "Les conditions de raccordement". Si l'on considere un tube d'univers tres délié "meublé" a son intérieur par une distribution donnée de $T_{\mu\nu}$, ce tenseur étant nul a l'extérieur du tube, les équations du champ comporteront un second membre a l'intérieur du tube tandis que le second membre sera a nul a l'extérieur. Le tube sera limité par une hypersurface paroi du genre temps sur laquelle le champ intérieur et le champ extérieur devront se raccorder avec continuité du champ et de ses dérivés premieres. Le tenseur $T_{\mu\nu}$ étant de la forme $\rho_0 u^\mu u^\nu$, les u^μ composantes du quadrivecteur unitaire "vitesse d'univers de la matiere" définissent dans l'espace-temps les "lignes de courant" de la matiere dans le tube. Ces lignes de courant sont des géodésiques et l'on démontre que l'hypersurface paroi du tube d'univers doit etre formée par un ensemble de lignes de courant géodésiques du probleme intérieur. Le raccordement exige alors que ces lignes soient également des géodésiques du champ extérieur. On arrive ainsi par étapes a l'énoncé suivant (Lichnerowicz p. 59) : "La trajectoire spatiotemporelle de tout point matériel dans un champ de gravitation extérieur donné est une géodésique orientée dans le temps du ds^2 extérieur". On trouvera les démonstrations détaillées et les extensions diverses dans l'ouvrage de M. Lichnerowicz.

L'oeuvre d'Albert Einstein et de ses collaborateurs

Naturellement Einstein a été amené a réfléchir sur le probleme de la loi du mouvement et de l'incorporation des corpuscules au champ et il l'a fait avec sa profondeur habituelle. Il semble qu'Einstein ait toujours considéré la présence des termes de sources dans les théories de l'électromagnétisme et de la gravitation comme une imperfection, on pourrait presque dire une impureté et qu'il ait toujours admis la nécessité de faire finalement reposer toute la théorie des champs uniquement sur des équations au dérivées partielles ne contenant pas de termes de sources. Parlant de l'équation fondamentale de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi T_{\mu\nu}$$

il a écrit assez drôlement : "Elle ressemble a un édifice dont une aile (le premier membre) serait bâtie en marbre fin tandis que l'autre (le deuxieme membre) serait d'un bois de qualité inférieure". Il a donc cherché a utiliser uniquement l'équation du second membre

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

et il a cherché des solutions correspondant a une tres grande concentration de $g_{\mu\nu}$ dans une petite région et réalisant ainsi l'incorporation du corpuscule au champ. Si l'on se rapporte a la tres intéressante introduction de la note qu'il a fait paraître en 1927 avec Grommer dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Berlin[1], il aurait longtemps cherché en vain des solutions régulieres (sans singularité) de ce type représentant un corpuscule a l'aide d'un "champ a bosse".

Découragé par ses insucces, il semble s'etre rallié pendant quelque temps a l'idée que l'on pourrait admettre des solutions a singularité des équations du champ, le mouvement d'un corpuscule dans un champ gravifique étant alors représenté par une ligne d'univers "singuliere" c. a d. sur laquelle le champ devient infini. Adoptant ce point de vue, Einstein a démontré en 1927 dans sa note avec Grommer que la ligne d'univers singuliere devait coincider avec une géodésique du champ extérieur.

[1] A. Einstein, J. Grommer, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. phys.-math. KLasse, 1927, 2-13.

La démonstration d'Einstein et Grommer a été étendue et précisée dans divers travaux ultérieurs [2] On se reportera a ces mémoires pour le détail des démonstrations, mais je voudrais montrer que l'on peut rattacher les résultats d'Einstein et de ses éleves aux théories de Georges Darmois et d'André Lichnerowicz.

Reprenons en effet le point de vue de ces deux derniers auteurs qui consiste a représenter l'évolution d'un corpuscule a l'aide d'un tube d'univers tres délié dont l'intérieur est "meublé" de matiere, c.a.d. que le tenseur $T^{\mu\nu}$ y a une valeur non nulle. Nous avons vu que l'hypersurface, paroi du tube d'univers est formée par des géodésiques du champ extérieur. De plus, on peut démontrer (voir Lichnerowicz loc. cit., p. 144) qu'il est impossible de prolonger *régulierement* le champ extérieur a l'intérieur du tube d'univers (supposé vide de matiere). Autrement dit, le prolongement du champ extérieur comporte nécessairement une singularité, a une ligne singuliere a l'extérieur du tube.

Pour comprendre la nature de ce théoreme, considérons dans la théorie classique de la gravitation une sphere S remplie de matiere de densité uniforme ρ et de rayon R dont la masse est partout égale a $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Par raison de symétrie, le champ a l'intérieur de la sphere est radial et, d'apres la formule de Poisson ($\Delta V = 4\pi\rho$) ou, si l'on préfere le célebre théoreme de Newton sur le champ de distribution a symétrie sphérique, le champ intérieur a pour valeur $F_i = -\frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{r^2}\rho = -\frac{4}{3}\pi r \rho = -M\frac{r}{R^3}$ car $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Le champ extérieur F_e est aussi radial et, sans préjuger de sa valeur, nous admettrons qu'il se raccorde continuement avec le champ intérieur sur la sphere S, c.a.d. que pour $r = R$ on doit avoir $F_i = F_e$. Considérons deux surfaces sphériques S_i et S_e infiniment voisines de la surface sphérique S mais l'une a l'intérieur et l'autre a l'extérieur de la sphere. Nous avons évidement

$$\text{flux } F_i \text{ a travers} \quad S_i = 4\pi R^2 \times (-M\frac{r}{R^3})\Big|_{r=R} = -4\pi M$$

ce qui est en accord avec la formule de Poisson (car ce flux doit etre égal a $\int_s \operatorname{div} F_i d\tau = \int_s -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V d\tau = -\int_s \Delta V d\tau = -4\pi M$).

Cherchons a évaluer le flux de F_e a travers S_e. Si l'on pouvait prolonger régulierement F_e dans S *supposée vidée de matiere*, on aurait

---

[2] Einstein, Infeld et Hoffmann Ann. Math. t. 39 p. 65-100 (1938) - Einstein et Infeld, Ann. Math. t. 41 p. 455-464 (1940) - Infeld, Review of modern Physics t. 21 p. 408 (1949).

dans toute la sphere $\Delta V_e = 0$ d'ou div $F_e = 0$ et par suite

$$\text{flux } F_e \text{ a travers} \quad S_e = \int_s \operatorname{div} F_e d\tau = 0$$

Mais la continuité de F_i et de F_e sur S fait que le flux de F_e a travers S_e doit etre égal aux flux de F_i a travers S_i. La derniere formule que nous venons d'obtenir est donc inexacte, ce qui prouve que *le théoreme flux divergence n'est pas applicable* au prolongement de F_e a l'intérieur de la sphere et que par suite ce prolongement a une singularité quelque part dans la sphere. Nous pouvions prévoir ce résultat puisque F_e a pour expression $F_e = -\frac{M}{r^2}$ pour $r \geq R$ et que cette fonction prolongée a l'intérieur de la sphere a une singularité en $r = 0$. Il semble que nous ayons enfoncé une porte ouverte, mais en réalité, le raisonnement que nous venons de faire a l'avantage de pouvoir etre transposé dans l'espace-temps et applicable aux champs gravifiques intérieurs et extérieurs au tube d'univers d'un corpuscule, champs qui se raccordent continuement sur l'hypersurface paroi du tube. Cest ainsi que M. Lichnerowicz montre par l'échec de l'application du théoreme flux-divergence pour l'évaluation du flux du champ extérieur a travers l'hyperparoi que ce champ prolongé a l'intérieur du tube d'univers supposé vide de matiere comporte nécessairement une singularité et, comme cette singularité se répercute tout le long du tube d'univers, elle est constituée par une ligne d'univers singuliere contenue dans le tube.

Considérons maintenant pour représenter le corpuscule des tubes d'univers de plus en plus déliés. Si petite que soit leur section transversale, ces tubes auront leur hyperparoi constituée par des lignes géodésiques du champ extérieur et ils contiendront une ligne d'univers qui sera une singularité du champ extérieur prolongé. En passant a la limite d'un tube infiniment délié, on voit que ce tube doit constituer a la fois une ligne singuliere du champ et une géodésique de ce champ. Ce raisonnement qui ne remplace pas les raisonnements plus rigoureux d'Einstein et de ses éleves montre cependant le lien qui existe entre leurs résultats et ceux de MM. Georges Darmois et Lichnerowicz.

Bien qu'Einstein se soit ainsi, dans les travaux que j'ai cités plus haut, rallié a l'idée que l'existence et le mouvement d'un corpuscule peuvent etre représentés par une ligne singuliere du champ (naturellement du genre temps) dans l'espace-temps, il ne semble pas que cette idée lui ait donné entierement satisfaction et il paraît revenir souvent dans les 20 dernieres années de sa vie a l'idée, qui avait été son idée primitive, que le corpuscule doit etre représenté par une solution des équations du champ comportant une tres petit région de forte concentration, mais sans véritable singularité. Dans une étude sur la théorie de la relativité publiée en 1936, donc neuf ans apres son travail avec Grommer, Einstein écrit : “ce qui me paraît certain, c’est qu’il ne faut pas qu’il y ait dans les fondements d’une théorie cohérente du champ un concept quelconque concernant les particules. Toute la théorie doit etre basée uniquement sur des équations aux dérivées partielles et leurs solutions sans singularité” phrase qui doit s’interpréter, je crois, en disant les corpuscules ne sont pas autre chose qu’une petite région en général mobile ou le champ atteint de tres hautes valeurs, mais sans véritable singularité.

Dans le meme exposé, un peu plus loin, il écrit : “Comment devons-nous procéder pour obtenir une théorie complete de la matiere constituée par des corpuscules ? Dans une telle théorie, les singularités doivent certainement etre exclues car sans une telle exclusion, les équations différentielles (aux dérivées partielles) ne déterminent pas completement le champ” et il expose brievement ses tentatives, sur lesquelles nous reviendrons plus, pour construire une solution sans singularité.

Qu’est-ce qui genait Einstein dans l’idée de solution a singularité puisque en assimilant un corpuscule a une ligne singuliere du champ, on parvient a justifier le postulat des lignes géodésiques ? C’est sans doute ceci. Si l’on considere des tubes d’univers tres déliés meublés de matiere, on se donne une distribution de sources $T_{\mu\nu}$ arbitraire dans ce tube. Si l’on passe au cas limite d’un tube d’univers infiniment délié se réduisant pour ainsi dire a son axe, ce qui conduit a considérer une ligne singuliere, cela revient a considérer des sources ponctuelles formant une ligne d’univers et définies dans chaque coupe a temps constant par une fonction δ. Dans ce cas comme dans l’autre, on démontre que le tube d’univers délié ou réduit a une ligne doit épouser la forme d’une géodésique du champ extérieur. Mais c’est la une sorte de condition de compatibilité sans laquelle, avec la distribution de sources données, il n’y aurait pas de solution des équations non linéaires du champ. Ce n’est qu’en apparence que, dans le cas de la ligne singuliere, on a éliminé la donnée arbitraire des sources : en réalité, on se donne des sources pontuelles le long de la ligne d’univers singuliere. Einstein pensait sans doute que la solution idéale du probleme de l’incorporation des corpuscules dans le champ ne devrait comporter aucune donnée de sources ponctuelles ou non : elle devrait s’obtenir en construisant des solutions des équations du champ mais sans aucune singularité véritable. Les phrases que j'ai citées tout a l'heure traduisent bien une telle conception.

Dans le cadre de la relativité générale primitive, le probleme que se posait Einstein devait etre formulé comme suit : trouver une solution du type souhaité pour la représentation d'un corpuscule de l'équation $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$ débarassée des termes de sources en $T_{\mu\nu}$ qui se réduit d'ailleur a $R_{\mu\nu} = 0$. On sait depuis un travail de Schwarzschild en 1915 que cette équation admet pour solution des $g_{\mu\nu}$ a singularité ponctuelle correspondant au ds^2

$$ds^2 = c^2(1 - \frac{\alpha}{r})dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad , \quad \alpha = \frac{2gM}{c^2}$$

et l'on considere cette solution comme définissant la métrique de l'espace-temps autour d'un corpuscule matériel ponctuel. Naturellement cette célebre solution de Schwarzschild ne pouvait pas donner satisfaction a Einstein puisqu'elle comporte une singularité en $r = \alpha$. Il a longtemps, semble-t-il, cherché une solution sans singularité des équations $R_{\mu\nu} = 0$ susceptible de représenter un corpuscule. N'ayant pu en trouver, il s'était résigné dans son mémoire avec Grommer a envisager des solutions a singularité, mais comme je l'ai dit, il préférait les solutions sans singularité et il n'a pas cessé d'en chercher. Dans un curieux mémoire publié avec N. Rosen[3], il est parvenu a en trouver une par un procédé assez curieux.

Einstein et Rosen ont remarqué que dans $R_{\mu\nu}$ figurent non seulement les $g_{\mu\nu}$, mais aussi les $g^{\mu\nu}$ qui sont définis comme quotient des mineurs des $g_{\mu\nu}$ correspondants dans le déterminant g des $g_{\mu\nu}$, par ce déterminant lui-meme. Pour avoir des $R_{\mu\nu}$ bien définis et de valeur finie, il ne suffit pas que les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées premieres soient continus et dérivables, il faut aussi que g ne s'annule pas sans quoi les $g_{\mu\nu}$ seraient infinis. Pour éliminer cette difficulté possible, on peut remplacer les équations $R_{\mu\nu} = 0$ par les équation $g^2 R_{\mu\nu} = 0$ qui se trouvent ne plus contenir que des fonctions *entieres* des $g_{\mu\nu}$ et de leur dérivées.

Naturellement les équation $g^2 R_{\mu\nu} = 0$ admettent la solution de Schwarzschild avec sa singularité pour $r = \alpha$. Mais si nous introduisons une nouvelle variable ρ définie par

$$\rho^2 = r - \alpha$$

---

[3] A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev. t. 48, 1935, p. 73-77.

on obtient le ds^2 suivant

$$ds^2 = c^2 \frac{\rho^2}{\rho^2 + \alpha} dt^2 - 4(\rho^2 + \alpha) d\rho - (\rho^2 + \alpha)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2)$$

Cette solution est réguliere pour toutes les valeurs de ρ de $-\infty$ a $+\infty$. Pour $\rho = 0$, il est vrai, le déterminant g est nul mais comme nous écrivons $g^2 R_{\mu\nu} = 0$ au lieu de $R_{\mu\nu} = 0$, cela ne nous gene plus.

Si l'on fait varier ρ de $-\infty$ a $+\infty$, r varie de $+\infty$ a α puis revient de α a $+\infty$ tandis que pour les valeurs $r < \alpha$, il n'existe pas de valeurs correspondantes réelles pour ρ. Ainsi la solution de Schwarzschild devient une solution réguliere si l'on se représente l'espace physique comme étant composé de deux coupes *identiques*[4] voisines se raccordant sur l'hypersurface $\rho = 0$ ou $r = \alpha$, tandis que sur cette hypersurface le déterminant g s'évanouit. Einstein a appelé cette connexion entre deux coupes identiques un “pont” et constate que l'existence d'un tel pont entre les deux coupes correspond a l'existence d'une particule matérielle neutre qui est décrite d'une façon libre de singularité.

On pourrait d'ailleurs, me semble-t-il, se contenter de considérer la variation de ρ de 0 a ∞ puisque cette variation fournira toutes les valeurs de r de α a $+\infty$ et les valeurs correspondant des $g_{\mu\nu}$. Quant aux valeurs de $r < \alpha$, elles correspondraient a une sorte de “zone interdite” définissant l'intérieur du corpuscule.

Einstein ajoute : “la solution du probleme du mouvement des particules neutres revient alors manifestement a la découverte de solutions des équations de la gravitation libres de singularité qui contiennent plusieurs points. Et il fait la remarque intéressante que la solution obtenue implique que la masse m doit toujours etre positive car aucune solution libre de singularité ne peut correspondre a la solution de Schwarzschild pour m négatif”.

Einstein a d'ailleurs aussi démontré que les équations combinées de la gravitation et de l'électromagnétisme admettent aussi, du moins dans des cas simples, des solutions libres de singularité correspondant a des ponts du type précédent.

Si ingénieuses que soient les solutions envisagées par Einstein et Rosen, il ne semble pas qu'elles aient été utilisées par les théoriciens et qu'elles aient conduit, du moins jusqu'a présent, a des résultats féconds.

[4] Le mot “identique” signifie qu'une meme valeur de r correspond a 2 valeurs égales et opposées de ρ et a une valeur bien définie des $g_{\mu\nu}$.

Tout ce que nous venons de dire se rapporte a la relativité générale et a la théorie de la gravitation telles qu'elles découlaient des travaux d'Einstein en 1916. Naturellement ou retrouve des points de vue analogues quand on étudie la théorie des champs unifiés développée plus récemment par Einstein et approfondie par les travaux d'autres savants comme Schrödinger ou, ici meme, Mme Tonnelat. Dans ces théories ou l'on cherche a faire rentrer tous les champs gravifiques, électromagnétiques ou éventuellement mésoniques en généralisant convenablement les propriétés géométriques de l'ancien espace-temps de la relativité, on peut chercher notamment, en introduisant les idées de la théorie de Born, a construire des solutions a caractere non-linéaire comportant des petites régions avec de grandes concentrations du champ susceptibles de représenter les corpuscules et de retrouver pour le mouvement de ces régions les lois du mouvement correspondant a l'existence de la force de gravitation et de la force de Lorentz. Ces théories sont difficiles et loin d'avoir pris une forme entierement satisfaisante : on en trouvera l'exposé dans le bel ouvrage récent de Madame Tonnelat "La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques uns des ses développements" et notamment dans les derniers chapitres. Nous n'y insisterons pas ici.

Conclusions au sujet des théories qui ont été exposées jusqu'ici

Nous venons d'étudier rapidement toute une série de théories allant de l'assez vieille théorie de Mie aux formes les plus récentes de la théorie des champs unifiés d'Einstein : on y retrouve toujours un courant d'idées qui consiste a cherche a "incorporer" les corpuscules dans le champ de telle façon que le mouvement des corpuscules soit entierement déterminé par les équations du champ. Les deux points essentiels de cette conception sont les suivants : 1) les corpuscules sont définis comme de tres petites régions de haute concentration du champ, c'est la ce qui permet l'incorporation du corpuscule dans le champ ou, si l'on veut, c'est ce qui permet de ne pas introduire explicitement la notion de corpuscule qui n'est plus qu'un accident local dans la répartition du champ ; 2) les équations du champ sont non linéaires car aucun systemes d'équations contenant des termes représentant des sources pontuelles et étendues ne pourrait imposer un mouvement déterminé a ces sources.[5]

[5] En dehors de la région de haute concentration du champ, les équations du champ prennent une forme approximative qui est linéaire, mais la non-linéarité intervient d'une façon essentielle la ou le champ est tres élevé

La question de savoir si la région “corpusculaire” de tres haute concentration du champ comporte ou non une véritable singularité ponctuelle du champ est moins facile a trancher puisque, nous l'avons vu, des conditions de compatibilité peuvent imposer a la singularité ponctuelle un certain mouvement. Néanmoins on peut penser avec Einstein qu'il serait préférable de n'admettre que des champs a bosses représentés par des solutions libres de toute singularité.

Le courant d'idées que nous avons étudié est du plus grand intéret : on peut croire qu'il fournira un jour la véritable maniere de représenter la dualité des corpuscules et des champs. Mais il faut reconnaître que les tentatives de Mie, de Born et d'Einstein dans ce sens se sont heurtées a beaucoup de difficultés et qu'aucune n'a remporté un succes véritable. De plus il est impossible de ne pas remarquer que ces tentatives ne sont pas quantiques, c'est-a-dire qu'aucune d'elles ne fait intervenir le quantum d'action h : or a l'heure actuelle il est absolument certain que toute tentative de représentation des phénomenes microphysiques qui ne fait pas intervenir le quantum d'action est radicalement insuffisante.

Nous allons maintenant introduire les idées que j'avais introduites en 1927 sous le nom de théorie de la double solution pour obtenir une interprétation de la mécanique ondulatoire rendant compte de la dualité des ondes et des corpuscules. Nous serons ainsi amenés a nous représenter un corpuscule comme une tres petite région de haute concentration a l'intérieur d'un champ ondulatoire, le champ u, dont la définition introduit le quantum d'action h ; nous verrons que le mouvement du corpuscule est imposé par l'équation de propagation du champ u, et nous serons amenés a admettre que cette équation de propagation de u, bien que se réduisant a l'équation de propagation linéaire de la mécanique ondulatoire usuelle en dehors de la région de haute concentration, doit comporter des termes non linéaires dont l'influence devient essentielle la ou le champ u prend des valeurs tres élevées. L'analogie de ces conception avec les théories que nous avons étudiées est évidente et constitue l'un des aspects les plus intéressants de la théorie de la double solution. Mais avec cette conception, chaque corpuscule a son champ u a caractere ondulatoire et quantique et constitue une “bosse” de ce champ u. Le corpuscule est naturellement entouré d'un champ gravifique et éventuellement, s'il est chargé, d'un champ électromagnétique (ou meme d'un champ mésonique), mais ce ne sont pas ces champs qui définissent sa structure, c'est le champ u. Il y a la une conception nouvelle qui amene a modifier assez profondément les idées qui servaient de bases aux tentatives de Mie, Born et Einstein. Nous reviendrons sur ce point apres avoir exposé la théorie de la double soulution.