

Louis de Broglie

**Divers problèmes concernant
les ondes et les corpuscules**

Cours professé à l'Institut Henri Poincaré en 1956–1957

(suite)

La théorie de la double solution et la loi du guidage

Résumé des idées fondamentales de la théorie de la double solution

Je vais donc résumer rapidement les bases de l'interprétation de la mécanique ondulatoire par la "théorie de la double solution" que j'avais esquissée dès 1927 et que j'ai reprise ici, il y a environ 5 ans, avec la collaboration de quelques uns d'entre vous.¹

Mon idée initiale avait été qu'il fallait maintenir la conception d'une réalité physique indépendante de l'observation et chercher, comme l'avait toujours fait la mécanique classique, une représentation claire des phénomènes dans le cadre de l'espace et du temps. J'avais été ainsi amené à rechercher une vue synthétique de la dualité des ondes et des corpuscules, compatible avec les idées que j'avais introduites en mécanique ondulatoire en 1923-24 qui venaient (travaux de Schroedinger 1926, découverte de la diffraction des électrons début 1927) de se confirmer d'une façon remarquable. Suivant tout naturellement le même courant d'idées que nous avons retrouvé dans les théories de Mie et d'Einstein, je cherchais à me représenter le corpuscule comme une sorte d'accident local, de singularité, au sein d'un phénomène ondulatoire étendu² : cela m'avait amené à me représenter la réalité physique non pas par les solutions continues Ψ de l'équation des ondes exclusivement envisagées par M. Schroedinger et ses continuateurs, mais par d'autres

¹ Voir mon livre récemment paru chez Gauthier Villars: *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

² NDLR: enréalité l'idée de l'onde singulière avait déjà été proposée par Louis de Broglie dès 1926: J. Phys. série VI, tome VII (1926), p. 321.

solutions que, pour les distinguer des solutions Ψ , je désignais par u et qui comporteraient une singularité. En y réfléchissant, je voyais tout de suite un grand avantage à cette conception d'un corpuscule ainsi "incorporé" à un champ ondulatoire étendu et par conséquent solidaire de l'évolution globale de ce champ : elle paraissait permettre de comprendre que le corpuscule soit localisé et que cependant son mouvement puisse être influencé par la présence d'obstacles éloignés de sa trajectoire comme cela est nécessaire pour interpréter, en conservant l'idée du corpuscule localisé, les phénomènes d'interférences et de diffraction.

Mais l'interprétation probabiliste de l'onde Ψ , issue primitivement des travaux de M. Born et confirmée par ses succès, me paraissaient néanmoins devoir être maintenue. Tandis que l'onde u serait la véritable description de la structure des unités physiques, l'onde Ψ serait une onde fictive, à caractère subjectif, susceptible de nous fournir des renseignements statistiques exacts sur la position et le mouvement des corpuscules. Mais, pour qu'elle puisse remplir ce rôle, encore faut-il qu'elle soit reliée à d'une certaine façon à l'onde u .

Or, je l'ai expliqué dans un cours antérieur, mes premières considérations sur la mécanique ondulatoire m'avaient conduit à attribuer une importance particulière à la "phase" de l'onde que j'associais au corpuscule. C'est essentiellement l'accord des phases du corpuscule considéré comme une horloge et de l'onde environnante qui m'avait conduit aux relations fondamentales ($W = h\nu$, $\lambda = \frac{h}{p}$)³ de la mécanique ondulatoire et c'était la fréquence et la longueur d'onde, éléments dérivés de la phase, qui établissaient ainsi un pont entre la propagation de l'onde et le mouvement du corpuscule. Ceci me conduisait à écrire la fonction d'onde Ψ usuellement envisagée sous la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ avec a et φ réels et à attribuer à la phase φ (qui, à l'approximation de l'optique géométrique, coïncide avec la fonction de Jacobi S) une signification physique profonde. Au contraire, l'amplitude a de l'onde Ψ qui est continue, ne me semblait pas avoir de signification objective, mais avoir seulement une signification statistique.

Parmi les probabilités envisagées par l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire, déjà admise à cette époque, la probabilité de présence $|\Psi|^2 = a^2$ me paraissait avoir sur les autres une sorte de priorité car elle correspondait dans mon idée à la possibilité que le corpuscule soit

³ NDLR: La relation $W = h\nu$, écrite ici, n'est pas la loi de Planck, car elle ne se restreint pas à la lumière mais s'applique à toute particule matérielle.

en un point déterminé de l'espace dans l'état représenté par l'onde Ψ . les autres probabilités telles que $|c(\vec{p})|^2$ pour la valeur $\vec{p}$ de la quantité de mouvement ($c(\vec{p})$ étant le coefficient de Fourier correspondant à $\vec{p}$ dans le développement du Ψ en ondes planes monochromatiques) devaient avoir selon moi un sens moins immédiat : elles ne seraient valables qu'après l'action sur l'onde réelle u , à laquelle le corpuscule est incorporé, d'un dispositif de mesure de la grandeur envisagée quand on ne connaît pas encore le résultat de cette mesure.

Mais, de ces idées générales, j'avais admis le principe suivant auquel j'avais donné le nom de principe de la double solution. "A toute solution continue $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ des équations d'onde de la mécanique ondulatoire doit correspondre une solution à singularité $\mu = f e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ ayant la même phase φ que la solution Ψ , mais une amplitude f présentant une singularité ponctuelle en général mobile".

A l'époque où j'écrivais mon mémoire sur la double solution (printemps 1927), on connaissait l'équation des ondes Ψ de Schroedinger

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} m V\Psi = \frac{4\pi i}{h} m \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

correspondant au mouvement d'un corpuscule de masse m dans un champ dérivant de la fonction potentielle $V(xyzt)$ supposé connu.

Aujourd'hui on doit considérer cette équation comme valable seulement pour les corpuscule de spin 0 à l'approximation newtonienne. Peu après le travail de Schroedinger, on avait aperçu quelle devait être l'équation qui généralise celle de Schroedinger quand on doit tenir compte des corrections de relativité. Cette équation qu'on nomme habituellement "l'équation de Klein-Gordon" et qui constitue l'équation des ondes Ψ relativiste pour les particules de spin 0 s'écrit

$$\square\Psi - \frac{4\pi i}{h} \frac{\varepsilon}{c^2} V \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{4\pi i}{h} \sum_{x,y,z} \frac{\varepsilon}{c} A_x \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{4\pi^2}{h^2} [m_0^2 c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} (V^2 - A^2)]\Psi = 0$$

où m_0 est la masse propre de la particule, ε sa charge électrique, c la vitesse de la lumière dans le vide, V et $\vec{A}$ les potentiels scalaires et vecteur dont dérive le champ électromagnétique auquel le corpuscule est éventuellement soumis.

La seconde équation étant la plus générale, et contenant l'équation de Schroedinger comme cas particulier à l'approximation non relativiste,

c'est sur l'équation de Klein-Gordon que j'avais raisonné. Dans le cas de l'absence de champ, on a alors

$$\square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0 c^2 \Psi = 0$$

et la solution la plus simple de cette équation quand on se limite aux ondes continues est l'onde plane monochromatique

$$\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - pz)}$$

avec a constant et $\frac{W^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2$. W est l'énergie du corpuscule $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ($\beta = \frac{v}{c}$) et $\vec{p}$ sa quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, la direction de propagation de l'onde étant prise comme axe des z .

Or j'avais aisément trouvé que l'équation de Klein-Gordon en l'absence de champ ($V = \vec{A} = 0$) admet aussi la solution à singularité mobile⁴

$$u(x, y, z, t) = \frac{C^{te}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z-vt)^2}{1-\beta^2}}} e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p^2)}$$

qui, dans le système propre du corpuscule, se réduit à:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{C^{te}}{r_0} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t_0} \quad , \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

La solution $u(x, y, z, t)$ a la même phase que le Ψ , mais son amplitude présente une singularité $x = y = 0, z = vt$ qui se déplace avec la vitesse $v = \beta c$ le long d'une droite parallèle à la direction de propagation de l'onde Ψ , ce qui donne une image claire du mouvement du corpuscule. Dans ce cas très simple on obtenait donc exactement ce que je cherchais, (la valeur constante a de l'amplitude) de l'onde Ψ ayant simplement pour signification que, si l'on ignore la position du corpuscule-singularité, on doit considérer toutes les trajectoires et toutes les positions possibles du corpuscule à tout instant t comme également probables.

Encouragé par ce premier succès, j'ai considéré le cas général de l'équation de Klein-Gordon avec des potentiels $V(xyzt)$ et $\vec{A}(xyzt)$ fonctions continues données de xyz et j'ai pu démontrer dès 1927 les propositions suivantes.

⁴ NDLR: c'est cette solution, avec le même commentaire, que Louis de Broglie donnait en 1926 (loc. cit.).

1) S'il existe deux solutions Ψ et u de l'équation de Klein-Gordon, l'une à amplitude continue, l'autre à amplitude comportant une singularité mobile, qui ont la même phase φ (c. à d., si l'on peut écrire $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ et $u = f e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$) la singularité de u se déplacera dans l'espace avec la vitesse instantanée donnée par la formule (formule du guidage)⁵

$$\vec{v}(x, y, z, t) = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}$$

ce qui, quand on peut négliger les corrections de relativité et supposer nul le champ magnétique (c'est-à-dire quand $\vec{A} = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \approx m_0 c^2$) donnera simplement

$$m\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

formule qui correspond à l'équation de Schroedinger. Si de plus la propagation de l'onde Ψ s'opère à l'approximation de l'optique géométrique, on pourra poser $\varphi \simeq S$ et l'on retrouvera la formule classique de la théorie d'Hamilton-Jacobi donnant la quantité de mouvement du corpuscule quand il parcourt l'un des rayons de l'onde associée par cette théorie à la phase S (fonction de Jacobi).

2) Le mouvement du corpuscule est le même que s'il était soumis, en plus de la force classique de Lorentz dérivant des potentiels V et $\vec{A}$, à une force égale à $\overrightarrow{\text{grad}} Q$, Q étant un "potentiel quantique" ignoré des théories classiques et égal, à l'approximation non relativiste de l'équation de Schroedinger, à

$$Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\Delta f}{f} \right) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)$$

les grandeurs entre parenthèses étant calculées au point où se trouve le corpuscule et l'égalité des deux expressions résultant automatiquement de l'hypothèse que les deux ondes Ψ et u ont la même phase φ .

La formule du guidage traduit sous forme mathématique le fait que le corpuscule, parce qu'il est intégré dans l'onde, est analogue à une horloge qui se déplace en restant en phase avec l'onde. Elle est à ce point de vue le couronnement de mes considérations initiales sur l'onde

⁵ L. de Broglie, J. Phys. série VI, t; VIII n° 5 (1927), p. 225.

et le corpuscule en mécanique ondulatoire. Mais on peut lui donner une autre forme qui permettra une généralisation plus grande.

Toutes les formes actuellement connues de la mécanique ondulatoire permettent de construire une image hydrodynamique associée à la propagation de l'onde, c.à d. définir un fluide fictif dont la densité ρ et la densité de flux $\rho\vec{v}$ sont données en chaque point à chaque instant par des fonctions bilinéaires de la fonction d'onde et de la fonction conjuguée.

Ainsi, dans le cas de l'équation de Schroedinger, le fluide fictif et son mouvement sont donnés par les formules primitivement utilisées par Madelung

$$\rho = \Psi\Psi^* = |\Psi|^2 \quad \rho\vec{v} = -\frac{h}{4\pi im}(\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Psi^*)$$

ou en posant $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$

$$\rho = a^2 \quad \vec{v} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

L'on voit alors que la formule du guidage peut s'exprimer en disant que le corpuscule suit une des lignes de courant.

Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, le fluide fictif est de même défini par

$$\rho = \frac{h}{4\pi i} \frac{1}{m_0 c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} V \Psi^* \Psi$$

$$\rho\vec{v} = -\frac{h}{4\pi i m_0} \left(\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Psi^* \right) - \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} A \Psi^* \Psi$$

ou en posant $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$

$$\rho = \frac{1}{m_0 c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} a^2 - \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} V a^2$$

$$\rho\vec{v} = -\frac{1}{m_0 c} a^2 \overrightarrow{\text{grad}} \varphi - \frac{\varepsilon}{m_0 c} a^2 \vec{A}$$

d'où

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}$$

Nous retrouvons bien la formule du guidage pour l'équation de Klein-Gordon : le corpuscule suit toujours une ligne de courant. Nous voyons d'ailleurs aussi que l'hypothèse d'après laquelle Ψ et u ont même phase φ revient à supposer que les lignes de courant sont les mêmes pour u et pour Ψ ou, s'il on veut, que le champ des vecteurs $\vec{v}(x, y, z, t)$ est le même dans les deux cas.

Sous cette forme nouvelle, la relation établie entre les deux ondes u et Ψ peut se généraliser aux équations d'onde des particules à spin. Ainsi pour les particules de spin $\frac{h}{4\pi}$ telles que les électrons, l'onde Ψ a quatre composantes Ψ_k qui obéissent aux quatre équations aux dérivées partielles

$$\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon V \right) \Psi_k = \left[\sum_j^3 \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\varepsilon}{c} A_j \right) \alpha_j + m_0 c \alpha_4 \right] \Psi_k$$

avec $k=1, 2, 3, 4$. Les matrices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ étant les quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes de Dirac telles que

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}$$

Le fluide fictif et son mouvement sont alors définis par

$$\rho = \sum_k |\Psi_k|^2 \quad \rho v_j = -c \sum_k \Psi_k^* \alpha_j \Psi_k \quad (j = 1, 2, 3)$$

d'où pour les composantes de la vitesse

$$v_j = -c \frac{\sum_k \Psi_k^* \alpha_j \Psi_k}{\sum_k \Psi_k^* \Psi_k}$$

c'est bien la forme de formule de guidage qui convient en théorie de Dirac, c'est-à-dire que le corpuscule suit encore une des lignes de courant défini par le vecteur $\vec{v}$. Ajoutons que pour les particules de spin supérieur à $\frac{h}{4\pi}$ (photons, particules α , gravitons, etc.), on a des fonctions d'ondes à plus de quatre composantes obéissant toujours à un système d'équations aux dérivées partielles simultanées. Mais toujours, on peut définir par des formules bilinéaires par rapport aux Ψ_k et aux Ψ_k^* une densité ρ et une densité de flux $\rho \vec{v}$.

Maintenant le fait fondamental est que, pour toutes les équations d'ondes énumérées plus haut, le fluide fictif ainsi construit est conservatif

et obéit à l'équation de continuité hydrodynamique $\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$ qui permet de prendre ρ comme probabilité de présence et de normer le Ψ (simple représentation de probabilité à caractère subjectif) par la formule $\int \rho d\tau = 1$. Dans le cas de l'équation de Schroedinger, ceci nous donne $\int |\Psi|^2 d\tau = 1$ et permet de prendre $|\Psi|^2 = a^2$ comme densité de probabilité de présence.

C'est en partant de l'équation de continuité que l'on peut obtenir la démonstration de la formule du guidage. Nous commencerons par remarquer que, si l'on admet d'une façon générale, qu'à toute solution régulière Ψ de l'équation des ondes correspond une solution u à singularité mobile *ayant les mêmes lignes de courant*, les deux densités $\rho(u)$ et $\rho(\Psi)$ obéissent à la même équation de continuité puisque le champ de vecteur $\vec{v}$ est le même dans les deux cas, mais tandis que $\rho(\Psi)$ est partout régulier, $\rho(u)$ doit présenter une singularité en général mobile.

Une première manière d'obtenir la formule de guidage, qui est celle que j'avais employée en 1927, consiste à écrire pour $\rho(u)$ l'équation de continuité sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(u) + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} \rho(u) + \rho(u) \text{div } \vec{v} = 0$$

et après division par $\rho(u)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \rho(u) + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} \log \rho(u) = -\text{div } \vec{v}$$

si u et par suite $\rho(u)$ prennent des valeurs très élevées dans une très petite région de l'espace (et a fortiori si elle présente dans cette région une singularité) $\log \rho(u)$ et ses dérivées auront des valeurs très élevées dans cette région et, pour $\vec{v}$ donné, le second membre de l'équation sera négligeable devant le premier et en désignant par $\frac{D}{Dt}$ la dérivée totale par rapport au temps pris le long de la ligne de courant, on aura ($\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}$)

$$\frac{D}{Dt} \log \rho(u) = 0$$

Donc $\log \rho(u)$ et par suite $\rho(u)$ demeureront constants quand on suivra la ligne de courant avec la vitesse $\vec{v}$. Ainsi, tandis que pour des valeurs non extrêmement grandes de ρ , il y a en général (pour $\text{div } \vec{v} \neq 0$) convergence (ou divergence) des lignes de courant et que par suite ρ ne conserve pas une valeur constante quand on se déplace le long d'une ligne de courant

avec la vitesse $\vec{v}$, il n'en est pas de même quand ρ prend des valeurs extrêmement élevées (et a fortiori quand ρ devient infini) : alors les valeurs localement très élevées de la densité se déplacent le long de la ligne de courant avec la vitesse $\vec{v}$ sans se disperser, ni s'affaiblir. On voit donc que la singularité de $\rho(u)$ suivra l'une des lignes de courant communes à u et à Ψ .

Une autre méthode pour obtenir la formule du guidage consiste à intégrer par la méthode bien connue l'équation de continuité écrite sous la forme explicite

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

L'on sait que l'intégration de cette équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre peut se ramener à l'intégration du système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt = -\frac{d\rho}{\rho \operatorname{div} \vec{v}}$$

où v_x, v_y, v_z sont des fonctions données de x, y, z, t . L'intégration des trois premières équations différentielles donne des intégrales de la forme

$$f_1(x, y, z, t) = \lambda \quad f_2(x, y, z, t) = \mu \quad f_3(x, y, z, t) = \nu$$

Lorsque λ, μ, ν y ont des valeurs constantes, ces formules définissent dans l'espace-temps une ligne de courant d'univers, c'est-à-dire une ligne en chaque point (x, y, z, t) de laquelle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont respectivement égales aux valeurs de v_x, v_y, v_z en ce point. Cette ligne de courant d'univers représente ainsi à la fois la trajectoire et le mouvement d'une des molécules du fluide fictif.

Les équations $f_1 = \lambda, f_2 = \mu, f_3 = \nu$ permettent d'exprimer x, y, z, t en fonction de λ, μ, ν, t et par suite d'exprimer la fonction $\operatorname{div} \vec{v}$ sous la forme $F(\lambda, \mu, \nu, t)$. Pour obtenir l'intégration de l'équation aux dérivées partielles, il suffit alors d'écrire la quatrième équation différentielle :

$$dt = -\frac{d\rho}{F(\lambda, \mu, \nu, t)\rho}$$

et de l'intégrer à λ, μ, ν constants. On obtient :

$$\rho = e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi(\lambda, \mu, \nu)$$

où l'intégration dans l'exposant de l'exponentielle doit être effectuée sur t à λ, μ, ν constants et où Φ est une fonction arbitraire de λ, μ, ν . On aura donc:

$$\begin{aligned}\rho(\Psi) &= e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi_1(\lambda, \mu, \nu) \\ \rho(u) &= e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi_2(\lambda, \mu, \nu)\end{aligned}$$

Puisque $\rho(\psi)$ est régulier, les deux facteurs dans son expression doivent être réguliers. Dans l'expression de $\rho(u)$, le premier facteur étant le même que dans l'expression $\rho(\psi)$ doit aussi être régulier: la singularité de $\rho(u)$ doit donc provenir de Φ_2 . Il en résulte que Φ_2 doit avoir une singularité pour une certaine valeur de λ, μ, ν , soit $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$, ce qui traduit l'existence d'une singularité ponctuelle u occupant une position x_0, y_0, z_0 à l'instant t_0 . Mais alors cette singularité se retrouvera dans l'espace temps tout le long de la ligne de courants définie par les valeurs λ_0, μ_0, ν_0 de λ, μ, ν . Autrement dit, $\rho(u)$ et par suite u présentera une singularité ponctuelle dans l'espace à tout instant t et le mouvement de cette singularité au cours du temps sera représenté dans l'espace-temps par la ligne de courant définie par $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \nu = \nu_0$.

La singularité, quand elle occupe à l'instant t la position x, y, z est donc animée de la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$. C'est encore le théorème du guidage sous sa forme la plus générale et nous pouvons énoncer notre résultat en disant: "Si deux solutions des équations d'onde de la Mécanique ondulatoire, l'une ψ régulière, l'autre u à singularité mobile admettent les mêmes lignes de courants, la singularité de u suit l'une des lignes de courant".

Il importe de remarquer que notre démonstration serait encore valable si la solution u , au lieu de présenter une véritable singularité mathématique, comportait seulement une très petite région, en général mobile, où elle atteint des valeurs très élevées, tandis que la solution régulière couplée ψ ne comporte pas d'accident analogue. Alors les expressions trouvées pour $\rho(\psi)$ et $\rho(u)$ montrent que l'existence de cette région singulière doit se traduire par la forme particulière de $\Phi_2(\lambda, \mu, \nu)$ qui doit présenter des valeurs très élevées quand λ, μ, ν ont des valeurs voisines de certaines valeurs λ_0, μ_0, ν_0 . Mais ceci signifie que le mouvement de la région où u a de très grandes valeurs est représenté dans l'espace-temps par un tube d'Univers très délié dont l'axe est défini par $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \nu = \nu_0$.

Sous la forme générale que nous venons de lui donner, le théorème du guidage permet de mieux apercevoir le rapport entre l'onde u et l'onde ψ . Ces ondes ayant les mêmes lignes de courant, l'onde ψ représente aussi bien que l'onde u l'ensemble des mouvements possibles du corpuscule, mais il lui manque un élément essentiel qui est le corpuscule lui-même décrivant l'une des lignes de courant: c'est pourquoi, si l'onde ψ peut fournir une image statistique exacte des mouvements du corpuscule, elle ne peut donner, selon ce point de vue, une description *complète* de la réalité physique. Nous retrouvons là une opinion qu'Einstein a toujours soutenue.

Quand j'ai repris ici, il y a quelques années, avec l'active collaboration de M. Vigier, l'étude de la théorie de la double solution, nous avons tout de suite été frappés par la grande analogie qu'elle présente avec les idées d'Einstein sur la liaison des corpuscules et des champs qui s'apparentent également, nous l'avons vu, à celles de Mie et de Born dans sa théorie non linéaire de l'Electromagnétisme. Il est inutile d'insister longuement sur cette analogie après l'étude que nous avons faite des théories de Mie, de Born et d'Einstein. Dans la théorie de la double solution, comme dans les théories que nous avons étudiées précédemment, le but recherché est d'incorporer le corpuscule au champ sous la forme d'une très petite région où le champ prendrait une valeur très élevée (comportant peut-être ou peut-être ne comportant pas une véritable régularité mathématique).

Mais ici le champ auquel on cherche à incorporer le corpuscule n'est plus le champ gravifique ou le champ électromagnétique, mais bien le champ u ondulatoire et quantique qui, dans la théorie de la double solution doit donner la description objective de la structure du corpuscule: c'est là un point important sur lequel nous reviendrons. Parvenus à ce point, nous apercevons la nécessité d'introduire une idée nouvelle: comme nous l'avons vu, le guidage du corpuscule par un champ ne peut pas être obtenu quand on admet pour le champ des équations d'évolution *linéaires*, même en y introduisant arbitrairement des termes représentant des sources étendues ou ponctuelles, il apparaît comme nécessaire que les équations de l'onde u soient non linéaires. L'idée de non linéarité, qui est nouvelle en Mécanique ondulatoire, a cependant été introduite depuis quelques années par divers auteurs (notamment M. Heisenberg), mais en se plaçant à un point de vue très différent du nôtre.

Cependant, ce que nous avons dit précédemment, nous amène à penser que, si l'équation de l'onde u est non linéaire, les termes non

linéaires qui y figurent ne doivent avoir de l'importance que dans la très petite région singulière où les valeurs de u sont très élevées, très petite région qui constitue le corpuscule: en dehors de cette très petite région, les termes non linéaires doivent devenir très petits et l'équation de propagation de u doit devenir approximativement linéaire et coïncider avec l'équation de propagation usuellement employée pour l'onde ψ , ce qui nous ramène à l'hypothèse admise précédemment que u et ψ obéissent à la même équation de propagation.

En creusant cette idée, nous nous sommes aperçus, M. Vigier et moi, que, pour pouvoir rendre compte du succès du calcul usuel des phénomènes d'interférences et de diffraction et aussi du succès du calcul usuel des valeurs propres de l'énergie correspondant aux états stationnaires des systèmes quantifiés, il était nécessaire de la préciser sous la forme suivante: dans la région extérieure à la région singulière où l'équation d'ondes est linéaire, u doit être représentée par

$$u = u_0 + v$$

Le terme u_0 doit être extrêmement petit par rapport à v en dehors du voisinage immédiat de la région singulière: cette hypothèse (qu'on pourrait appeler le postulat de l'extrême localisation du corpuscule) a une très grande importance. La fonction u_0 croît extrêmement rapidement quand on approche de la région singulière et elle deviendrait infinie si on pouvait la prolonger dans la région singulière c'est à dire si l'équation linéaire continuait à y être valable. Quant à v , c'est une solution régulière de l'équation linéaire qui doit, du moins en général (c'est à dire quand l'utilisation du ψ a fourni cette fonction d'une façon exacte), coïncider à un facteur constant près avec la formule usuellement admise pour l'onde ψ dans le problème considéré.

Dans le domaine extérieur à la région singulière, u paraît comme décomposé en deux termes u_0 et v , l'un représentant une solution régulière, l'autre une solution à singularité de l'équation linéaire habituelle. La solution u_0 apparaît alors comme une sorte d'aiguille très fine implantée sur une onde v qui a la même forme que l'onde ψ .

D'après le théorème du guidage, la fonction en aiguille u_0 doit se déplacer le long des lignes de courant de l'onde v . Mais, si l'équation de l'onde u était partout linéaire et coïncidait partout avec l'équation usuelle de la Mécanique ondulatoire, les solutions u_0 et v seraient totalement indépendantes: il n'y aurait aucune raison pour qu'elles admettent

les mêmes lignes de courant et pour que le déplacement de l'aiguille u_0 soit déterminé par les lignes de courant de v . Il en est tout autrement si l'équation de u n'est pas linéaire dans la région singulière où, en raison de la grandeur de u_0 , les termes non linéaires sont importants: dans cette région, les termes u_0 et v sont liés l'un à l'autre par la non linéarité.

En d'autres termes, l'équation non linéaire en u admet *une* solution u et ce n'est qu'approximativement dans la région extérieure à la région singulière que l'on peut décomposer u en une somme de fonctions u_0 et v solutions de l'équation linéaire de propagation: ceci apparaîtra très clairement sur un exemple que je vais donner tout à l'heure. D'ailleurs, la non linéarité très localisée de l'équation de l'onde u apparaît comme essentielle pour bien comprendre le sens du théorème du guidage. Les démonstrations que nous avons données de ce théorème en partant de l'équation linéaire reposent sur l'hypothèse que la solution régulière v et la solution singulière $u = u_0 + v$ ont les mêmes lignes du courant: or cette hypothèse est entièrement arbitraire dans le cadre d'une équation d'ondes partout linéaire; elle cesse de l'être s'il existe une non linéarité locale dans la partie singulière car alors la non linéarité, bien que très localisée, est en quelque sorte le "ciment" qui unit les solutions u_0 et v . Mais il est utile de donner un exemple mathématique précis illustrant tout ce que je viens de dire.

On peut encore remarquer que le théorème du guidage peut s'exprimer en disant que dans l'espace temps les valeurs très élevées de la fonction d'onde u sont contenues à l'intérieur d'un tube d'univers très délié dont les parois sont formées par des lignes de courant de l'onde "extérieure" v (partie extérieure de l'onde u). Quand on énonce sous cette forme la formule du guidage, sa parenté avec la manière dont MM. Georges Darmon et Lichnérowicz énoncent le postulat des géodésiques en Relativité générale devient évidente. (Voir par exemple Lichnérowicz: *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme*, Masson, 1955, Livre premier, Ch. III).

Considérons donc le cas simple d'un corpuscule de spin nul immobile dans un système de référence galiléen, le centre de sa région singulière étant pris comme origine des coordonnées, et supposons arbitrairement que l'équation de l'onde u du corpuscule soit l'équation non linéaire

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + k_0^2 u = -\frac{1}{c^2} e^{-2\frac{a}{r}} \frac{a^2}{r^4} u^2 u^* \quad (k_0 = \frac{2\pi}{h} m_0 e) \quad (1)$$

Le premier membre égalé à zéro donnerait l'équation de Klein-Gordon en l'absence de champ. Le second membre non linéaire a une forme en

$u^2 u^*$ déjà envisagée par les auteurs qui ont cherché à introduire de la non linéarité en Mécanique ondulatoire: il contient une fonction de la distance à l'origine r que nous avons choisie arbitrairement et qui contient deux constantes C et a dont la première est une constante numérique et la seconde une très petite longueur qui définit une sorte de "rayon" du corpuscule à symétrie sphérique.

Plus loin nous poserons par définition $Ca = \varepsilon$. Comme on doit avoir $u = f e^{ik_0 ct}$ avec f fonction de r seulement, on trouve pour f l'équation

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{c^2} e^{-2\frac{a}{r}} \frac{a^2}{r^4} f^3$$

équation admettant la solution

$$f = C e^{\frac{a}{r}}$$

qui prend des valeurs très élevées au voisinage de l'origine (pour $r \ll a$) et a même une singularité en $r = 0$.

Nous pouvons considérer que la région extérieure à la région singulière est définie par $r \gg a$. On voit alors que dans la région extérieure ainsi définie, f prend la forme approximative

$$f = C + \frac{\varepsilon}{r} \quad (\varepsilon = Ca)$$

Ceci correspond au fait, facile à vérifier, que $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$ sont de l'ordre de $\frac{C}{r^2} \frac{a}{r}$ tandis que le second membre de l'équation non linéaire est de l'ordre de $\frac{C}{r^2} (\frac{a}{r})^2$, donc négligeable par rapport au premier membre. Dans la région extérieure, l'équation non linéaire se réduit sensiblement à l'équation linéaire $\Delta f = 0$ et il est naturel de trouver que f prend approximativement la forme d'une solution à symétrie sphérique de cette équation. Dans la région singulière qui entoure l'origine, où r est de l'ordre de a ou inférieur, les deux membres de l'équation non linéaire deviennent du même ordre de grandeur et il faut pour f l'expression rigoureuse $f = C e^{\frac{a}{r}}$.

Maintenant, si l'équation linéaire $\Delta f = 0$ était valable partout, sa solution générale à symétrie sphérique serait $f = A + \frac{B}{r}$ où A et B auraient des valeurs arbitraires. Dans la région extérieure où l'équation de l'onde u se réduit approximativement à l'équation linéaire de Klein-Gordon, nous avons trouvé $f = C + \frac{\varepsilon}{r}$, qui est bien de la forme $A + \frac{B}{r}$,

mais avec des valeurs déterminées de A et de B , à savoir $A = C$ et $B = Ca = \varepsilon$. L'on voit bien que ces valeurs sont imposées par la non linéarité de l'équation de l'onde u dans la très petite région singulière qui entoure l'origine.

La solution $f = \frac{\varepsilon}{r} + C$ correspond bien à la forme $u = u_0 + v$, u_0 ayant une singularité et v étant une fonction régulière. De plus, comme l'on a $\frac{u_0}{v} = \frac{\varepsilon}{Cr} = \frac{a}{r}$, on voit aussi que u_0 devient beaucoup plus petit que C dès que l'on s'éloigne de la région singulière.

Nous avons donc ainsi retrouvé la décomposition $u = u_0 + v$ de l'onde u dans la région extérieure avec toutes les caractéristiques que nous souhaitions trouver. On peut d'ailleurs noter que u se trouve être la somme de la solution singulière $\frac{\varepsilon}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}$ que j'avais déjà envisagée en 1927 pour un corpuscule immobile obéissant à une équation de Klein-Gordon en l'absence de champ et d'une solution $C e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}$ qui, rapportée à un système de référence où le corpuscule serait en mouvement rectiligne et uniforme, aurait la forme de l'onde plane monochromatique classique dès les débuts de la Mécanique ondulatoire. Tout ceci se recoupe très bien.

On peut encore ajouter une remarque. La solution $f = C e^{\frac{a}{r}}$ présente une singularité en $r = 0$. Si, conformément aux tendances d'Einstein, on voulait éviter cette circonstance, on n'aurait qu'à prendre pour forme de l'équation non linéaire de l'onde u à la place de l'équation (1) celle qu'on obtient en y remplaçant la variable r par la variable $\rho = r + \alpha$ où α est une longueur positive très petite par rapport à a ($0 < \alpha \ll a$). Grâce à cet artifice, qui rappelle celui qu'ont employé Einstein et Rosen dans le mémoire analysé précédemment, on transforme la solution $f = C e^{\frac{a}{r}}$ en $f = C e^{\frac{a}{\rho}} = C e^{\frac{a}{r+\alpha}}$ de sorte que f prend une valeur très élevée, mais finie pour $r = 0$. La modification introduite ne se fait sentir que dans le centre de la région singulière, là où $r \ll a$ devient de l'ordre de α . Il en résulte aisément que toutes les conséquences que nous avons déduites de l'équation non linéaire précédemment adoptée subsistent après cette modification.

Naturellement nous n'avons aucune raison de penser que l'équation non linéaire envisagée représente réellement la structure d'un corpuscule et soit la véritable équation non linéaire de l'onde u d'un corpuscule de spin 0. Mais elle nous offre un exemple simple de la façon dont une non linéarité très localisée de l'équation du champ ondulatoire u peut souder ensemble les deux termes de l'expression $u = u_0 + v$ valable à

l'extérieur de la région singulière et déterminer complètement la valeur des coefficients C et ε qui figurent dans u_0 et v .

Cherchons à préciser maintenant la relation entre les fonctions v et la fonction ψ usuellement utilisée en Mécanique ondulatoire. Comme la fonction u est, dans la théorie de la double solution, une réalité physique objective indépendante des connaissances de l'observateur, la fonction v qui est une partie de u et qui se confond pratiquement avec u dès qu'on s'éloigne de la région singulière (parce qu'alors $u_0 \ll v$), a aussi le caractère d'une réalité objective. En particulier v doit avoir une amplitude parfaitement déterminée qui n'est pas à la disposition de l'utilisateur et qui ne peut pas être normée à son gré. Mais l'observateur peut construire dans son esprit une fonction ψ qui doit être partout proportionnelle à v , mais avec un coefficient de proportionnalité C à laquelle l'utilisateur est libre de donner une valeur arbitraire, et qu'il peut choisir de façon à "normer" la fonction ψ . La fonction ψ serait donc une construction de l'esprit, à caractère subjectif ayant uniquement pour rôle de permettre le calcul de certaines probabilités, mais elle devrait être construite par l'utilisateur, dans la mesure où ses informations sur la forme de v sont exactes, à l'aide de la relation $\psi = Cv$. C'est parce que la fonction ψ serait ainsi construite à partir de v qui est une réalité objective, qu'elle permettrait, malgré son caractère subjectif, une évaluation statistique exacte des probabilités.

Si la fonction v occupe plusieurs régions séparées de l'espace, le corpuscule se trouvant dans l'une d'elles, l'utilisateur pourra, suivant l'état de ses connaissances sur la position du corpuscule, choisir la constante C différente pour chacune des régions en question et j'ai montré comment cela permettait d'interpréter la réduction du paquet de probabilités.

Dans le même ordre d'idées, il est intéressant de réfléchir à l'idée de "l'onde-pilote" que j'avais introduite en 1927 et qui a été reprise dans des travaux récents, notamment dans ceux de M. Bohm. J'avais remarqué en 1927 que le corpuscule devant, suivant la formule du guidage, suivre l'une des lignes de courant de l'onde ψ , on pouvait adopter le point de vue suivant: "Ne considérer que l'onde ψ de la Mécanique ondulatoire usuelle et ajouter arbitrairement la notion d'un corpuscule qui, suivant l'une des lignes de courant de l'onde d'après la formule du guidage, se trouverait ainsi être guidé par l'onde ψ , ce qui permettrait de donner à celle-ci le nom d'onde-pilote". Mais je considérais (et je considère plus que jamais) la théorie de la double solution, qui incorpore le corpuscule à l'onde sous forme de singularité, comme beaucoup plus profonde. D'ailleurs l'onde ψ

de la Mécanique usuelle a certainement un caractère subjectif puisqu'elle change avec nos informations et l'on ne peut admettre comme réel le "guidage" du corpuscule par quelque chose de subjectif.

La question s'éclaire si l'on distingue v et ψ . L'onde u comportant un accident très localisé représenté par u_0 , tout se passe comme si cet accident (le corpuscule !) était guidé par l'onde v dont il suit l'une des lignes de courant. En réalité, avec les conceptions exposées plus haut, il en serait ainsi parce que u_0 et v forment un ensemble unique: la fonction d'onde u (égale à $u_0 + v$ à l'extérieur de la région singulière), étant soudées ensemble par la non linéarité dans la région singulière. Mais on peut, en faisant abstraction de ces raisons profondes, considérer la région singulière comme pilotée par l'onde v . Ici il n'y a plus aucun paradoxe parce que l'onde v est une réalité physique et que, par conséquent, le corpuscule peut être guidé par elle. Mais comme l'onde ψ doit, en principe, être choisie par l'observateur proportionnelle à v et ayant par suite mêmes lignes de courant, on a l'impression que le corpuscule est guidé par l'onde ψ , ce qui est paradoxal. Nous pourrions donc nous servir de l'image du corpuscule guidé par une onde régulière, suivant ses lignes de courant, mais en nous souvenant que cette onde régulière est en réalité l'onde v et que le corpuscule n'est pas un objet surajouté à cette onde v , mais constitue avec elle une réalité unique, l'onde u à région singulière.

Je ne reviendrai pas sur divers problèmes délicats, dont j'ai traité dans mon récent ouvrage tels que justification de la signification statistique du $|\psi|^2$, justification de l'emploi comme moyen de prévision statistique de l'onde ψ de Schroedinger dans l'espace de configuration pour l'étude du mouvement dans l'espace physique de plusieurs ondes u en interaction, etc.

Je vais maintenant dire quelques mots de l'existence des solutions singulières du problème extérieur.

Existence des solutions singulières du "problème extérieur"

J'appellerai "problème extérieur" l'étude des solutions de l'équation de l'onde u à l'extérieur de la région singulière, là où cette équation se confond, au moins en première approximation, avec l'équation linéaire de propagation envisagée pour le corpuscule considéré par la Mécanique ondulatoire usuelle et où elle admet une solution de la forme $u_0 + v$.

En 1927, époque où j'employai exclusivement l'équation de Klein-Gordon et sa forme dégénérée non relativiste, l'équation de Schroedinger,

et où je ne distinguai pas v de ψ , j'aurais voulu démontrer qu'à chaque solution ψ envisagée par la Mécanique ondulatoire déjà usuelle correspondait une solution à singularité mobile u_0 ayant la même phase que ψ . Dans le cas de l'absence de champ, j'avais trouvé la solution précédemment indiquée (qui dans le système propre du corpuscule s'écrit $\frac{\varepsilon}{r_0} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t_0}$) mais c'était un cas très particulier et je n'avais pas vu comment on pouvait établir d'une façon générale l'existence de la fonction u_0 .

Aujourd'hui, où l'ensemble de la théorie de la double solution a pris une forme plus cohérente et plus précise, l'étude de l'existence des solutions singulières u_0 du problème extérieur et de leur couplage avec les solutions régulières v conserve tout son intérêt. Un progrès notable dans ce sens a été accompli récemment dans la Thèse de M. Francis Fer. Dans ce travail, M. Fer a considéré un type d'équations aux dérivées partielles qui contient comme cas particulier l'équation de Klein-Gordon et par suite, à titre de dégénérescence non relativiste, celle de Schroedinger. Utilisant des méthodes générales d'intégration des équations aux dérivées partielles, il démontre l'existence de solutions à singularité qui s'expriment par des formules du type de celles des potentiels retardés. Etudiant le raccordement de ces solutions singulières avec les solutions régulières, M. Fer montre que l'on retrouve pour le mouvement de la singularité, le résultat énoncé par le théorème du guidage. Le travail de M. Fer (qui n'est malheureusement pas encore publié à l'heure actuelle) paraît apporter une contribution importante à l'établissement de l'existence des solutions singulières dans le problème extérieur en théorie de la double solution.

Naturellement ce problème extérieur, analogue à celui qui se pose en théorie de la Relativité générale quand on étudie le champ à l'extérieur d'un tube d'Univers très délié meublé de matière (ou, suivant le point de vue d'Einstein et Infeld, au voisinage d'une ligne d'Univers singulière du champ) correspond à un point de vue incomplet si l'on admet que la véritable équation satisfaite est non linéaire et que la décomposition $u = u_0 + v$ est seulement une forme approximative de u valable dans la région extérieure.

Sans insister sur la démonstration générale d'existence de u_0 , je voudrais insister sur une méthode de construire effectivement la fonction u du problème extérieur dans le cas des états stationnaires.

Construction de la fonction u dans le cas des états stationnaires des systèmes quantifiés par la formule de Rayleigh-Sommerfeld

Ce qu'il y a de curieux dans la méthode que je vais exposer, c'est qu'elle a son point de départ dans la constatation d'un fait qui paraissait constituer une très importante difficulté pour la théorie de la double solution. Cette difficulté provient de la théorie des fonctions de Green pour les équations d'onde⁶ et qui est entièrement reliée à la théorie générale des équations intégrales linéaires.

Considérons une fonction d'onde u obéissant à une équation d'ondes telle que si u est une solution monochromatique, c'est à dire ne dépendant de t que par le facteur e^{ikct} , elle prenne la forme

$$\Delta u + [k^2 - F(x, y, z)]u = 0 \quad (2)$$

Nous savons que c'est le cas, par exemple, de l'équation de Schrodinger et qu'alors k^2 est proportionnel à l'énergie E du corpuscule. Envisageons un domaine D de l'espace d'un seul tenant et *de dimensions finies*. Les ondes stationnaires dont le domaine D peut être le siège sont définies comme des ondes monochromatiques qui s'annulent aux limites du domaine D . Si l'on se borne, comme en Mécanique ondulatoire usuelle, à considérer des solutions régulières (que je nommerai ψ suivant l'usage) de l'équation citée plus haut, on démontre que l'onde stationnaire ne peut exister que si la constante k a une des valeurs comprises dans une suite discrète de valeurs $k_1, k_1 \dots, k_n \dots$. Ces valeurs particulières de k sont les "valeurs propres" des problèmes considérés: en Mécanique ondulatoire elles définissent, on le sait, les énergies quantifiées du corpuscule dans le domaine D . Les fonctions d'onde régulières et nulles aux limites ψ_u qui leur correspondent sont les fonctions propres.

Mais on peut aussi envisager des solutions de l'équation (2) qui seraient nulles aux limites du domaine D , mais qui présenteraient en un point Q de ce domaine une singularité ponctuelle. Ces solutions sont les "fonctions de Green" de l'équation (x) pour le domaine D et le point "source" Q .

⁶ On la trouvera exposée par exemple dans les ouvrages suivants: A. Sommerfeld - *Vorlesungen über Theoretische Physik* Bd VI, Partielle Differentialgleichungen der Physik (Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden) p.183 et s.; Théodore Vogel - *Physique Mathématique Classique*, collection Armand Colin, Paris 1956, p.97 à 104.

Ces fonctions de Green $G(M, Q)$ dépendent du point courant M et du point source Q : elles sont astreintes aux conditions suivantes: 1) être nulles aux limites du domaine D . 2) présenter une singularité ponctuelle en Q telle que lorsque M tend vers Q , $G(M, Q)$ croît comme $\frac{1}{MQ} = \frac{1}{r}$. Or la théorie générale des équations intégrales linéaires nous fournit, au sujet de l'existence de ces fonctions de Green, le résultat que voici: "La fonction de Green $G(M, Q)$ existe toujours quand la constante k a une valeur qui ne coïncide avec aucune des valeurs propres $k_1, k_2, \dots$. Si k coïncide avec l'une de ces valeurs propres, mettons k_n , alors la fonction de Green $C(M, Q)$ n'existe que dans le cas très particulier où la fonction propre correspondante $\psi_n(M)$ est nulle au point Q ".

On peut retrouver ce résultat en construisant effectivement la fonction de Green à l'aide d'une formule donnée jadis par Lord Rayleigh et fréquemment utilisée ensuite par Sommerfeld. Pour la démontrer, nous partirons de la remarque qu'en raison de la singularité ponctuelle que la fonction de Green présente en Q , on doit écrire l'équation satisfaite par $u = G(M, Q)$ sous la forme

$$\Delta u + [k^2 - F(x, y, z)]u = \varepsilon \delta(M - Q) \quad (3)$$

où l'on a introduit au second membre un terme de source ponctuelle comportant un coefficient numérique ε analogue à une charge électrique dont la valeur est arbitraire. L'équation des ondes (ci-dessus citée) sera ainsi satisfaite partout dans le domaine D sauf au point Q où il existera une singularité en $\frac{1}{r}$. Or on peut développer $\delta(M - Q)$ suivant les fonctions propres normées $\psi_i(M)$ sous la forme

$$\delta(M - Q) = \sum_i C_i \psi_i(M)$$

avec

$$C_i = \int \delta(M - Q) \psi_i^*(M) dt = \psi_i^*(Q)$$

d'où

$$\delta(M - Q) = \sum_i \psi_i^*(Q) \psi_i(M)$$

Si alors on développe également $u = G(M, Q)$ sous la forme

$$u = \sum_i C_i \psi_i(M)$$

avec d'autres coefficients C_i , on devra avoir

$$[\Delta + k^2 - F(M)] \sum_i C_i \psi_i(M) = \varepsilon \sum_i \psi_i^*(Q) \psi_i(M)$$

ou puisque

$$[\Delta + k_i^2 - F(M)] \psi_i(M) = 0$$

$$\sum_i (k^2 - k_i^2) C_i \psi_i(M) = \varepsilon \sum_i \psi_i^*(Q) \psi_i(M)$$

d'où l'on tire, puisque les ψ_i forment un système complet

$$C_i = \frac{\varepsilon \psi_i^*(Q)}{k^2 - k_i^2}$$

et par suite

$$u(M) = \sum_i \frac{\varepsilon \psi_i^*(Q) \psi_i(M)}{k^2 - k_i^2}$$

C'est la forme de Rayleigh-Sommerfeld donnant $G(M, Q)$. La série donnant $G(M, Q)$ n'est pas absolument convergente. Malgré ce défaut, elle peut en général être utilisée sans danger, comme l'a montré Sommerfeld. Sur cette formule, on retrouve aisément les résultats fournis par la théorie des équations intégrales linéaires. En effet, si la constante ne coïncide avec aucun des k_i , la formule précédente nous fournit la fonction de Green cherchée dont l'existence est ainsi prouvée. Si, au contraire, k coïncide avec l'un des k_i , mettons k_n , alors le terme d'indice n dans la somme est infini et la formule ne fournit pas une fonction de Green acceptable, sauf dans le cas très exceptionnel où $\psi_n(Q)$ est nul. Nous retrouvons donc bien les résultats précédents.

Or, en y réfléchissant, ces résultats m'avaient paru être désastreux pour la théorie de la double solution. En effet, dans cette théorie, il paraissant évident qu'on devait faire correspondre à l'état stationnaire usuellement représenté par la fonction $\psi_n(M)$ et correspondant à la valeur propre k_n une fonction $u = G(M, Q)$ nulle aux limites de D comme ψ_n , présentant une singularité ponctuelle au point Q où se trouverait le corpuscule⁷ et correspondant à la valeur k_n de la constante k .

⁷ Cette singularité est immobile en Q parce que, la phase se réduisant à kct , la formule du guidage nous donne une vitesse nulle du corpuscule.

Or précisément cette fonction de Green n'existe pas en général. Elle ne pourrait exister que si le corpuscule se trouvait en un point Q tel que $\psi(Q) = 0$, mais en raison de la signification statistique exacte de $|\psi|^2$, le corpuscule a une probabilité *nulle* de se trouver en ce point. La contradiction est flagrante et paraît fournir une objection très sérieuse contre la théorie de la double solution.

Cependant, on peut découvrir un moyen tout naturel pour échapper à cette difficulté. On part de la remarque que la fonction $u = u_0 + v$ étant supposée nulle sur les limites du domaine D , la fonction v ne doit pas être rigoureusement nulle sur ces limites, mais seulement extrêmement petite. En écartant le cas extrêmement peu probable où Q serait situé si près de la limite D que la très petite région singulière qui entoure Q se trouverait "toucher" cette limite, la valeur $-u_0$ que doit prendre v sur les limites de D pour que $u = 0$ sont excessivement petites; mais cependant elles ne sont pas rigoureusement nulles. Par suite v ne peut pas être considéré comme exactement proportionnelle à ψ_n ; v doit être une solution de l'équation linéaire qui correspond à une valeur de k extrêmement voisine de la valeur propre k_n , mais non exactement égale à k_n . Nous sommes ainsi amenés à penser que la fonction u correspondant à l'état stationnaire d'indice n doit être égale à la fonction de Green $G(M, Q)$ qui correspond à une valeur de k *très légèrement différente* de k_n . Dès lors, cette fonction de Green existe et doit être donnée par la formule de Rayleigh-Sommerfeld.

Pour examiner la forme de cette fonction u , écrivons la formule Rayleigh-Sommerfeld en isolant le terme d'indice n et en désignant par $\delta k_n = k - k_n$ la très petite différence entre k et k_n que, pour abrégé, je désignerai sous le nom de "glissement de fréquence". On peut alors écrire très approximativement

$$u(M, Q) = \sum_{i \neq n} \frac{\varepsilon \psi_i^*(Q) \psi_i(M)}{k_n'^2 - k_i^2} + \varepsilon \frac{\psi_n^*(Q) \psi_n(M)}{2k_n \delta k_n}$$

Soit alors $\psi'_n(M)$ une fonction, solution de l'équation d'ondes pour $k = k_n + \delta k_n$, δk_n étant le glissement de fréquence dont nous déterminerons tout à l'heure la valeur. On pourra écrire $\psi'_n(M) = \psi_n(M) + \delta \psi_n(M)$, $\delta \psi_n(M)$ étant la très petite variation de la solution $\psi_n(M)$ correspondant à la variation δk_n de k ⁸. Nous pourrions alors écrire

$$u(M, Q) = \sum_{i \neq k} \frac{\varepsilon \psi_i^*(Q) \psi_i(M)}{k_n^2 - k_i^2} - \frac{\varepsilon \psi_n^*(Q) \delta \psi_n(M)}{2k_n \delta k_n} + \frac{\varepsilon \psi_n^*(Q) \psi'_n(M)}{2k_n \delta k_n}$$

⁸ $\psi'_n = \psi_n + \frac{\partial \psi_n}{\partial k_n} \delta k_n$ est solution non nulle aux limites de: $(\Delta - F + k^2)\psi = 0$

Nous sommes sûrs d'avoir obtenu ainsi une solution du problème extérieur nulle aux limites de D et présentant une singularité ponctuelle en r^{-1} au point Q puisque nous n'avons fait qu'appliquer la formule de Rayleigh-Sommerfeld avec k différent de tous les k_i . Comme la fonction $\psi'_n(M)$ est régulière, la singularité n'affecte que les deux premiers termes de la formule précédente. Donc si nous posons

$$u_0(M, Q) = \sum_{i \neq k} \frac{\varepsilon \psi_i^*(Q) \psi_i(M)}{k_n'^2 - k_i^2} - \frac{\varepsilon \psi_n^*(Q) \delta \psi_n(M)}{2k_n \delta k_n}$$

$$v(M) = \frac{\varepsilon \psi_n^*(Q)}{2k_n \delta k_n} \psi'_n(M) = C \psi'(M)$$

avec $C = \frac{\varepsilon \psi_n^*(Q)}{2k_n \delta k_n}$, nous avons finalement ramené u à la forme $u = u_0 + v$ u_0 et v étant solutions de l'équation linéaire, v_0 ayant une singularité ponctuelle en Q et v étant régulière. De plus, nous voyons que v est de la forme $C\psi'$, c'est à dire très sensiblement proportionnelle à la fonction ordinaire ψ considérée en Mécanique ondulatoire usuelle.

Si le rapport $\frac{\varepsilon}{C}$ est considéré comme bien déterminé, nous obtenons comme expression du glissement de fréquence δk_n la valeur entièrement déterminée par la position Q de la singularité

$$\delta k_n = \frac{\varepsilon}{C} \frac{\psi_n^*(Q)}{2k_n} \quad (4)$$

Mais dans le problème extérieur où l'on n'emploie que des équations d'ondes linéaires, $\frac{\varepsilon}{C}$ n'a pas une valeur déterminée. En effet, ε est introduit artificiellement avec une valeur arbitraire dans le terme de source de l'équation (3); quant à C , cette constante n'a aucune valeur imposée a priori. La dernière formule ne nous fournit donc aucune valeur bien déterminée pour δk_n .

Mais nous avons vu que le point de vue adopté dans le problème extérieur où l'on considère implicitement l'équation linéaire sans terme de source comme valable partout sauf au point géométrique Q est insuffisant: comme nous le savons, nous devons admettre qu'au voisinage

pour $k = k_n + \delta k_n$ (au premier ordre) car: $[\Delta - F + (k_n + \delta k_n)^2]\psi = 0$ donne: $(\Delta - F + k_n^2) \frac{\partial \psi_n}{\partial k_n} + 2k_n \delta k_n \psi_n = 0$ (au premier ordre). Et cette équation est bien vérifiée, comme on le voit en dérivant par rapport à k_n l'équation $(\Delta - F + k_n^2)\psi_n = 0$.

immédiat de Q existe une très petite région singulière où l'équation précédente n'est plus valable et où l'on doit tenir compte d'un second membre non linéaire. Or, comme nous l'avons montré sur un exemple (1), la non linéarité localisée dans la région singulière peut suffire pour déterminer complètement ε, C et le rapport $\frac{\varepsilon}{C}$; il en résulte que cette non linéarité locale doit permettre d'obtenir par la formule précédente une valeur parfaitement déterminée et extrêmement petite de δk_n .

Il convient de faire une remarque qui pourrait avoir son importance. Si la théorie précédente est exacte, comme la fréquence k de l'onde "véritable" u différerait légèrement de k_n , la méthode habituelle de calcul des énergies quantifiées en Mécanique ondulatoire, qui déduit ces énergies des valeurs propres de l'équation de Schroedinger, serait entachée d'une très légère inexactitude. Mais, dans l'état actuel de la théorie de la double solution, on peut toujours supposer le rapport $\frac{\varepsilon}{C}$ assez petit pour qu'il n'en résulte aucun effet observable même dans les mesures spectroscopiques les plus précises des niveaux d'énergie.

Dans un cours précédent⁹, j'avais calculé la solution singulière dans le cas d'un corpuscule immobile au centre d'une enceinte sphérique et montré qu'elle peut se représenter par la formule de Rayleigh-Sommerfeld. Le calcul est, dans ce cas, rendu très simple par le fait que les fonctions propres et la fonction de Green ont des formes très simples ($\frac{\sin k_n r}{r}$ et $\frac{\cos kr}{r}$). M. André Rot vient de faire un calcul analogue dans le cas plus général où le corpuscule est placé en un point quelconque de l'enceinte sphérique. M. Rot a obtenu récemment un résultat beaucoup plus général: il a montré que dans tout problème de quantification où le domaine est fini et où il y a "séparation des variables", la formule de Rayleigh-Sommerfeld permet de construire une solution singulière nulle aux limites qui est *infinitement* voisine de la fonction propre ψ_n . Il y aurait lieu de faire des calculs complets pour d'autres cas et d'examiner si la méthode s'étend au cas des domaines D infinis où il peut y avoir un spectre continu.

Quoi qu'il en soit, il semble que, du moins dans le cas des domaines D finis et sous réserve de l'examen de certaines questions de convergence, la formule de Rayleigh-Sommerfeld, qui paraissait constituer une grave difficulté pour la théorie de la double solution, fournit au contraire

⁹ Louis de Broglie, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)* Gauthier-Villars, Paris, 1956 (p. 226).

une méthode générale pour construire une fonction u dans le domaine extérieur possédant toutes les propriétés postulées par la théorie de la double solution.