Étude de deux questions concernant l'interprétation de la mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution

Louis de Broglie

Je vais maintenant étudier en passant deux questions concernant l'interprétation causale de la mécanique ondulatoire qui ne se rapportent pas directement au thème général de mon cours, mais que je n'ai pas eu l'occasion d'exposer dans mes précédents exposés oraux ou écrits.

1 Interprétation du $|\psi|^2$ dans les cas des états stationnaires

J'ai étudié dans des cours précédents et dans mon récent livre [1] la question de la justification de la signification statistique du $|\psi|^2$ comme probabilité de présence du corpuscule en un point de l'espace quand on adopte l'interprétation causale de la mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution - onde pilote. MM. Bohm et Vigier ont apporté une contribution importante à la solution de ce problème en montrant que si le mouvement du corpuscule, défini par la formule du guidage, subit constamment de petites pertubations aléatoires, la distribution de probabilité de présence en $|\psi|^2$ s'établit très rapidement. Ces petites perturbations aléatoires jouent ici le même rôle que l'hypothèse du "chaos moléculaire" dans la mécanique statistique de Boltzmann. A quoi peuvent être dues ces incessantes petites perturbations aléatoires ? A des interactions avec d'autres systèmes passant à proximité (collisions), à de petites perturbations des conditions aux limites imposées à l'onde u, peut-être même d'après M. Vigier à des interactions du système avec un champ ondulatoire tourbillonnaire et incoordonné qui remplirait ce que nous appelons le "vide".

D'un point de vue général, on peut remarquer que toute théorie qui assigne au point matériel une loi de mouvement bien déterminée (par les équations du mouvement dans les dynamiques de Newton et d'Einstein, par la propagation de l'onde associée et la formule du guidage dans l'interprétation de la mécaniqe ondulatoire par la double solution ou l'onde pilote), il est nécessaire pour obtenir une mécanique statistique d'introduire un élément aléatoire (chaos moléculaire de Boltzmann ou hypothèse de Bohm et Vigier). Mais le résultat que l'introduction de cet élément statistique permet de justifier, est en quelque sorte contenu d'avance dans les équations du mouvement, ce qui permet de le prévoir a priori. Ainsi dans le cadre des mécaniques anciennes, on peut démontrer le théorème de Liouville qui affirme la conservation au cours du temps du domaine d'extension en phase occupé par les points représentatifs dans cet espace abstrait d'un nuage de corpuscules se déplaçant dans l'espace physique décrivant les lois de la dynamique. Ceci rend probable a priori, sans en permettre la démonstration rigoureuse, qu'en mécanique statistique classique ou relativiste la loi statistique sera l'égale probabilité d'éléments égaux de l'extension-en-phase, ce qui peut s'enoncer avec plus de précision en disant : la probabilité pour que le point représentatif d'un corpuscule soit compris dans un élément de l'extension-en-phase à 6 dimensions ($d\tau = dx\ dy\ dz\ dp_x\ dp_y\ dp_z$) est proportionnelle à la grandeur de l'élément $d\tau$. Mais la démonstration de cette proposition, objet des théorèmes ergodiques et des théorèmes H, paraît nécessiter toujours l'introduction plus ou moins explicite d'un élément aléatoire analogue au chaos moléculaire de Boltzmann.

Dans les théories de la double solution ou de l'onde pilote (la distinction entre les deux est ici sans importance), le rôle joué dans les mécaniques anciennes par le théorème de Liouville appartient à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho\ \vec{v}) = 0$$

[1] L. de Broglie, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (la théorie de la double solution)*, Gauthier-Villars, Paris, 1956

associée à la propagation de l'onde irrégulière (ψ ou v). Cette équation rend probable a priori que, dans la nouvelle dynamique découlant de la formule du guidage, la quantité $\rho\, d\tau$ (où $\rho = |\psi|^2$ avec l'équation de Schrödinger) est la probabilité pour que le corpuscule soit présent dans l'élément $d\tau$ de l'espace physique. Mais ici encore, cette proposition ne peut être démontrée, par des raisonnements analogues à ceux de MM Bohm et Vigier, qu'en introduisant un élément aléatoire contitué par les incessantes petites perturbations dont nous avons parlé plus haut.

Quelle que soit l'origine physique de ces petites perturbations, nous pouvons nous les représenter de la façon suivante. Supposons qu'abstraction faite de ces perturbations, l'onde régulière associée à un corpuscule (onde ψ ou onde v partie extérieure de l'onde u, peu importe si on les suppose proportionnelles) soit de la forme $a\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$, le mouvement du corpuscule incorporé à cette onde "non perturbée" étant défini par la formule du guidage

$$\vec{v} = -\frac{1}{m}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$$

(en nous limitant pour simplifier au cas de l'équation de Schrödinger)

Introduisons les petites perturbations : bien qu'elles soient très nombreuses dans chaque unité de temps macroscopique (par exemple par seconde), nous les supposons très courtes et séparées dans le temps par des intervalles très longs par rapport à leur durée. Pendant une de ces perturbations, l'onde prendra la forme $(a+\varepsilon)\, e^{\frac{2\pi i}{h}(\varphi+\eta)}$, ε étant la petite variation de l'amplitude et η la petite variaton de la phase : nous pouvons, en raison du caractère aléatoire des perturbations, supposer que les valeurs moyennes $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\eta}$ de ε et de η dans le temps sont nulles. Pendant la durée d'une perturbation, la vitese du corpuscule devient la somme de la vitesse non perturbée $\vec{v} = -\frac{1}{m}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ et d'une vitesse additionnelle $\vec{v}_1 = -\frac{1}{m}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\eta$. Bien que la valeur moyenne de $\vec{v}_1$ dans le temps soit nulle, ces vitesses additionnelles feront passer le corpuscule de sa trajectoire initiale à une trajectoire non perturbée voisine, puis de celle-ci à une troisième trajectoire non perturbée etc. Finalement, bien que la durée de chacune des perturbations soit par hypothèse beaucoup plus courte que la durée des intervalles pendant lesquels le corpuscule décrit une trajectoire non perturbée, le nombre immense des perturbations subies par seconde aura pour effet qu'au bout d'un temps très court à notre échelle, la probabilité de présence $|\psi|^2 = a^2$ se trouvera réalisée ainsi que le raisonnement de MM Bohm et Vigier paraît bien le prouver. Cette probabilité est d'ailleurs aussi égale à la valeur moyenne du carré de l'amplitude de l'onde perturbée $\overline{(a+\varepsilon)^2}$ si l'on s'en tient au premier ordre, puisque $\bar{\varepsilon} = 0$.

Il est intéressant d'appliquer les considérations qui précèdent au cas des états stationnaires d'un système quantifié pour écarter une objection qui se présente alors naturellement au sujet de la formule du guidage.

Considérons un état stationnaire d'un système quantifié, en prenant comme exemple le cas simple de l'atome d'hydrogène. En général la fonction d'onde correspondante est de la forme $a(x,y,z)\, e^{\frac{2\pi i}{h}E_n t}$, E_n étant la valeur quantifiée de l'énergie et a étant une fonction réelle de x, y, z. La formule de guidage nous indique alors que, dans l'état fondamental, le corpuscule doit rester immobile en un point bien déterminé, mais quelconque de l'atome : on vérifie d'ailleurs qu'en tout point la force quantique $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,Q$ fait équilibre à la force appliquée. Dans d'autres cas, on trouve que le corpuscule est animé d'un mouvement périodique simple : c'est le cas pour l'électron de l'atome d'hydogène dans le cas où $\psi = F(r,\theta)\, e^{im\alpha}\, e^{\frac{2\pi i}{h}E_n t}$ (r, θ, α étant des coordonnées polaires sphériques) où la phase étant fonction linéaire de l'angle α de longitude, l'électron doit, d'après la formule, décrire un "parallèle" autour de l'axe polaire avec une vitesse uniforme. Dans un cas comme dans l'autre, on ne sait pas du tout comment peut-être réalisée la densité de probabilité de présence $|\psi|^2$ dans tout le système quantifié. L'objection paraît grave.

Mais introduisons maintenant les petites perturbations aléatoires brusques et espacées et commençons par envisager le cas où l'électron de l'atome H a un mouvement circulaire uniforme. On peut voir facilement que la longueur de la trajectoire circulaire sera de l'ordre de $10^{-8}\,cm$ à $10^{-9}\,cm$ et la vitesse de l'électron sur sa trajectoire de l'ordre de $10^9\,cm/sec$. La période du mouvement peut être prise égale à $10^{-18}\,seconde$. On voit alors qu'en admettant qu'il se produit en moyenne un milliard de perturbations brusques par seconde, le corpuscule aura cependant le temps de décrire en moyenne dans chaque intervalle entre deux perturbations un milliard de tour sur sa trajectoire non perturbée. Cet exemple montre que le corpuscle pourra être considéré comme animé presque constamment du mouvement non perturbé donné par la formule du guidage bien qu'il change un milliard de fois par seconde de trajectoire circulaire. Ceci permet de comprendre comment, malgré la forme circulaire des trajectoires non perturbées, on puisse trouver l'électron en n'importe quel point de l'atome avec la probabilité $|\psi|^2$.

Dans le cas où l'électron dans l'état non perturbé reste immobile en un point de l'atome, on peut dire que le mouvement non perturbé se réduit à l'immobilité. Mais si nous admettons toujours qu'il se produit en moyenne un milliard de pertubations par seconde, l'électron sera un milliard de fois par seconde projeté d'une position dans une autre et au bout d'une seconde il aura occupé un milliard de positions différentes dans l'atome bien qu'il soit resté en moyenne dans chacune de ces positions pendant un temps très long par rapport à la période de son onde (qui est toujours de l'ordre de $\frac{h}{m_0 c^2}$ soit de l'ordre de 10^{-20} *seconde*). Ici encore nous arrivons à comprendre comment se réalise la probabilité de présence en $|\psi|^2$, bien que le corpuscule reste constamment immobile en accord avec la formule du guidage.

2 Deux théorèmes de la théorie de la double solution - onde pilote.

Je vais maintenant démontrer deux théorèmes intéressants de la mécanique ondulatoire qu'on peut énoncer dans le langage de la théorie de l'onde pilote qui est ici équivalente à la théorie de la double solution. Je connais ces théorèmes depuis longtemps : ils ont d'ailleurs été donnés par d'autres auteurs.

2.1 Théorème sur l'expression de l'énergie cinétique.

Dans la mécanique ondulatoire usuelle, on considère la fonction d'onde ψ comme une grandeur complexe dont on ne fait pas intervenir séparément le module et l'argument. On prend alors comme opérateur Hamiltonien

$$H = \frac{P^2}{2m} + V \qquad \textit{avec} \qquad P^2 = -\,\frac{h^2}{4\pi^2}\,\triangle$$

l'opérateur $\frac{P^2}{2m}$ correspondant à l'énergie cinétique T de la théorie classique. La valeur moyenne de l'énergie totale E dans l'état ψ est alors d'après le formalisme usuel

$$\bar{E} = \int \psi^* \Big(-\,\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\triangle + V \Big)\, \psi \, d\tau \qquad (1)$$

En théorie de la double solution - onde pilote, on écrit $\psi = a\, e^{\frac{2\pi i}{h}\,\varphi}$ et, par substitution dans l'équation d'ondes, on a l'équation de Jacobi généralisée

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv E = \frac{1}{2m}\Big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\Big)^2 + V + Q$$

$$\textit{avec} \qquad Q = -\,\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\frac{\triangle a}{a} \qquad \textit{potentiel quantique}$$

et on a, en plus l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^2) + \mathrm{div}\Big(-\,\frac{a^2}{m}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi \Big) = 0$$

Comme ici l'énergie cinétique T du corpuscule a la valeur bien définie $T = \frac{1}{2m}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi)^2$ d'après la formule du guidage, on voit que l'énergie E est la somme de l'énergie cinétique, du potentiel classique V et du potentiel quantique Q. On est alors amené à écrire pour $\bar{E}$, la probabilité de présence étant $a^2 = \psi^*\,\psi$

$$\bar{E} = \int \Big(\frac{1}{2m}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}^2\,\varphi + V + Q \Big)\, \psi^*\, \psi \, d\tau \qquad (2)$$

Or on trouve

$$-\,\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\triangle\psi \;=\; \frac{1}{2m}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi)^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\frac{\triangle a}{a}$$

+ des termes en i qui sont nuls
en vertu de l'équation de continuité

En portant ceci dans (1), on voit alors que

1. L'expression usuelle (1) de $\bar{E}$ coïncide avec l'expression (2) donnée par la théorie de la double solution - onde pilote.

2. Dans l'expression (2) de $\bar{E}$, le terme $-\,\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\triangle$ de l'expression usuelle (1) ne correspond pas à l'énergie cinétique T du corpuscule en mouvement suivant la formule du guidage, mais *à la somme de cette énergie cinétique et du potentiel quantique*. Si le potentiel quantique ne figure pas explicitement dans la formule (1), c'est parce qu'il est contenu dans le terme en $\frac{p^2}{2m} = -\,\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\triangle$ que la théorie usuelle considère comme correspondant à l'énergie cinétique, mais que nous interprétons ici différemment.

Cette conclusion est importante pour la comparaison de la théorie usuelle avec celle de la double solution - onde pilote et avec la formule du guidage.

2.2 Théorème du Viriel

En mécanique statistique classique, on démontre un important théorème connu sous le nom de "théorème du Viriel", théorème qui joue notamment un rôle important en théorie cinétique des gaz. Je rappelle d'abord la démonstration classique (très rapide) de ce théorème. Le mouvement d'un corpuscule de quantité de mouvement égale à $\vec{p}$ dans un champ de force dérivant de la fonction potentielle V est

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$$

On en déduit, $\vec{r}$ étant le rayon vecteur qui définit la position du corpuscule

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r}.\vec{p}) = \vec{p}.\vec{v} + \vec{r}.\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = 2T - \vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

On voit facilement que, *pour un mouvement périodique*, le premier membre de l'équation précédente est nul en moyenne dans le temps et l'on obtient pour un tel mouvement

$$2\,\bar{T} - \overline{\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V} = 0$$

C'est le théorème du Viriel ($Viriel = -\,\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$).

Ce théorème peut se transposer dans la mécanique ondulatoire usuelle. La démonstration est indiquée par Sommerfeld dans son ouvrage classique Wellenmechanischer Ergänzungsband, p.292. Sommerfeld pose

$$\begin{aligned} Q &= \frac{h}{2\pi i}\int \psi^*(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\psi\, d\tau \\ K &= \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \int \psi^* \triangle\, \psi\, d\tau \\ R &= -\int \psi^*\,\psi\,(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V)\, d\tau \end{aligned}$$

(K est égal à $\bar{T}$, voir eq.(1) p.3)

Partant de l'équation de Schrödinger et utilisant plusieurs intégrations par parties, Sommerfeld démontre que l'on a

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 2K + R$$

Si l'onde est stationnaire ($\psi \sim e^{\frac{2\pi i}{h}\,E\,t}$), le premier membre est visiblement nul et il reste

$$2K + R = 0$$

ce qui est visiblement la transposition en mécanique ondulatoire usuelle du théorème du Viriel, R correspondant au Viriel.

Nous allons interpréter le résultat du calcul de Sommerfeld en nous plaçant au point de vue de la théorie de la double solution - onde pilote.

En introduisant dans l'expression de K la forme $\psi = a\, e^{\frac{2\pi i}{h}\,\varphi}$ de la fonction d'onde, on constate, après suppression de termes qui sont nuls en vertu de l'équation de continuité, qu'il reste

$$K = K' + \int a^2\, Q\, d\tau = K' + \bar{Q}$$

avec

$$K' = \frac{1}{2m}\int a^2\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi)^2\, d\tau \quad \text{et} \quad Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\frac{\triangle a}{a}$$

K' est donc la moyenne de l'énergie cinétique telle qu'on la définit à partir de la formule du guidage $\vec{p} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$. Quant à Q, c'est le potentiel quantique.

Nous retrouvons le résultat établi au 2.1 : l'expression K habituellement interprétée comme la valeur moyenne de l'énergie cinétique doit être envisagée de notre point de vue comme la somme de la valeur moyenne de la véritable énergie cinétique augmentée de la valeur du potentiel quantique.

La formule de Sommerfeld nous donne donc

$$2K' + 2\int a^2\, Q\, d\tau + R = 0$$

Or en théorie de la double solution - onde pilote, le théorème du Viriel doit évidemment s'écrire sous la forme

$$\otimes \qquad 2K' + R + R' = 0$$

$$\text{avec} \qquad R' = -\int a^2\,(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, Q)\, d\tau$$

car, au viriel de la force classique correspondant à R, on doit ajouter le viriel de la force quantique correspondant à R'. Pour démontrer la formule $\otimes$, il suffit de montrer que

$$R' = 2\int a^2\, Q\, d\tau$$

$$\text{soit} \qquad 2\int a\,\triangle a\, d\tau = -\int a^2\left(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{\triangle a}{a}\right) d\tau$$

Or on vérifie facilement (voir Sommerfeld loc. cit. formule 290) que

$$\begin{aligned} -\int a^2\,\left(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tfrac{\triangle a}{a}\right) d\tau &= \int \tfrac{\triangle a}{a}(3a^2 + \vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a^2)\, d\tau \\ &= \int \left(3a\,\triangle a + 2\triangle a\,(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a)\right) d\tau \\ &= 2\int a\,\triangle a\, d\tau \qquad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

(car on vérifie par une suite d'intégrations par parties que $2\int \triangle a\,(\vec{r}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a)\, d\tau = -\int a\,\triangle a\, d\tau$)

Le théorème du Viriel sous la forme $2K'+R+R' = 0$ se trouve ainsi démontré en théorie de l'onde pilote - double solution.

3 Comparaison des théories précédemment exposées - Nouvelle conception de l'interaction des particules avec les champs de bosons

Le but essentiel des théories que nous avons exposées était d'incorporer les corpuscules au champ et d'arriver ainsi à supprimer à la fois les termes de source surajoutés arbitrairement aux équations du champ et tout postulat arbitraire sur la façon dont le champ réagit sur la source (force de Lorentz, postulat des géodésiques etc.). Einstein cherchait à se représenter le corpuscule toujours doué de masse comme un lieu de grande concentration du champ gravifique; dans la théorie de Mie ou dans celle de Born, on cherche à se représenter une particule électrisée, un électron par exemple, comme un lieu de concentration du champ électromagnétique en faisant abstraction du champ gravifique qui cependant existe toujours.

Nous avons retrouvé les mêmes idées directrices d'incorporation du corpuscule dans le champ et de non linéarité dans l'interprétation de la mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution. Mais cette théorie nous a appris, me semble-t-il, une chose fondamentale : dans la conception qui assimile le corpuscule à une région de très haute concentration du champ, le champ dont il s'agit est essentiellement le champ ondulatoire *quantique* constitué par l'onde u (l'onde u étant quantique parce que son équation d'onde contient la constante de Planck). C'est parce que les tentatives antérieures d'incorporation du corpuscule au champ ne faisaient pas intervenir l'onde u qu'elles restaient incomplètes et en particulier non quantiques et l'on peut penser que c'est pour cela qu'elles ne pouvaient entièrement réussir.

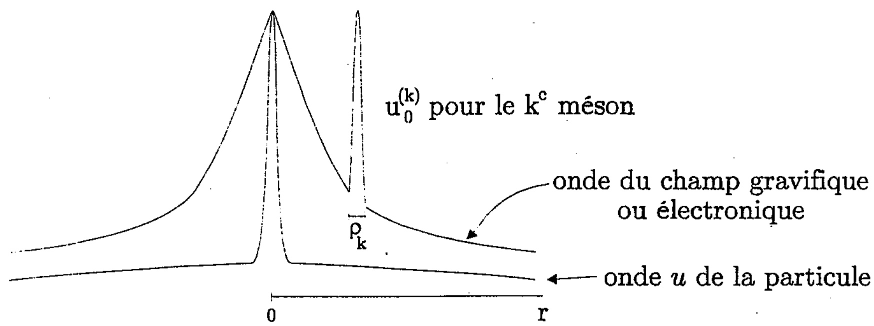
Mais si l'on admet, comme cette ligne d'idées paraît l'imposer, que le champ à bosse, dont la bosse constitue le corpuscule, est essentiellement le champ ondulatoire quantique u, quelles sont les relations du corpuscule avec le champ gravifique qui l'entoure toujours (car, à part peut-être le photon, on ne connaît pas actuellement de corpuscule de masse nulle) et avec les champs électromagnétiques ou autres (mésoniques par exemple) qui peuvent aussi éventuellement l'entourer ?

Pour répondre à cette question, il faut d'abord remarquer que les idées générales de la mécanique ondulatoire (indépendamment de l'interprétation par la double solution ou par l'onde pilote) et tout l'état actuel de la physique quantique nous amène à penser que tout champ est "associé" à des corpuscules. Les champs gravifiques, électromagnétiques, mésoniques etc que l'on fait intervenir dans la description du monde physique doivent être considérés comme étant des ondes ψ associées aux corpuscules "gravitons", "photons", "mésons" etc. Ce que l'on voit très nettement quand on étudie, dans le cadre de la mécanique ondulatoire usuelle, la théorie des particules à spin (par exemple sous la forme que je lui avais donnée il y a quelques années avant d'avoir repris l'étude de la double solution). Elle montre nettement que le champ électromagnétique est une onde ψ (à 10 composantes $\vec{E}$, $\vec{H}$, V et $\vec{A}$) associée aux photons de spin $\frac{h}{2\pi}$, le champ gravifique l'onde ψ (à 10 composantes distinctes les $g_{\mu\nu}$ d'Einstein) associée aux "gravitons" de spin $2\frac{h}{2\pi}$ etc. Dans le langage de la théorie de la double solution, on dira que les champs électromagnétiques, gravifiques, etc doivent être considérés comme étant la partie "extérieure" régulière v de l'onde u pour les photons, les gravitons etc.

Ici nous devons introduire une remarque essentielle : les particules ainsi associées à un même champ du type classique sont toujours des particules de spin entier (en unités $\frac{h}{2\pi}$), c'est-à-dire des "bosons ", particules dont les fonctions d'onde de Schrödinger dans l'espace de configuration sont toujours symétriques et qui ne sont pas soumises au principe d'exclusion de Pauli. La signification physique de ce fait est certainement la suivante : les champs du type classique sont toujours formés d'un nombre considérable de particules incorporés à un même champ (à une même onde v dans le langage de la double solution). Les particules de ces champs tels que photons, gravitons, etc doivent être des "bosons" puisque les "fermions" ne peuvent pas se grouper ainsi sur une seule onde (principe de Pauli).

On doit donc se représenter (avec les idées de la double solution) une particule telle qu'un électron comme étant un lieu de forte concentration de champ ondulatoire quantique u qui lui est propre et qui peut différer beaucoup des champs classiques qui entourent la particule, puisque pour un électron par exemple, l'onde u propre est représentée par des grandeurs de nature spinorielle alors que les champs quantiques et électromagnétiques qui entourent l'électron sont au contraire représentées par des grandeurs de nature tensorielle. Mais la particule matérielle définie par son onde u dont elle forme la région singulière, est également "accrochée" à la partie extérieure v d'une onde u gravifique (ou électromagnétique) sur laquelle sont "implantées" d'innombrables petites régions singulières constituant les électrons (et les photons).

Nous pouvons représenter ceci par la figure suivante



Elle représente schématiquement une particule immobile constitueée par son onde u propre comportant au centre une très étroite région singulière : à cette région singulière se trouve accrochée une autre onde u, mettons gravifique, comportant un nombre énorme de petites régions singulières qui seraient des gravitons. A la même région singulière pourraient s'accrocher d'autres ondes de bosons : par conséquent, si la particule a une charge électrique, une onde électromagnétique comportant un nombre immense de petites régions singulières qui seraient alors des "photons". Ainsi, à la particule toujours pesante et éventuellement chargée seraient accrochées des "grappes" de bosons, chaque grappe portée par son onde u qui viendrait se raccorder avec l'onde u de la particule dans la région singulière centrale. Il est probable que la soudure de l'onde u de la particule avec les ondes u des grappes de bosons qui l'environnent se ferait dans cette région singulière par des effets de non-linéarité localisés dans cette région.

On pourrait imaginer que tous les champs u, celui des particules fermions ou bosons et celui des bosons groupés en grappes et constituant les champs gravifiques, électromagnétiques . . . , formeraient un champ unique qui serait le champ u unitaire obéissant à des équations non linéaires. En dehors des régions singulières, chaque sorte de champ u pourrait être considéré comme obéissant à des équations linéaires, mais dans chaque région singulière la solidarité de tous ces champs se trouverait établie par la non linéarité. Les effets localisés de non linéarité devraient finalement expliquer pourquoi la présence des particules agit sur la structure des champs de bosons qui les entourent et pourquoi ces champs de bosons réagissent à leur tour sur le comportement et le mouvement des particules : ce seraient ces actions et réactions que nous représentons péniblement à l'heure actuelle en introduisant dans des équations linéaires des termes de "sources" et des termes de "forces".

Prenons comme exemple l'équation d'onde de Klein-Gordon pour la particule de spin 0. Dans la théorie de la double solution, nous avons vu la réaction du champ u de la particule sur elle-même se traduire par l'apparition du potentiel quantique Q, mais nous avons dû maintenir à côté de lui, pour exprimer l'action du champ électomagnétique ambiant, les termes en V et $\vec{A}$ qui correspondent à la force classique de Lorentz. Dans la théorie unitaire que nous imaginons, ces termes ne devraient sans doute plus être ainsi introduits arbitrairement : l'action du champ électromagnétique sur la particule devrait sans doute résulter automatiquement de la liaison non linéaire entre l'onde u de la particule et l'onde u des photons ambiants. Même le terme en m_0 de l'équation de Klein-Gordon ne devrait pas être introduit arbitrairement, mais résulter automatiquement de la liaison non linéaire de la particule avec le champ des gravitons ou peut-être avec l'ensemble des champs ambiants.

Naturellement cette véritable "théorie des champs unifiés" qui, contenant les ondes u de toutes les particules, contiendrait les quanta et la mécanique ondulatoire n'est encore qu'un programme très vague dont la réalisation exacte ne peut être que difficile et longue. Je n'ai malheureusement aucune indication précise à donner sur cette réalisation, mais j'ai fortement l'impression que c'est vers elle qu'on devrait tendre.

Pour terminer ce cours, je vais donner un aperçu succint d'une théorie dont je me suis beaucoup occupé, il y a quelques années, mais que je n'ai jamais exposée ici oralement : la théorie du champ soustractif. Son lien avec ce qui précède est qu'elle cherche à réaliser l'unification de deux types de champs a priori distincts, le champ électromagnétique et le champ photonique de Yukawa : cette unification nous fournira quelques indications qui nous ramèneront aux idées que je viens d'exposer.

Mais avant d'aborder l'exposé de la théorie du "champ soustractif", je voudrais étudier rapidement les solutions statiques des équations d'ondes.

4 Les solutions statiques des équations d'ondes

Considérons pour commencer l'équation d'ondes d'une particule de spin 0 ou équation de Klein-Gordon en l'abscence de champ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \triangle\psi + \frac{4\pi^2}{h^2}\,m_0^2\,c^2 = 0 \qquad m_0 \text{ masse propre}$$

Elle admet les solutions "ondes planes monochromatiques" bien connues

$$\psi = a\,e^{\frac{2\pi i}{h}\,(Wt-\vec{p}.\vec{r})}$$

a étant une constante avec $\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2\,c^2$. Cette solution correspond, comme on sait, au mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule d'énergie W et de quantité de mouvement $\vec{p}$ avec cette restriction, cependant, que l'onde plane monochromatique étant une abstraction, un tel corpuscule en mouvement rectiligne uniforme correspond en réalité à un "train d'ondes" presque monochromatique, mais de dimensions toujours limitées. A la solution régulière "onde plane monochromatique", correspond d'ailleurs une solution u singulière de même phase que j'avais déjà considérée en 1927 et dont j'avais rappelé précédemment la forme.

Si l'on considère des mouvements rectilignes et uniformes du corpuscule, de moins en moins rapide, ce qui revient à faire des transformations de Lorentz successives, la différence $W^2 - m_0^2c^2 = p^2c^2$ va en diminuant et à la limite pour $p \to 0$, on obtient l'onde ψ du corpuscule "immobile" $\psi = a\,e^{\frac{2\pi i}{h}\,m_0c^2t}$ à laquelle correspond la solution singulière $u = \frac{b}{r_0}\,e^{\frac{2\pi i}{h}\,m_0c^2t}$ comme nous l'avons vu.

Mais on peut aussi considérer des solutions d'un type différent en considérant par exemple dans le système propre des solutions de fréquence égale à $\frac{m_0'c^2}{h}$ avec $m_0' \neq m_0$. On aura alors à satisfaire dans le système propre à l'équation

$$\star \qquad \triangle a = \frac{4\pi^2}{h^2}\,(m_0^2 - m_0'^2)\,c^2 a$$

Si $m_0' > m_0$, on obtient les deux solutions

$$\frac{1}{r_0}\,sin\Big(\frac{2\pi}{h}\,\sqrt{m_0'^2 - m_0^2}\,c\,r_0\Big)\,e^{\frac{2\pi i}{h}\,m_0'c^2t_0}$$

et

$$\frac{1}{r_0}\,cos\Big(\frac{2\pi}{h}\,\sqrt{m_0'^2 - m_0^2}\,c\,r_0\Big)\,e^{\frac{2\pi i}{h}\,m_0'c^2t_0}$$

dont la première est régulière à l'origine et la seconde singulière en $\frac{1}{r_0}$ à l'origine. La première donne, dans le système propre, la solution régulière v du problème extérieur, la seconde la solution singulière u_0 de ce problème. Ces fonctions sont précisément celles que l'on rencontre dans l'étude des états stationnaires placés au centre d'une enceinte sphérique. En 1927, j'avais rencontré ces solutions et j'avais dit qu'elles correspondaient à des "états contraints" du corpuscule.

Pour $m_0' < m_0$, nous nous trouvons en présence d'une circonstance très différente car alors l'équation $\star$ admet deux solutions à symétrie sphérique indépendantes

$$\frac{1}{r_0}\,e^{-\frac{2\pi}{h}\sqrt{m_0^2-m_0'^2}c\,r_0}$$

et

$$\frac{1}{r_0}\,e^{+\frac{2\pi}{h}\sqrt{m_0^2-m_0'^2}c\,r_0}$$

qui sont toutes deux singulières à l'origine et dont la seconde est, de plus, infinie à l'infini. Si pour cette raison nous écartons la seconde solution comme ne pouvant avoir aucun sens physique, il ne nous reste qu'une seule solution admissible par l'équation d'ondes

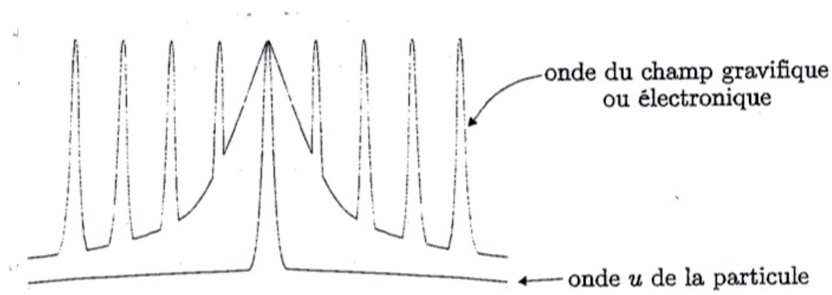
$$\frac{1}{r_0}\,e^{-\frac{2\pi}{h}\sqrt{m_0^2-m_0'^2}c\,r_0}\,e^{\frac{2\pi i}{h}\,m_0^2c^2t_0}$$

qui est singulière (donc du type u_0) et aucune solution régulière du type v. Nous pouvons donc penser qu'aucun état contraint avec $m_0' < m_0$ ne peut exister pour un corpuscule isolé à symétrie sphérique puisque nous ne pourrions plus en ce cas obtenir une solution de la forme $u = u_0 + v$.

Cela ne nous empêche pas naturellement de considérer abstraitement les solutions que nous venons d'obtenir et en particulier le cas où m_0' serait nul, ce qui nous donne une solution à symétrie sphérique $\frac{1}{r}\,e^{-\frac{2\pi}{h}\,m_0c\,r}$ autour d'un centre placé à l'origine : elle constitue la solution "statique" de l'équation d'ondes à symétrie sphérique autour de l'origine [2].

[2] C'est le potentiel de Yukawa, solution statique de l'équation de Klein-Gordon

Considérons un champ de bosons (mésons) de spin 0 auxquels on peut appliquer l'équation de Klein-Gordon et une particule P à laquelle ce champ est "accroché". Nous représentons approximativement cet accrochage en disant que la particule P possède une charge mésonique ε par rapport à ce champ de mésons. En excluant le voisinage immédiat de l'origine où nous supposons placée la particule P [3], la solution $\frac{\varepsilon}{r}\, e^{-\frac{2\pi}{h}\, m_0 c\, r}$ représentera la partie v du champ de mésons. Sur cette onde v seront implantées d'innombrables régions singulières de sorte que l'onde u des mésons sera de la forme $u = \sum_k u_0^{(k)} + v$, $u_0^{(k)}$ n'étant appréciable devant v qu'au voisinage de la k^e région singulière. Au voisinage immédiat de la k^e région singulière (k^e méson du champ mésonique), $u_0^{(k)}$ croît comme $\frac{1}{\rho_k}$, ρ_k étant la distance du point courant au centre de la région singulière. On ne doit donc pas confondre la croissance de v comme $\frac{1}{r}$ au voisinage de la particule P avec la croissance de $u_0^{(k)}$ comme $\frac{1}{\rho_k}$ au voisinage du k^e méson du champ. Naturellement l'onde u_0 propre de la particule P croît comme $\frac{1}{r}$ au voisinage de l'origine.



Des considérations analogues peuvent être développées pour les champs de bosons de spin entier (en $\frac{h}{2\pi}$) autres que ceux des bosons de spin nul. Nous insisterons sur les bosons de spin $\frac{h}{2\pi}$, parmi lesquels les photons et peut-être certains mésons. Des calculs analogues sont valables pour les mésons de spin $2\,\frac{h}{2\pi}$ parmi lesquels doivent figurer les gravitons, mais comme ils sont plus compliqués, nous ne les expliciterons pas ici.

Les équations de la particule de spin 1 en l'absence de champs extérieurs agissant sur elle sont les équations que j'ai données le premier en 1934 [4] [5], puis dans ma " Mécanique ondulatoire du photon" [6] où j'écrivais les équations du photon en lui attribuant une masse propre μ_0 non nulle (bien que certainement extrèmement petite, même par rapport à celle de l'électron). J'obtenais ainsi des équations qui ont été retrouvées deux ans plus tard en 1936 par Alexandre Proca [7] et auxquelles ont donne généralement son nom. Ces équations portant sur les dix grandeurs E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, A_x, A_y, A_z et V, le fait de donner à μ_0 une masse non nulle faisant tomber l'invariance de jauge et permettant ainsi de donner aux potentiels $\vec{A}$ et V une signification physique. Les dix grandeurs $E_x \ldots V$ peuvent être considérées comme les dix composantes distinctes de l'onde associée au photon. Les équations auxquelles elles obéissent sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E} & \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H} + k_0^2\,\vec{A} & \mathrm{div}\,\vec{E} = -k_0^2\,V \\
\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} & \vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \quad \text{avec} & k_0 = \frac{2\pi}{h}\,\mu_0\,c
\end{array}$$

Ces 15 équations, que j'ai appelées "équations maxwelliennes", sont identiques aux équations que l'on rencontre dans la théorie usuelle de l'électromagnétisme avec cette seule différence que les équations de la seconde ligne contiennent en

[3] Car il y a une région singulière où l'on ne peut "prolonger" les solutions extérieures
[4] L. de Broglie, *L'équation d'onde du photon*, Comptes rendus **199**, p.445, 1934.
[5] L. de Broglie, *Nouvelles recherches sur la lumière*, Hermann, Paris, 1936
[6] L. de Broglie, *La mécanique ondulatoire du photon*, Hermann, Paris, t.I 1940, t.II 1942
[7] A. Proca, *Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs*, Journal de physique **7**, 347, 1936

N.D.L.R. : En réalité, comme le titre de Proca l'indique, son équation a la prétention d'être une équation de l'*électron*, destinée à se substituer à celle de Dirac, et non pas l'équation d'un photon massif. Son lagrangien, écrit en présence d'un champ électromagnétique, s'écrit

$$L = \frac{h^2c^2}{2}\,F^*_{rs}\,F_{rs} + m^2c^4\,\psi^*_r\,\psi_r \quad , \quad F_{rs} = (\partial_r - iA_r)\,\psi_s - (\partial_s - iA_s)\,\psi_r \qquad (r,s = 1,2,3,4)$$

où ψ_s est complexe et A_r réel (potentiel de Lorentz). Si $A_r = 0$, on retrouve les équations de de Broglie dans lesquelles le ψ_r de Proca se substitue aux $\left(\vec{A}, V\right)$ de de Broglie. Mais, dans l'esprit de Proca, il s'agirait de l'équation d'un électron libre, dont il ne remarque pas qu'il est de spin 1 au lieu de $\frac{1}{2}$.

supplément des termes en k_0^2 contenant le carré de la masse propre μ_0 de la particule. Pour des mésons ayant une masse grande par rapport à celle de l'électron, les termes en k_0^2 sont importants : pour des photons dont la masse propre (certainement au plus égale à $10^{-45} gr.$) est très petite par rapport à celle de l'électron, les termes en k_0^2 sont très petits et, si l'on suppose qu'ils sont nuls ($\mu_0 = 0$), on retombe sur les équations ordinaires de Maxwell. J'ai étudié en détail dans des cours antérieurs qui ont été publiés les solutions régulières correspondant aux solutions usuelles de l'électromagnétisme avec de petites différences si $k_0 > 0$. Ces solutions peuvent êtres considérées comme les ondes v (ou ψ) du problème extérieur pour le photon : en particulier, les solutions "ondes planes monochromatiques", dont j'ai donné ailleurs l'expression complète, correspondent au mouvement rectiligne et uniforme du photon (avec une vitesse très légèrement inférieure à c si $\mu_0 > 0$, égale à c si $\mu_0 = 0$).

Quand j'ai développé la "Mécanique ondulatoire du photon", je n'ai pas cherché les solutions singulières des équations Maxwelliennes parce qu'à cette époque (1934-1948), j'avais abandonné la théorie de la double solution. Si on les cherchait, on trouverait des solutions singulières permettant de construire la partie singulière u_0 de l'onde u du photon dans le problème extérieur. Je n'étudierai pas ici ces solutions, me réservant de le faire peut-être dans un cours ultérieur.

Quand on suppose $\mu_0 > 0$ (ce ne serait plus vrai avec $\mu_0 = 0$), on peut définir un "système propre" du photon où le photon est immobile et les solutions régulières et singulières considérées ci-dessus, dans ce système propre, dépendant du temps par le seul facteur $e^{\frac{2\pi i}{h}\mu_0 c^2 t_0}$. Avec ces solutions, on doit pouvoir construire des fonctions $u = u_0 + v$ représentant l'onde u d'un photon dans le domaine extérieur. Ici encore, on peut considérer (toujours avec $\mu_0 > 0$) des solutions qui, dans le système propre, dépendraient du temps par le facteur $e^{\frac{2\pi i}{h}\mu_0' c^2 t_0}$ avec $\mu_o' \neq \mu_0$. Dans le cas où $\mu_o' > \mu_0$, je pense qu'on doit trouver des solutions régulières et singulières analogues à celles que nous avions trouvées plus haut pour la particule de spin 0 obéissant à l'équation de Klein-Gordon pour $m_o' \geq m_0$. Ces solutions doivent permettre de construire l'onde $u = u_0 + v$ du problème extérieur pour un photon dans un état contraint, par exemple pour un photon enfermé dans une enceinte avec des conditions données aux limites de l'enceinte. Toutes ces questions seraient très interressantes à étudier de près : les solutions u ainsi obtenues sous forme générale avec $k_0 > 0$ et $k_0' > k_0$ seraient valables avec de très petites valeurs de k_0 pour le photon et avec des grandes valeurs de k_0 pour les mésons de spin $\frac{h}{2\pi}$.

Pour $\mu_0' < \mu_0$, il est probable qu'on trouverait encore, comme dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, qu'il n'existe que des solutions singulières dont on ne devra garder que celles qui sont nulles à l'infini. On ne pourra pas alors constituer avec ces solutions une onde $u = u_0 + v$ avec un terme régulier et, dans la théorie de la double solution, nous devrons admettre qu'il n'y a pas d'état du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ correspondant à $\mu_0' < \mu_0$.

Nous pouvons cependant étudier mathématiquement ces solutions et en particulier la solution statique $\mu_0' = 0$. Alors on a

$$\vec{H} = \vec{0} \qquad \vec{A} = \vec{0} \qquad V = \frac{\varepsilon}{r}\, e^{-k_0\, r} \qquad E_\theta = E_\varphi = 0$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\varepsilon}{r^2}\, e^{-k_0\, r} + \frac{k_0\, \varepsilon}{r}\, e^{-k_0\, r}$$

C'est encore une solution du type Yukawa, V étant le potentiel de Yukawa. Nous pouvons interpréter cette solution de Yukawa comme nous l'avons fait plus haut dans le cas de l'équation de Klein-Gordon.

Considérons un champ de bosons de spin $\frac{h}{2\pi}$ (mésons ou photons) et une particule P à laquelle le champ est "accroché". Nous représenterons approximativement cet accrochage en disant que la particule P possède une charge ε par rapport à ce champ de bosons, ε étant une "charge mésonique" si les bosons sont des mésons et une "charge électrique" au sens usuel du mot si les bosons sont des photons. En excluant la région singulière de la particule P qui occupe le voisinage immédiat de l'origine $r = 0$, la solution du type Yukawa explicitée plus haut représentera la partie régulière v de l'onde u du champ de bosons de spin $\frac{h}{2\pi}$. Sur cette onde v seront implantées d'innombrables régions singulières de sorte que l'onde u (ici à 10 composantes) sera de la forme $u = \sum_k u_0^{(k)} + v$, u_0^k n'étant appréciable devant v qu'au voisinage immédiat de la k^e région singulière (k^e boson du champ des bosons). Au voisinage immédiat de cette région singulière, $u_0^{(k)}$ croît comme $\frac{1}{\rho_k}$, ρ_k étant la distance du point courant au centre de la k^e région singulière. Ici encore il faut se garder de confondre la croissance en $\frac{1}{r}$ de v au voisinage de la particule P avec la croissance en $\frac{1}{\rho_k}$ de $u_0^{(k)}$ au voisinage du k^e boson du champ. Naturellement l'onde u_0 propre de la particule croît comme $\frac{1}{r}$ au voisinage de l'origine.

Pour les photons, la solution statique du type Yukawa est toujours

$$\vec{H} = \vec{0} \qquad \vec{A} = \vec{0} \qquad V = \tfrac{\varepsilon}{r}\, e^{-k_0\, r}$$
$$E_\theta = E_\varphi = 0 \qquad E_r = -\tfrac{\partial V}{\partial r}$$

mais ici ε est la charge électrique de la particule P au sens usuel et $k_0 = \frac{2\pi}{h}\,\mu_0 c$ est extrêmement petit en raison de la valeur évanouissante. On peut donc écrire avec une approximation toujours suffisante en pratique

$$V = \frac{\varepsilon}{r} \qquad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\varepsilon}{r^2}$$

et cette forme serait même rigoureuse si μ_0 était rigoureusement nulle. On obtient ainsi le champ électrostatique classique. Ce champ ne diffère du champ avec le terme $e^{-k_0\, r}$ qu'à des distances de la particule P de l'ordre de $\frac{1}{k_0} = \frac{h}{2\pi\mu_0 c} \simeq \frac{10^{-37}}{\mu_0} \geq 10^8 cm = 1000$ kilomètres de sorte que de toute façon, si $\mu_0 \neq 0$, le terme $e^{-k_0\, r}$ échappe à l'observation.

Nous remarquerons que dans le cas des bosons de spin $\frac{h}{2\pi}$ comme dans celui des bosons de spin 0, la représentation de "l'accrochage" du champ de bosons à la particule P par l'introduction d'une charge ε, qui revient à introduire un second membre de "source" dans le second membre des équations d'ondes, doit être considérée, d'après les idées générales précédemment exposées, comme un artifice représentant imparfaitement la véritable "soudure non linéaire" du champ de bosons avec le champ propre u de la particule dans la région singulière qui entoure l'origine $r = 0$.