Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace

C. Daviau

Fondation Louis de Broglie, 23, Quai de Conti 75006 Paris

RÉSUMÉ. On étudie ici les tenseurs liés à l'onde de Dirac, tenseurs sans dérivée et tenseurs avec dérivées du premier ordre. On utilise pour cette étude l'algèbre de Clifford d'espace, et on se sert de ce cadre pour former, en plus des tenseurs précédemment étudiés, qui sont les tenseurs invariants de jauge électrique, tous les tenseurs possibles, y compris ceux qui tournent dans une transformation de jauge électrique. L'ensemble de ces tenseurs est globalement invariant sous des transformations de jauge formant un groupe $U(1) \times SU(2)$. On calcule ensuite ces tenseurs dans le cas simple de l'onde plane monochromatique.

ABSTRACT. We study the tensors of the Dirac theory, first the tensors without derivative, next the tensors with first order derivatives. We use the frame of the space Clifford algebra to get not only the well known tensors, which are invariant under an electric gauge transformation, but all the available tensors, even those which rotate under an electric gauge transformation. The set of all these tensors is globally invariant under a $U(1) \times SU(2)$ gauge group. Then we calculate each tensor in the simple case of the monochromatic plane wave.

1 - L'équation de Dirac en algèbre d'espace

Conçue comme une équation d'ondes relativiste et du premier ordre, l'équation de Dirac [1], qui rend très finement compte de la physique de l'électron, a introduit un type d'objet mathématique nouveau, le spineur, fonction de l'espace-temps à valeur dans $\mathbb{C}^4$. Le spineur ne se transforme pas comme un tenseur sous une rotation de Lorentz. On écrira ici l'équation de Dirac sous la forme :

$$\begin{gathered}[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = 0 \\ q = \frac{e}{\hbar c} \quad ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar}\end{gathered} \tag{1-1}$$

où e, négatif, est la charge de l'électron et les A_μ sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. On utilisera ici une signature $+ \ - \ - \ -$ pour la métrique d'espace-temps, donc les composantes contravariantes de A sont $A^0 = A_0$ et $A^j = -A_j$, $j = 1,\ 2,\ 3$. On prendra ici la forme usuelle des matrices de Dirac :

$$\begin{gathered}\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} ; \quad \gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} \\ \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{1-2}$$

$$I = \sigma_0 = \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} ; \ \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix} ; \ \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

On utilisera ici également une autre écriture pour l'équation de Dirac. Cette écriture a été obtenue sous une forme voisine en [2]. On se servira également des spineurs ξ et η de Weyl définis par

$$\begin{gathered}U\psi = \begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \quad ; \quad U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 + \gamma_5) \\ \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{1-3}$$

ce qui donne :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4\end{pmatrix} \quad ; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4\end{pmatrix} \tag{1-4}$$

A chacun des spineurs ψ de (1-1) on fait correspondre un élément $\phi = f(\psi)$, fonction de l'espace-temps à valeur dans l'algèbre de Clifford de l'espace physique usuel, défini par :

$$\begin{aligned}f(\psi) = \phi = a_1 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3 \\ + a_5\sigma_1\sigma_2 + a_6\sigma_3\sigma_2 + a_7\sigma_3\sigma_1 + a_8 i\end{aligned} \tag{1-5}$$

où les a_k sont les parties réelles et imaginaires des composantes ψ_j de ψ, à savoir :

$$\begin{aligned}\psi_1 = a_1 + ia_5 \ ; \quad \psi_2 = -a_7 - ia_6 \ ; \\ \psi_3 = a_4 + ia_8 \ ; \quad \psi_4 = a_2 + ia_3\end{aligned} \tag{1-6}$$

L'algèbre de Clifford d'espace est isomorphe à l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes, algèbre engendrée par les matrices de Pauli, mais on n'utilise ici que la structure d'algèbre sur le corps des réels. On notera ${\psi^*}_j$ le complexe conjugué de ψ_j, suivant en cela la notation usuelle en théorie de Dirac :

$$\psi^* = \begin{pmatrix} {\psi^*}_1 \\ {\psi^*}_2 \\ {\psi^*}_3 \\ {\psi^*}_4 \end{pmatrix} ; \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 = ({\psi^*}_1 \;\; {\psi^*}_2 \;\; -{\psi^*}_3 \;\; -{\psi^*}_4) \tag{1-7}$$

En algèbre d'espace, on utilisera trois sortes de conjugaisons, les conjugués de ϕ étant définis par :

$$\begin{aligned} \phi^\dagger &= a_1 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3 \\ &\qquad - a_5\sigma_1\sigma_2 - a_6\sigma_3\sigma_2 - a_7\sigma_3\sigma_1 - a_8 i \\ \overline{\phi} &= a_1 - a_2\sigma_1 - a_3\sigma_2 - a_4\sigma_3 \\ &\qquad + a_5\sigma_1\sigma_2 + a_6\sigma_3\sigma_2 + a_7\sigma_3\sigma_1 - a_8 i \\ \widehat{\phi} &= a_1 - a_2\sigma_1 - a_3\sigma_2 - a_4\sigma_3 \\ &\qquad - a_5\sigma_1\sigma_2 - a_6\sigma_3\sigma_2 - a_7\sigma_3\sigma_1 + a_8 i \end{aligned} \tag{1-8}$$

Ces conjugaisons vérifient, pour tout élément A et B de l'algèbre d'espace

$$\begin{aligned} (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \;;\; \overline{AB} = \overline{A}\;\overline{B} \\ \widehat{AB} = \widehat{B}\widehat{A} \;;\; \widehat{A} = \overline{A}^\dagger \end{aligned} \tag{1-9}$$

La transformation f est linéaire en tant qu'application d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dans un autre espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de la transformation f sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ mais f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire car on a :

$$f(i\psi) = \phi i\sigma_3 \tag{1-10}$$

C'est donc bien la structure d'espace vectoriel et d'algèbre sur $\mathbb{R}$ que nous utiliserons, les fonctions a_k étant des fonctions de l'espace et du temps à valeur dans $\mathbb{R}$. On obtient aussi, pour tout $\phi = f(\psi)$:

$$\begin{aligned} f(\psi^*) &= \sigma_2\overline{\phi}\sigma_2 \\ f(\gamma^\mu\psi) &= \sigma^\mu\overline{\phi} \quad , \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \end{aligned} \tag{1-11}$$

On obtiendra l'équation d'onde pour ϕ en appliquant f à l'équation de Dirac :

$$f\left([\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi\right) = 0$$

ce qui donne :

$$\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\phi} + q\sigma^\mu A_\mu\overline{\phi} i\sigma_3 + m\phi i\sigma_3 = 0 \tag{1-12}$$

On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla = \partial_0 + \vec{\partial} \;; \quad \vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 \\ A = A^0 - \vec{A} \;; \quad \vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3 \end{aligned} \tag{1-13}$$

Et il en résulte :

$$\overline{\nabla} = \partial_0 - \vec{\partial} = \sigma^\mu\partial_\mu \;; \quad \overline{A} = A^0 + \vec{A} = \sigma^\mu A_\mu \tag{1-14}$$

L'équation de Dirac prend donc la forme :

$$\overline{\nabla}\;\overline{\phi} + q\overline{A}\;\overline{\phi} i\sigma_3 + m\phi i\sigma_3 = 0 \tag{1- 15}$$

et ceci équivaut à :

$$\nabla\phi i\sigma_3 = m\overline{\phi} + qA\phi \tag{1-16}$$

La transformation f respecte la forme que prend en théorie de Dirac l'invariance relativiste. On sait en effet [3] que le groupe de recouvrement du groupe de Lorentz restreint ${\mathcal{L}^\uparrow}_+$ est le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ unimodulaires, c'est-à-dire de déterminant 1, donc est contenu dans l'algèbre d'espace. Soit M une matrice unimodulaire :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m_1 & m_3 \\ m_2 & m_4 \end{pmatrix} \\ \det M &= m_1m_4 - m_2m_3 = 1 \end{aligned} \tag{1-17}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} m_4 & -m_3 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix} = \widehat{M} \\ \sigma_2\overline{M}\sigma_2 &= \begin{pmatrix} {m_1}^* & {m_3}^* \\ {m_2}^* & {m_4}^* \end{pmatrix} = M^* \end{aligned} \tag{1-18}$$

Et il est établi, on pourra notamment en trouver une démonstration détaillée en [3], que la transformation r qui, à tout vecteur d'espace-temps

$$V = V_0 + V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 + V_3\sigma_3$$

fait correspondre le vecteur V' tel que

$$V' = r(V) = \overline{M}VM^{-1} \tag{1-19}$$

est une rotation de Lorentz orthochrone conservant l'orientation. L'application $h : M \mapsto r$ est un homomorphisme du groupe de Lie $SL(2,\mathbb{C})$ sur le groupe de Lorentz restreint ${\mathcal{L}^\uparrow}_+$, de noyau $\{1 \;;\; -1\}$. L'équation de Dirac écrite sous la forme (1-16) est invariante sous le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ car si l'on pose :

$$\begin{aligned} \phi' &= M\phi \\ \nabla' &= \overline{M}\nabla M^{-1} \\ A' &= \overline{M}AM^{-1} \end{aligned} \tag{1-20}$$

alors l'équation (1-16) équivaut à

$$\nabla'\phi' i\sigma_3 = m\overline{\phi}' + qA'\phi' \tag{1-21}$$

donc garde la même forme. De plus, avec (1-4) , (1-5) et (1-6) on obtient :

$$\phi = \sqrt{2}(\xi \quad -i\sigma_2\eta^*) \;\;;\;\; \overline{\phi} = \sqrt{2}(\eta \quad -i\sigma_2\xi^*) \tag{1-22}$$

de sorte que ξ et η sont, à un facteur près, les colonnes de gauche de ϕ et $\overline{\phi}$. Il est bien connu que les spineurs ξ et η sont transformés, par la rotation de Lorentz r associée à M, en ξ' et η' tels que :

$$\xi' = M\xi \quad ; \quad \eta' = (M^\dagger)^{-1}\eta = \overline{M}\eta \tag{1-23}$$

et l'on a :

$$\eta'^* = \overline{M}^*\eta^* = \sigma_2 M\sigma_2\eta^* \quad ; \quad i\sigma_2\eta'^* = Mi\sigma_2\eta^* \tag{1-24}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\phi' &= M\phi = M\sqrt{2}(\xi \quad -i\sigma_2\eta^*)\\ &= \sqrt{2}(M\xi \quad -iM\sigma_2\eta^*)\\ &= \sqrt{2}(\xi' \quad -i\sigma_2\eta'^*)\end{aligned} \tag{1-25}$$

Donc les égalités (1-22) sont invariantes sous une rotation de Lorentz propre. L'invariance relativiste de l'équation (1-16) est bien complètement équivalente à celle de l'équation de Dirac. Par contre cette forme d'invariance n'est pas celle du formalisme d'Hestenes, pour qui les γ_μ constituent une base de l'espace-temps [4]. On peut aussi voir que la transformation f est complètement compatible avec le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ à partir des égalités (1-11) qui donnent :

$$f(e^{a\gamma_1\gamma_0}\psi) = e^{a\sigma_1}\phi \quad ; \quad f(e^{a\gamma_2\gamma_1}\psi) = e^{ai\sigma_3}\phi \tag{1-26}$$

et ainsi de suite. La transformation f ne dépend donc pas du repère utilisé.

La théorie de Dirac ne comporte pas que des spineurs et des vecteurs d'espace-temps, elle utilise aussi le tenseur champ électromagnétique qui s'écrit en algèbre d'espace [2] :

$$F = \overline{\nabla}A \quad ; \quad \nabla F = \frac{4\pi}{c}j \tag{1-27}$$

et sous une rotation de Lorentz r le bivecteur champ électromagnétique F devient :

$$F' = MFM^{-1} \tag{1-28}$$

et les équations (1-27) sont invariantes sous les rotations de Lorentz données par (1-20) et (1-28)

2 - Tenseurs sans dérivée.

Les tenseurs sans dérivée, construits à partir du spineur ψ, sont les grandeurs de la forme $\overline{\psi}M\psi$. On obtient ainsi 16 grandeurs qui forment : le scalaire Ω_1, le vecteur courant J^μ, le tenseur antisymétrique $S^{\mu\nu}$, le vecteur spin K^μ et le pseudo-scalaire Ω_2 tels que :

$$\begin{aligned}&\Omega_1 = \overline{\psi}\psi \ ; \quad \Omega_2 = -i\overline{\psi}\gamma_5\psi\\ &J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \ ; \quad K^\mu = -\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi\\ &S^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi\end{aligned} \tag{2-1}$$

On obtient, avec (1-5) et (1-6) :

$$\begin{aligned}\Omega_1 =&|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2\\ =&{a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 - {a_4}^2\\ &+ {a_5}^2 + {a_6}^2 + {a_7}^2 - {a_8}^2\end{aligned} \tag{2-2}$$

Et pour le pseudo-scalaire Ω_2, on a :

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= i(\psi_1{\psi^*}_3 + \psi_2{\psi^*}_4 - \psi_3{\psi^*}_1 - \psi_4{\psi^*}_2)\\ &= 2(a_1a_8 + a_2a_6 - a_3a_7 - a_4a_5)\end{aligned} \tag{2-3}$$

Avec les spineurs de Weyl, ceci donne :

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^\dagger\xi \tag{2-4}$$

Et si l'on pose :

$$\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \quad ; \quad \eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \tag{2-5}$$

on obtient, en identifiant comme précédemment les scalaires et les matrices scalaires :

$$\begin{aligned}&\Omega_1 + i\Omega_2 = 2({\eta_1}^*\xi_1 + {\eta_2}^*\xi_2)\\ &\phi\widehat{\phi} = 2\begin{pmatrix}\xi_1 & -{\eta_2}^*\\ \xi_2 & {\eta_1}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{\eta_1}^* & {\eta_2}^*\\ -\xi_2 & \xi_1\end{pmatrix}\\ &\quad = 2({\eta_1}^*\xi_1 + {\eta_2}^*\xi_2)\end{aligned} \tag{2-6}$$

On a donc :

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = \phi\widehat{\phi} = \det\phi \tag{2-7}$$

Et il en résulte que ϕ est inversible si et seulement si l'un des invariants Ω_1 ou Ω_2 n'est pas nul.

Pour le courant J, dont la composante de temps J^0 est la densité de probabilité de présence, on obtient :

$$\begin{aligned}J^0 &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2\\ &= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2\\ &\quad + {a_5}^2 + {a_6}^2 + {a_7}^2 + {a_8}^2\\ J^1 &= \psi_1{\psi^*}_4 + \psi_2{\psi^*}_3 + \psi_3{\psi^*}_2 + \psi_4{\psi^*}_1\\ &= 2(a_1a_2 + a_3a_5 - a_4a_7 - a_6a_8)\\ J^2 &= i(\psi_1{\psi^*}_4 - \psi_2{\psi^*}_3 + \psi_3{\psi^*}_2 - \psi_4{\psi^*}_1)\\ &= 2(a_1a_3 - a_2a_5 - a_4a_6 + a_7a_8)\\ J^3 &= \psi_1{\psi^*}_3 - \psi_2{\psi^*}_4 + \psi_3{\psi^*}_1 - \psi_4{\psi^*}_2\\ &= 2(a_1a_4 + a_2a_7 + a_3a_6 + a_5a_8)\end{aligned} \tag{2-8}$$

On notera que la densité de probablité de présence est donnée par la somme des carrés des composantes réelles de ϕ, donc le produit scalaire est naturellement euclidien ici et n'est pas naturellement hermitien.

Pour le tenseur antisymétrique S qui donne la densité de moment électrique et de moment magnétique on a :

$$\begin{aligned}
S^{12} =&|\psi_1|^2-|\psi_2|^2-|\psi_3|^2+|\psi_4|^2\\
=&{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2-{a_4}^2\\
&+{a_5}^2-{a_6}^2-{a_7}^2-{a_8}^2\\
S^{23} =&\psi_1{\psi^*}_2+\psi_2{\psi^*}_1-\psi_3{\psi^*}_4-\psi_4{\psi^*}_3\\
=&2(-a_1a_7-a_2a_4-a_3a_8-a_5a_6)\\
S^{31} =&i(\psi_1{\psi^*}_2-\psi_2{\psi^*}_1-\psi_3{\psi^*}_4+\psi_4{\psi^*}_3)\\
=&2(-a_1a_6+a_2a_8-a_3a_4+a_5a_7)\\
S^{03} =& i(-\psi_1{\psi^*}_3+\psi_2{\psi^*}_4+\psi_3{\psi^*}_1-\psi_4{\psi^*}_2\\
=& 2(-a_1a_8+a_2a_6-a_3a_7+a_4a_5)\\
S^{01} =& i(-\psi_1{\psi^*}_4-\psi_2{\psi^*}_3+\psi_3{\psi^*}_2+\psi_4{\psi^*}_1)\\
=& 2(-a_1a_3+a_2a_5-a_4a_6+a_7a_8)\\
S^{02} =& \psi_1{\psi^*}_4-\psi_2{\psi^*}_3-\psi_3{\psi^*}_2+\psi_4{\psi^*}_1)\\
=& 2(a_1a_2+a_3a_5+a_4a_7+a_6a_8)
\end{aligned}\tag{2-9}$$

Pour le vecteur K on obtient :

$$\begin{aligned}
K^0 =& \psi_1{\psi^*}_3+\psi_2{\psi^*}_4+\psi_3{\psi^*}_1+\psi_4{\psi^*}_2\\
=& 2(a_1a_4-a_2a_7-a_3a_6+a_5a_8)\\
K^1 =& \psi_1{\psi^*}_2+\psi_2{\psi^*}_1+\psi_3{\psi^*}_4+\psi_4{\psi^*}_3\\
=& 2(-a_1a_7+a_2a_4+a_3a_8-a_5a_6)\\
K^2 =& i(\psi_1{\psi^*}_2-\psi_2{\psi^*}_1+\psi_3{\psi^*}_4-\psi_4{\psi^*}_3)\\
=& 2(-a_1a_6-a_2a_8+a_3a_4+a_5a_7)\\
K^3 =& |\psi_1|^2-|\psi_2|^2+|\psi_3|^2-|\psi_4|^2\\
=& {a_1}^2-{a_2}^2-{a_3}^2+{a_4}^2\\
&+{a_5}^2-{a_6}^2-{a_7}^2+{a_8}^2
\end{aligned}\tag{2-10}$$

Avec les 4 fonctions à valeur complexe ψ_j on peut former 16 produits ${\psi^*}_j\psi_k$. Ces 16 produits ne sont pas directement les composantes des densités tensorielles de la théorie de Dirac, qui sont les 16 combinaisons linéaires rencontrées dans les formules (2-2) à (2-10). Elles semblent épuiser les possibilités de construire des tenseurs sans dérivée. Or si l'on utilise les 8 fonctions à valeur réelle a_k, on peut former 8 carrés ${a_k}^2$ et 28 produits a_ja_k, soit au total 36 grandeurs. Nous allons voir que ces 36 grandeurs donnent 36 combinaisons linéaires qui sont les composantes de tous les tenseurs possibles sans dérivée. En effet, par suite des formules (1-20) les tenseurs sans dérivée sont nécessairement de la forme $\overline{\phi}X\widehat{\phi}$ ou de la forme $\phi X\widehat{\phi}$, que l'on a déjà rencontrée en (2-7). On est donc amené à étudier les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
J &= \overline{\phi}\widehat{\phi}\\
K_{(j)} &= \overline{\phi\sigma_j}\widehat{\phi}\ \ ;\ \ j=1,\ 2,\ 3\\
R &= \phi\widehat{\phi}\\
S_{(j)} &= \phi\sigma_j\widehat{\phi}\ \ ;\ \ j=1,\ 2,\ 3
\end{aligned}\tag{2-11}$$

Les indices entre parenthèses ne correspondent pas à une composante de vecteur, mais au numéro du vecteur d'espace-temps ou du bivecteur d'espace-temps considéré, qui correspond au numéro d'une matrice de Pauli. Les densités tensorielles (2-1) correspondent à J, $K_{(3)}$, R et $S_{(3)}$, car on a :

$$\begin{aligned}
R =&\Omega_1+i\Omega_2\\
J =&J^0-\vec{J}\ ;\ \vec{J}=J^1\sigma_1+J^2\sigma_2+J^3\sigma_3\\
K_{(3)} =&K^0-\vec{K}\ ;\ \vec{K}=K^1\sigma_1+K^2\sigma_2+K^3\sigma_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{(3)} =&S^{23}\sigma_1+S^{31}\sigma_2+S^{12}\sigma_3\\
&+S^{10}i\sigma_1+S^{20}i\sigma_2+S^{30}i\sigma_3
\end{aligned}\tag{2-12}$$

Ces tenseurs sont ceux qui sont invariants sous une transformation de jauge électrique. En effet si l'on multiplie ψ par e^{ia}, ${\psi^*}_j\psi_k$ est invariant. Cette transformation de jauge électrique correspond, d'après (1-10), à la multiplication de ϕ par $e^{ai\sigma_3}$ à droite. Les tenseurs $\overline{\phi}X\widehat{\phi}$ et $\phi X\widehat{\phi}$ sont invariants de jauge électrique si X commute avec σ_3, donc si $X=1$ ou si $X=\sigma_3$. Mais si l'on juge que l'on a peu de raison de préférer l'une des matrices de Pauli par rapport aux autres, on n'oubliera pas les vecteurs $K_{(1)}$ et $K_{(2)}$, et les bivecteurs $S_{(1)}$ et $S_{(2)}$. Ces vecteurs et bivecteurs ne sont pas invariants de jauge électrique, la transformation de jauge effectue une rotation entre $K_{(1)}$ et $K_{(2)}$, et entre $S_{(1)}$ et $S_{(2)}$. Soit en effet :

$$\phi'=\phi e^{ai\sigma_3}\tag{2-13}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
K'_{(1)} &= \overline{\phi'\sigma_1}\widehat{\phi}'=\cos 2a\ K_{(1)}-\sin 2a\ K_{(2)}\\
K'_{(2)} &= \overline{\phi'\sigma_2}\widehat{\phi}'=\cos 2a\ K_{(2)}+\sin 2a\ K_{(1)}
\end{aligned}\tag{2-14}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
S'_{(1)} &= \phi'\sigma_1\widehat{\phi}'=\cos 2a\ S_{(1)}-\sin 2a\ S_{(2)}\\
S'_{(2)} &= \phi'\sigma_2\widehat{\phi}'=\cos 2a\ S_{(2)}+\sin 2a\ S_{(1)}
\end{aligned}\tag{2-15}$$

Examinons maintenant comment on peut écrire dans le formalisme des matrices de Dirac les densités tensorielles mises en évidence ici, et non invariantes de jauge. Pour $S_{(1)}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
{S_{(1)}}^{23} &= {a_1}^2-{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2\\
&\quad -{a_5}^2+{a_6}^2-{a_7}^2-{a_8}^2\\
&= \frac{1}{2}({\psi_1}^2+{{\psi^*}_1}^2-{\psi_2}^2-{{\psi^*}_2}^2\\
&\quad +{\psi_3}^2+{{\psi^*}_3}^2-{\psi_4}^2-{{\psi^*}_4}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(1)}{}^{12} &= 2(a_1a_7 - a_2a_4 + a_3a_8 - a_5a_6)\\ &= -\psi_1\psi_2 - \psi^*{}_1\psi^*{}_2 - \psi_3\psi_4 - \psi^*{}_3\psi^*{}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(1)}{}^{31} &= 2(- a_1a_5 - a_2a_3 - a_4a_8 - a_6a_7)\\ &= \frac{i}{2}(\psi_1{}^2 - \psi^*{}_1{}^2 + \psi_2{}^2 - \psi^*{}_2{}^2\\ &\quad + \psi_3{}^2 - \psi^*{}_3{}^2 + \psi_4{}^2 - \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(1)}{}^{10} &= 2(a_1a_8 + a_2a_6 + a_3a_7 + a_4a_5)\\ &= i(-\psi_1\psi_3 + \psi^*{}_1\psi^*{}_3 + \psi_2\psi_4 - \psi^*{}_2\psi^*{}_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(1)}{}^{20} &= 2(a_1a_4 - a_2a_7 + a_3a_6 - a_5a_8)\\ &= \psi_1\psi_3 + \psi^*{}_1\psi^*{}_3 + \psi_2\psi_4 + \psi^*{}_2\psi^*{}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(1)}{}^{30} &= 2(-a_1a_3 - a_2a_5 + a_4a_6 + a_7a_8)\\ &= i(\psi_1\psi_4 - \psi^*{}_1\psi^*{}_4 + \psi_2\psi_3 - \psi^*{}_2\psi^*{}_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(1)} =&S_{(1)}{}^{23}\sigma_1 + S_{(1)}{}^{31}\sigma_2 + S_{(1)}{}^{12}\sigma_3\\ &+ S_{(1)}{}^{10}i\sigma_1 + S_{(1)}{}^{20}i\sigma_2 + S_{(1)}{}^{30}i\sigma_3\end{aligned} \tag{2-16}$$

L'utilisation de produits du type $\psi_j\psi_k$ fait apparaître immédiatement le caractère non invariant de jauge électrique de ces tenseurs. Par contre le caractère tensoriel des $S_{(1)}{}^{\mu\nu}$ ne paraît pas directement évident dans le formalisme de Dirac. Avec les parties réelles et imaginaires des 4 $\psi_j{}^2$ et des 6 $\psi_j\psi_k$ on obtient $2(4{+}6) = 20$ quantités dont les combinaisons linéaires sont les $36 - 16 = 20$ composantes de tenseurs non utilisées dans le formalisme usuel. Outre les 6 composantes du bivecteur $S_{(1)}$ données plus haut, ces autres composantes sont les 6 composantes de $S_{(2)}$, les 4 composantes de $K_{(1)}$ et les 4 composantes de $K_{(2)}$:

$$\begin{aligned}S_{(2)} =&S_{(2)}{}^{23}\sigma_1 + S_{(2)}{}^{31}\sigma_2 + S_{(2)}{}^{12}\sigma_3\\ &+ S_{(2)}{}^{10}i\sigma_1 + S_{(2)}{}^{20}i\sigma_2 + S_{(2)}{}^{30}i\sigma_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(2)}{}^{23} &= 2(a_1a_5 - a_2a_3 + a_4a_8 - a_6a_7)\\ &= \frac{i}{2}(-\psi_1{}^2 + \psi^*{}_1{}^2 + \psi_2{}^2 - \psi^*{}_2{}^2\\ &\quad - \psi_3{}^2 + \psi^*{}_3{}^2 + \psi_4{}^2 - \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(2)}{}^{31} =&a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_3{}^2 + a_4{}^2\\ &- a_5{}^2 - a_6{}^2 + a_7{}^2 - a_8{}^2\\ =& \frac{1}{2}(\psi_1{}^2 + \psi^*{}_1{}^2 + \psi_2{}^2 + \psi^*{}_2{}^2\\ &+ \psi_3{}^2 + \psi^*{}_3{}^2 + \psi_4{}^2 + \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(2)}{}^{12} &= 2(a_1a_6 - a_2a_8 - a_3a_4 + a_5a_7)\\ &= i(\psi_1\psi_2 - \psi^*{}_1\psi^*{}_2 + \psi_3\psi_4 - \psi^*{}_3\psi^*{}_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(2)}{}^{10} &= 2(-a_1a_4 - a_2a_7 + a_3a_6 + a_5a_8)\\ &= -\psi_1\psi_3 - \psi^*{}_1\psi^*{}_3 + \psi_2\psi_4 + \psi^*{}_2\psi^*{}_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(2)}{}^{20} &= 2(a_1a_8 - a_2a_6 - a_3a_7 + a_4a_5)\\ &= i(-\psi_1\psi_3 + \psi^*{}_1\psi^*{}_3 - \psi_2\psi_4 + \psi^*{}_2\psi^*{}_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{(2)}{}^{30} &= 2(a_1a_2 - a_3a_5 - a_4a_7 + a_6a_8)\\ &= \psi_1\psi_4 + \psi^*{}_1\psi^*{}_4 + \psi_2\psi_3 + \psi^*{}_2\psi^*{}_3\end{aligned} \tag{2-17}$$

Pour le pseudo-vecteur d'espace-temps $K_{(1)}$ on obtient :

$$\begin{aligned}K_{(1)}{}^{0} &= 2(a_1a_2 - a_3a_5 + a_4a_7 - a_6a_8)\\ &= \psi_1\psi_4 + \psi^*{}_1\psi^*{}_4 - \psi_2\psi_3 - \psi^*{}_2\psi^*{}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{(1)}{}^{1} =&a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_3{}^2 - a_4{}^2\\ &- a_5{}^2 + a_6{}^2 - a_7{}^2 + a_8{}^2\\ =& \frac{1}{2}(\psi_1{}^2 + \psi^*{}_1{}^2 - \psi_2{}^2 - \psi^*{}_2{}^2\\ &- \psi_3{}^2 - \psi^*{}_3{}^2 + \psi_4{}^2 + \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{(1)}{}^{2} &= 2(- a_1a_5 + a_2a_3 + a_4a_8 - a_6a_7)\\ &= \frac{i}{2}(\psi_1{}^2 - \psi^*{}_1{}^2 + \psi_2{}^2 - \psi^*{}_2{}^2\\ &\quad - \psi_3{}^2 + \psi^*{}_3{}^2 - \psi_4{}^2 + \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{(1)}{}^{3} &= 2(a_1a_7 + a_2a_4 - a_3a_8 - a_5a_6)\\ &= -\psi_1\psi_2 - \psi^*{}_1\psi^*{}_2 + \psi_3\psi_4 + \psi^*{}_3\psi^*{}_4\end{aligned} \tag{2-18}$$

Et pour le pseudo-vecteur d'espace-temps $K_{(2)}$ on a :

$$\begin{aligned}K_{(2)}{}^{0} &= 2(a_1a_3 + a_2a_5 + a_4a_6 + a_7a_8)\\ &= i(-\psi_1\psi_4 + \psi^*{}_1\psi^*{}_4 + \psi_2\psi_3 - \psi^*{}_2\psi^*{}_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{(2)}{}^{1} &= 2(a_1a_5 + a_2a_3 - a_4a_8 - a_6a_7)\\ &= \frac{i}{2}(- \psi_1{}^2 + \psi^*{}_1{}^2 + \psi_2{}^2 - \psi^*{}_2{}^2\\ &\quad + \psi_3{}^2 - \psi^*{}_3{}^2 - \psi_4{}^2 + \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{(2)}{}^{2} =&a_1{}^2 - a_2{}^2 + a_3{}^2 - a_4{}^2\\ &- a_5{}^2 - a_6{}^2 + a_7{}^2 + a_8{}^2\\ =& \frac{1}{2}(\psi_1{}^2 + \psi^*{}_1{}^2 + \psi_2{}^2 + \psi^*{}_2{}^2\\ &- \psi_3{}^2 - \psi^*{}_3{}^2 - \psi_4{}^2 - \psi^*{}_4{}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{(2)}{}^{3} &= 2(a_1a_6 + a_2a_8 + a_3a_4 + a_5a_7)\\ &= i(\psi_1\psi_2 - \psi^*{}_1\psi^*{}_2 - \psi_3\psi_4 + \psi^*{}_3\psi^*{}_4)\end{aligned} \tag{2-19}$$

Pour vérifier le caractère tensoriel de ces grandeurs dans le formalisme de Dirac, on posera :

$$\tilde{\psi} = \psi^t\gamma_0\gamma_2 \;\;;\;\; \check{\psi} = \psi^t\gamma_1\gamma_3 \tag{2-20}$$

où $\psi^t = \psi^{*\dagger}$ est le transposé de ψ. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}\gamma^\mu\psi &= K_{(2)}{}^\mu - iK_{(1)}{}^\mu\\ \check{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi &= S_{(2)}{}^{\mu\nu} - iS_{(1)}{}^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2-21}$$

Sous une transformation de Lorentz qui change ψ en $\psi' = \Lambda\psi$ et telle que $\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ on a :

$$\gamma_0\gamma_2\Lambda^{-1} = \Lambda^t\gamma_0\gamma_2 \;\;;\;\; \gamma_1\gamma_3\Lambda^{-1} = \Lambda^t\gamma_1\gamma_3$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}' &= \tilde{\psi}\Lambda^{-1} \ ; \ \check{\psi}' = \check{\psi}\Lambda^{-1} \\ \tilde{\psi}'\gamma^\mu\psi' &= \tilde{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda\psi = a^\mu{}_\nu\tilde{\psi}\gamma^\nu\psi \\ \check{\psi}'\gamma^\mu\gamma^\nu\psi' &= \check{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu\Lambda\psi \\ &= a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\tau\check{\psi}\gamma^\rho\gamma^\tau\psi \end{aligned} \tag{2-22}$$

Et ceci assure le caractère tensoriel de $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $S_{(1)}$, $S_{(2)}$. Il faut maintenant remarquer que les tenseurs sans dérivée J, $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$ et R, $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, $S_{(3)}$ sont globalement invariants sous un groupe de transformations de jauge ayant exactement la structure $U(1)\times SU(2)$ de la théorie électro-faible. Ce groupe est engendré par i pour $U(1)$, et par $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$, pour le groupe $SU(2)$. Comme dans la théorie électro-faible, le générateur de $U(1)$ n'est pas le générateur de la jauge électrique, qui est ici $i\sigma_3$, et fait partie de $SU(2)$. Autre ressemblance avec la théorie électro-faible : les tenseurs ne sont pas séparément invariants, mais invariants dans leur ensemble car la jauge en $i\sigma_3$ fait tourner les couples ($K_{(1)}$; $K_{(2)}$) et ($S_{(1)}$; $S_{(2)}$), et, de même, avec des formules analogues à (2-13) (2-14) et (2-15), dans lesquelles on effectue une permutation circulaire des indices entre parenthèses, la jauge en $i\sigma_1$ fait tourner les couples ($K_{(2)}$; $K_{(3)}$) et ($S_{(2)}$; $S_{(3)}$), et la jauge en $i\sigma_2$ fait tourner les couples ($K_{(3)}$; $K_{(1)}$) et ($S_{(3)}$; $S_{(1)}$). Seuls R et J sont invariants dans ces tranformations du groupe $SU(2)$. Quant à la jauge en i, qui n'est pas ici la jauge électrique, mais qui est la jauge chirale utilisée par G. Lochak dans sa théorie du monopôle [5], elle laisse invariants les tenseurs J et $K_{(j)}$ et fait tourner les tenseurs R et $S_{(j)}$ sur eux-mêmes, car si l'on pose :

$$\phi' = \phi e^{ai} = e^{ai}\phi \tag{2-23}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}' &= \overline{\phi}e^{-ai} \ ; \ \widehat{\phi}' = e^{ai}\widehat{\phi} \\ J' &= \overline{\phi}'\widehat{\phi}' = \overline{\phi}\widehat{\phi} = J \\ K'_j &= \overline{\phi'\sigma_j}\widehat{\phi}' = \overline{\phi\sigma_j}\widehat{\phi} = K_j \\ R' &= \phi'\widehat{\phi}' = e^{2ai}\phi\widehat{\phi} \end{aligned} \tag{2-24}$$

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= \cos 2a\ \Omega_1 - \sin 2a\ \Omega_2 \\ \Omega'_2 &= \sin 2a\ \Omega_1 + \cos 2a\ \Omega_2 \end{aligned} \tag{2-25}$$

Comme le champ électromagnétique F, les bivecteurs $S_{(j)}$ sont somme d'un vecteur $\vec{M}_{(j)}$ et d'un pseudo-vecteur $\vec{N}_{(j)}$, et s'écrivent :

$$S_{(j)} = \vec{M}_{(j)} + i\vec{N}_{(j)} \tag{2-26}$$

Et l'on a, sous la transformation de jauge (2-23) :

$$\begin{aligned} S'_{(j)} &= \phi'\sigma_j\widehat{\phi}' = e^{2ai}\phi\sigma_j\widehat{\phi} = e^{2ai}S_{(j)} \\ \vec{M}'_j &= \cos 2a\ \vec{M}_j - \sin 2a\ \vec{N}_j \\ \vec{N}'_j &= \sin 2a\ \vec{M}_j + \cos 2a\ \vec{N}_j \end{aligned} \tag{2-27}$$

Donc la transformation de jauge (2-23) correspond à une rotation entre les deux vecteurs d'un même bivecteur.

L'étude des tenseurs sans dérivée montre donc qu'un groupe d'invariance de jauge ayant la structure $U(1)\times SU(2)$ est naturellement inscrit dans la structure des tenseurs de l'onde de Dirac. On va voir maintenant qu'il en est de même pour les tenseurs avec dérivées du premier ordre.

3 - Tenseurs avec dérivées du premier ordre

On suivra ici la nomenclature utilisée par O. Costa de Beauregard [6]. Les tenseurs avec dérivées du premier ordre précédemment étudiés sont : le tenseur d'impulsion-énergie de Tetrode T^{ij}, la densité de spin de Durand $\tau^{i[jk]}$, la densité de courant-charge de Gordon k^i, la densité de courant-charge magnétique l^i, le tenseur "énigmatique" $v^{i[jkl]}$, tels que, en signature $+\ -\ -\ -$:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{i}{2}\psi^*[\partial^i]\gamma^j\psi \ ; \ [\partial^i] = \underset{\rightarrow}{\partial_i} - \underset{\leftarrow}{\partial_i} \\ \tau^{i[jk]} &= \frac{1}{2}\psi^*[\partial^i]\gamma^{jk}\psi \ ; \ \gamma^{jk} = \gamma^j\gamma^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^i &= \frac{i}{2}\psi^*[\partial^i]\psi \\ l^i &= \frac{1}{2}\psi^*[\partial^i]\gamma_5\psi \\ v^{i[jkl]} &= -\frac{1}{2}\psi^*[\partial^i]\gamma^{jkl}\psi \end{aligned} \tag{3-1}$$

Le calcul détaillé de ces tenseurs à l'aide des matrices de Dirac (1-2) et des a_k définis en (1-5) donne pour l'impulsion-énergie :

$$\begin{aligned} T^{j0} &= -a_1\partial^j a_5 - a_2\partial^j a_3 + a_3\partial^j a_2 - a_4\partial^j a_8 \\ &\quad + a_5\partial^j a_1 + a_6\partial^j a_7 - a_7\partial^j a_6 + a_8\partial^j a_4 \\ T^{j1} &= -a_1\partial^j a_3 - a_2\partial^j a_5 + a_3\partial^j a_1 + a_4\partial^j a_6 \\ &\quad + a_5\partial^j a_2 - a_6\partial^j a_4 + a_7\partial^j a_8 - a_8\partial^j a_7 \\ T^{j2} &= a_1\partial^j a_2 - a_2\partial^j a_1 - a_3\partial^j a_5 - a_4\partial^j a_7 \\ &\quad + a_5\partial^j a_3 + a_6\partial^j a_8 + a_7\partial^j a_4 - a_8\partial^j a_6 \\ T^{j3} &= -a_1\partial^j a_8 - a_2\partial^j a_6 + a_3\partial^j a_7 - a_4\partial^j a_5 \\ &\quad + a_5\partial^j a_4 + a_6\partial^j a_2 - a_7\partial^j a_3 + a_8\partial^j a_1 \end{aligned} \tag{3-2}$$

Pour le courant de Gordon on a :

$$\begin{aligned} k^j &= -a_1\partial^j a_5 + a_2\partial^j a_3 - a_3\partial^j a_2 + a_4\partial^j a_8 \\ &\quad + a_5\partial^j a_1 + a_6\partial^j a_7 - a_7\partial^j a_6 - a_8\partial^j a_4 \end{aligned} \tag{3-3}$$

Pour le courant-charge magnétique on obtient :

$$\begin{aligned} l^j &= a_1\partial^j a_4 + a_2\partial^j a_7 + a_3\partial^j a_6 - a_4\partial^j a_1 \\ &\quad + a_5\partial^j a_8 - a_6\partial^j a_3 - a_7\partial^j a_2 - a_8\partial^j a_5 \end{aligned} \tag{3-4}$$

La densité de spin de Durand donne :

$$\begin{aligned}
\tau^{j[01]} &= a_1\partial^j a_2 - a_2\partial^j a_1 - a_3\partial^j a_5 + a_4\partial^j a_7 \\
&\quad + a_5\partial^j a_3 - a_6\partial^j a_8 - a_7\partial^j a_4 + a_8\partial^j a_6 \\
\tau^{j[02]} &= a_1\partial^j a_3 + a_2\partial^j a_5 - a_3\partial^j a_1 + a_4\partial^j a_6 \\
&\quad - a_5\partial^j a_2 - a_6\partial^j a_4 + a_7\partial^j a_8 - a_8\partial^j a_7 \\
\tau^{j[03]} &= a_1\partial^j a_4 - a_2\partial^j a_7 - a_3\partial^j a_6 - a_4\partial^j a_1 \\
&\quad + a_5\partial^j a_8 + a_6\partial^j a_3 + a_7\partial^j a_2 - a_8\partial^j a_5 \\
\\
\tau^{j[12]} &= a_1\partial^j a_5 + a_2\partial^j a_3 - a_3\partial^j a_2 - a_4\partial^j a_8 \\
&\quad - a_5\partial^j a_1 + a_6\partial^j a_7 - a_7\partial^j a_6 + a_8\partial^j a_4 \\
\tau^{j[23]} &= -a_1\partial^j a_6 - a_2\partial^j a_8 + a_3\partial^j a_4 - a_4\partial^j a_3 \\
&\quad + a_5\partial^j a_7 + a_6\partial^j a_1 - a_7\partial^j a_5 + a_8\partial^j a_2 \\
\tau^{j[31]} &= a_1\partial^j a_7 - a_2\partial^j a_4 - a_3\partial^j a_8 + a_4\partial^j a_2 \\
&\quad + a_5\partial^j a_6 - a_6\partial^j a_5 - a_7\partial^j a_1 + a_8\partial^j a_3
\end{aligned} \tag{3-5}$$

Pour le tenseur ininterprété v, on a :

$$\begin{aligned}
v^{j[012]} &= -a_1\partial^j a_5 + a_2\partial^j a_3 - a_3\partial^j a_2 - a_4\partial^j a_8 \\
&\quad + a_5\partial^j a_1 - a_6\partial^j a_7 + a_7\partial^j a_6 + a_8\partial^j a_4 \\
v^{j[023]} &= a_1\partial^j a_6 - a_2\partial^j a_8 + a_3\partial^j a_4 - a_4\partial^j a_3 \\
&\quad - a_5\partial^j a_7 - a_6\partial^j a_1 + a_7\partial^j a_5 + a_8\partial^j a_2 \\
\\
v^{j[031]} &= -a_1\partial^j a_7 - a_2\partial^j a_4 - a_3\partial^j a_8 + a_4\partial^j a_2 \\
&\quad - a_5\partial^j a_6 + a_6\partial^j a_5 + a_7\partial^j a_1 + a_8\partial^j a_3 \\
v^{j[123]} &= -a_1\partial^j a_8 + a_2\partial^j a_6 - a_3\partial^j a_7 - a_4\partial^j a_5 \\
&\quad + a_5\partial^j a_4 - a_6\partial^j a_2 + a_7\partial^j a_3 + a_8\partial^j a_1
\end{aligned} \tag{3-6}$$

Comme les tenseurs sans dérivée sont de la forme $\overline{\phi}X\widehat{\phi}$ et $\phi X\widehat{\phi}$ en algèbre d'espace, on obtiendra les tenseurs avec dérivées du premier ordre sous la forme suivante :

$$Y = \frac{1}{2}(\dot{\nabla}\dot{\phi}X\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi X\dot{\widehat{\phi}}) \quad ; \quad Z = \frac{1}{2}(\overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\dot{\phi}}X\widehat{\phi} - \overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\phi}X\dot{\widehat{\phi}}) \tag{3-7}$$

où les points indiquent ce sur quoi portent les dérivations. Ces tenseurs sont invariants sous le groupe de Lorentz, car sous la rotation définie en (1-19) on a :

$$\begin{aligned}
Y' &= \frac{1}{2}(\dot{\nabla}'\dot{\phi}'X\widehat{\phi}' - \dot{\nabla}'\phi'X\dot{\widehat{\phi}}') \\
&= \overline{M}\frac{1}{2}(\dot{\nabla}\dot{\phi}X\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi X\dot{\widehat{\phi}})M^{-1} = \overline{M}YM^{-1} \\
Z' &= \frac{1}{2}(\overline{\dot{\nabla}}'\overline{\dot{\phi}}'X\widehat{\phi}' - \overline{\dot{\nabla}}'\overline{\phi}'X\dot{\widehat{\phi}}') \\
&= M\frac{1}{2}\overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\dot{\phi}}X\widehat{\phi} - \overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\phi}X\dot{\widehat{\phi}})M^{-1} = MZM^{-1}
\end{aligned} \tag{3-8}$$

Les tenseurs du type Y se transforment donc comme des vecteurs d'espace-temps, et les tenseurs du type Z comme des bivecteurs. Ces tenseurs sont invariants de jauge électrique si X commute avec le générateur $i\sigma_3$ de la jauge électrique. Ce sont :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2}(\dot{\nabla}\dot{\phi}\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi\dot{\widehat{\phi}}) \\
l_{(3)} - ik_{(3)} &= \frac{1}{2}(\dot{\nabla}\dot{\phi}\sigma_3\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi\sigma_3\dot{\widehat{\phi}}) \\
v &= \frac{1}{2}(\overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\dot{\phi}}\widehat{\phi} - \overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\phi}\dot{\widehat{\phi}}) \\
T_{(3)} &= \frac{1}{2}(\overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\dot{\phi}}\sigma_3\widehat{\phi} - \overline{\dot{\nabla}}\,\overline{\phi}\sigma_3\dot{\widehat{\phi}})
\end{aligned} \tag{3-9}$$

Le tenseur τ, lié à la densité de spin de Durand, est somme d'un scalaire invariant, d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire, car on obtient :

$$\begin{aligned}
\tau =& {\tau_1}^{[01]} + {\tau_2}^{[02]} + {\tau_3}^{[03]} \\
&+ ({\tau_0}^{[01]} + {\tau_2}^{[21]} + {\tau_3}^{[31]})\sigma_1 \\
&+ ({\tau_0}^{[02]} + {\tau_1}^{[12]} + {\tau_3}^{[32]})\sigma_2 \\
&+ ({\tau_0}^{[03]} + {\tau_1}^{[13]} + {\tau_2}^{[23]})\sigma_3 \\
&+ ({\tau_0}^{[23]} + {\tau_2}^{[03]} + {\tau_3}^{[20]})i\sigma_1 \\
&+ ({\tau_0}^{[31]} + {\tau_3}^{[01]} + {\tau_1}^{[30]})i\sigma_2 \\
&+ ({\tau_0}^{[12]} + {\tau_1}^{[02]} + {\tau_2}^{[10]})i\sigma_3 \\
&+ ({\tau_1}^{[23]} + {\tau_2}^{[31]} + {\tau_3}^{[12]})i
\end{aligned} \tag{3-10}$$

Les vecteurs d'espace-temps $l_{(3)}$ et $k_{(3)}$ sont le vecteur densité de courant-charge magnétique et le courant de Gordon, car on a :

$$\begin{aligned}
l_{(3)} &= l^0 - l^1\sigma_1 - l^2\sigma_2 - l^3\sigma_3 \\
k_{(3)} &= k^0 - k^1\sigma_1 - k^2\sigma_2 - k^3\sigma_3
\end{aligned} \tag{3-11}$$

Le tenseur v est lié au tenseur ininterprété de O. Costa de Beauregard, et le tenseur $T_{(3)}$ est lié au tenseur d'impulsion-énergie, car on a :

$$\begin{aligned}
T_{(3)} =& (T^{32} - T^{23})\sigma_1 + (T^{13} - T^{31})\sigma_2 \\
&+ (T^{21} - T^{12})\sigma_3 + (T^{01} - T^{10})i\sigma_1 \\
&+ (T^{02} - T^{20})i\sigma_2 + (T^{03} - T^{30})i\sigma_3 \\
&+ (-T^{00} + T^{11} + T^{22} + T^{33})i
\end{aligned} \tag{3-12}$$

$$\begin{aligned}
v =& ({v_2}^{[021]} + {v_3}^{[031]})\sigma_1 + ({v_3}^{[032]} + {v_1}^{[012]})\sigma_2 \\
&+ ({v_1}^{[013]} + {v_2}^{[023]})\sigma_3 - ({v_0}^{[023]} + {v_1}^{[123]})i\sigma_1 \\
&- ({v_0}^{[031]} + {v_2}^{[123]})i\sigma_2 - ({v_0}^{[012]} + {v_3}^{[123]})i\sigma_3 \\
&+ ({v_0}^{[123]} + {v_1}^{[023]} + {v_2}^{[031]} + {v_3}^{[012]})i
\end{aligned} \tag{3-13}$$

On obtiendra des tenseurs non invariants de jauge électrique en posant :

$$\begin{aligned}
l_{(j)} - ik_{(j)} &= \frac{1}{2}(\dot{\nabla}\dot{\phi}\sigma_j\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi\sigma_j\dot{\widehat{\phi}}) \\
T_{(j)} &= \frac{1}{2}(\overline{\dot{\nabla}}\ \overline{\dot{\phi}}\sigma_j\widehat{\phi} - \overline{\dot{\nabla}}\ \overline{\phi}\sigma_j\dot{\widehat{\phi}}) \quad ; \quad j = 1,\ 2.
\end{aligned} \tag{3-14}$$

Les tenseurs avec dérivées du premier ordre, que nous venons de décrire, sont ceux qui donnent la dynamique des tenseurs sans dérivée. En effet on a :

$$\nabla\phi = -m\overline{\phi}i\sigma_3 - qA\phi i\sigma_3 \tag{3-15}$$

$$\overline{\nabla\phi} = -m\phi i\sigma_3 - q\overline{A\phi}i\sigma_3 \tag{3-16}$$

ce qui donne :

$$(\nabla\phi)X\widehat{\phi} = -im\overline{\phi}\sigma_3 X\widehat{\phi} - iqA\phi\sigma_3 X\widehat{\phi} \tag{3-17}$$

Mais on a par ailleurs :

$$(\nabla\phi)X\widehat{\phi} = \frac{1}{2}\nabla(\phi X\widehat{\phi}) + \frac{1}{2}(\dot{\nabla}\dot{\phi}X\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi X\dot{\widehat{\phi}}) \tag{3-18}$$

où les points indiquent ce sur quoi portent les dérivations. On obtient :

$$\begin{aligned}\nabla(\phi X\widehat{\phi}) = {} & 2(-im\overline{\phi}\sigma_3 X\widehat{\phi} - iqA\phi\sigma_3 X\widehat{\phi}) \\ & - (\dot{\nabla}\dot{\phi}X\widehat{\phi} - \dot{\nabla}\phi X\dot{\widehat{\phi}})\end{aligned} \tag{3-19}$$

En particulier on obtient, si $X = 1$:

$$\nabla(\Omega_1 + i\Omega_2) = 2imK_{(3)} - 2iqAS_{(3)} - 2\tau \tag{3-20}$$

tandis que pour $X = \sigma_3$, on obtient :

$$\nabla S_{(3)} = -2imJ - 2iqA(\Omega_1 + i\Omega_2) - 2(l_{(3)} - ik_{(3)}) \tag{3-21}$$

On peut, dans cette dernière égalité, séparer le courant-charge magnétique $l_{(3)}$ du courant de Gordon, en utilisant la conjugaison †, qui donne :

$$S_{(3)}{}^{\dagger}\nabla = 2imJ + 2iqA(\Omega_1 - i\Omega_2) - 2(l_{(3)} + ik_{(3)})$$

$$\frac{1}{4}(\nabla S_{(3)} + S_{(3)}{}^{\dagger}\nabla) = \Omega_2 qA - l_{(3)} \tag{3-22}$$

$$\frac{i}{4}(\nabla S_{(3)} - S_{(3)}{}^{\dagger}\nabla) = mJ + \Omega_1 qA - k_{(3)} \tag{3-23}$$

Cette dernière relation nous donne la "décomposition de Gordon" du courant J :

$$J = \frac{i}{4m}(\nabla S_{(3)} - S_{(3)}{}^{\dagger}\nabla) - \frac{q}{m}\Omega_1 A + \frac{1}{m}k_{(3)}$$

Pour les autres tenseurs, au lieu de (3-19) on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}(\overline{\phi}X\widehat{\phi}) = {} & 2(-im\phi\sigma_3 X\widehat{\phi} - iq\overline{A\phi}\sigma_3 X\widehat{\phi}) \\ & - (\dot{\overline{\nabla}}\,\dot{\overline{\phi}}X\widehat{\phi} - \dot{\overline{\nabla}}\,\overline{\phi}X\dot{\widehat{\phi}})\end{aligned} \tag{3-25}$$

En particulier, si $X = 1$, on obtient :

$$\overline{\nabla}J = -2imS_{(3)} + 2iq\overline{A}K_{(3)} - 2v \tag{3-26}$$

Dans cette égalité, nous pouvons séparer les parties scalaires, bivectorielles et pseudo-scalaires en utilisant la conjugaison $\widehat{\ }$:

$$\overline{J}\nabla = 2imS_{(3)} + 2iq\overline{K_{(3)}}A - 2\widehat{v} \tag{3-27}$$

On ajoute et on retranche ces deux dernières relations, et l'on utilise le produit scalaire et le produit extérieur :

$$A\cdot K_{(3)} = \frac{1}{2}(\overline{A}K_{(3)} + \overline{K_{(3)}}A) \tag{3-28}$$

$$A\wedge K_{(3)} = \frac{1}{2}(\overline{A}K_{(3)} - \overline{K_{(3)}}A) \tag{3-29}$$

Avec l'opérateur ∇ on a :

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^\mu = \nabla\cdot J &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}J + \overline{J}\nabla) \\ \nabla\wedge J &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}J - \overline{J}\nabla)\end{aligned} \tag{3-30}$$

Et l'on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla\cdot J &= 2iqA\cdot K_{(3)} - (v + \widehat{v}) \\ \nabla\wedge J &= -2imS_{(3)} + 2iqA\wedge K_{(3)} - (v - \widehat{v})\end{aligned} \tag{3-31}$$

D'après (3-13) le tenseur v est somme d'un bivecteur qu'on notera v_b et d'un pseudoscalaire qu'on notera iv_p, ce qui donne :

$$\begin{aligned} v = v_b + iv_p \quad &; \quad \widehat{v} = -v_b + iv_p \\ v + \widehat{v} = 2iv_p \quad &; \quad v - \widehat{v} = 2v_b\end{aligned} \tag{3-32}$$

Les égalités (3-31) deviennent :

$$\nabla\cdot J = 2iqA\cdot K_{(3)} - 2iv_p \tag{3-33}$$

$$\nabla\wedge J = -2imS_{(3)} + 2iqA\wedge K_{(3)} - 2v_b \tag{3-34}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de (3-33), on obtient :

$$\nabla\cdot J = 0 \tag{3-35}$$

$$v_p = qA\cdot K_{(3)} \tag{3-36}$$

L'égalité (3-35) indique que le courant J est conservatif.

Si l'on reprend maintenant (3-25) pour $X = \sigma_3$, on obtient :

$$\overline{\nabla}K_{(3)} = 2im(\Omega_1 + i\Omega_2) + 2iq\overline{A}J + 2T_{(3)} \tag{3-37}$$

Puis on obtient, en utilisant la conjugaison $\widehat{\ }$:

$$\overline{K_{(3)}}\nabla = 2im(\Omega_1 + i\Omega_2) + 2iq\overline{J}A + 2\widehat{T_{(3)}}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}K_{(3)} + \overline{K_{(3)}}\nabla = {} & 4im(\Omega_1 + i\Omega_2) + 2iq(\overline{A}J + \overline{J}A) \\ & + 2(T_{(3)} + \widehat{T_{(3)}})\end{aligned} \tag{3-38}$$

$$\overline{\nabla}K_{(3)} - \overline{K_{(3)}}\nabla = 2iq(\overline{A}J - \overline{J}A) + 2(T_{(3)} - \widehat{T_{(3)}}) \tag{3-39}$$

Le tenseur $T_{(3)}$ est, comme le tenseur v, somme d'un bivecteur et d'un pseudo-scalaire, que l'on notera respectivement T_{3b} et T_{3p}. Donc en séparant les parties réelles et les parties imaginaires on obtient pour (3-38)

$$\nabla \cdot K_{(3)} = -2m\Omega_2 \tag{3-40}$$

$$0 = m\Omega_1 + qA \cdot J + T_{3p} \tag{3-41}$$

La première de ces deux égalités est due à Uhlenbeck et Laporte. Quant à l'égalité (3-39), elle donne :

$$\nabla \wedge K_{(3)} = 2iqA \wedge J + 2T_{3b} \tag{3-42}$$

Les tenseurs que nous venons d'étudier ne sont pas les seuls que l'on peut construire en théorie de Dirac, car si l'on étudie la dynamique des tenseurs sans dérivée on doit introduire les tenseurs comportant des dérivées du premier ordre. Si l'on veut obtenir la dynamique des tenseurs comportant des dérivées du premier ordre on doit introduire des tenseurs comportant des dérivées du second ordre, et ainsi de suite. En outre, ont aussi le caractère de tenseurs les dérivées des tenseurs sans dérivée, à savoir $\nabla(\Omega_1 + i\Omega_2)$, $\nabla S_{(j)}$, $\overline{\nabla} J$ et $\overline{\nabla} K_{(j)}$. Et en dérivant à nouveau, on obtient les tenseurs : $\Box(\Omega_1 + i\Omega_2)$, $\Box J$, $\Box K_{(j)}$, $\Box S_{(j)}$, etc. Par suite du caractère non commutatif de l'algèbre des matrices de Dirac, ou de Pauli, il apparaît ainsi une infinité de tenseurs suivant les ordres de dérivation.

Nous allons maintenant examiner ce que deviennent ces tenseurs dans le cas le plus simple, qui est celui des ondes planes en l'absence de champs extérieurs.

4 - Cas des ondes planes

Dans le cas où les potentiels extérieurs sont négligeables, considérons une onde plane de la forme :

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \cos\varphi + c_1 \sin\varphi \ldots \\ a_8 &= b_8 \cos\varphi + c_8 \sin\varphi \\ \varphi &= \frac{E}{\hbar c}x^0 - \frac{1}{\hbar}(p^1x^1 + p^2x^2 + p^3x^3) \\ E' &= \frac{E}{\hbar c} \ ; \ \vec{p}\,' = \frac{1}{\hbar}\vec{p} \end{aligned} \tag{4-1}$$

où les b_j et les c_j sont des réels fixes. On peut alors écrire :

$$\phi = \cos\varphi B + \sin\varphi C i_3 \ ; \quad i_3 = -i\sigma_3 \tag{4-2}$$

$$\begin{aligned} B =& b_1 + b_2\sigma_1 + b_3\sigma_2 + b_4\sigma_3 \\ &+ b_5\sigma_1\sigma_2 + b_6\sigma_3\sigma_2 + b_7\sigma_3\sigma_1 + b_8 i \\ Ci_3 =& c_1 + c_2\sigma_1 + c_3\sigma_2 + c_4\sigma_3 \\ &+ c_5\sigma_1\sigma_2 + c_6\sigma_3\sigma_2 + c_7\sigma_3\sigma_1 + c_8 i \end{aligned} \tag{4-3}$$

où B et C sont fixes. On a :

$$\hbar\vec{\partial}\varphi = -\vec{p} \ ; \quad \vec{p} = \sigma_1 p^1 + \sigma_2 p^2 + \sigma_3 p^3 \tag{4-4}$$

Sous la forme (1-16), l'équation de Dirac devient, en l'absence de potentiels extérieurs :

$$\nabla\phi i\sigma_3 = m\overline{\phi} \tag{4-5}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} 0 = &(E' - \vec{p}\,')(-\sin\varphi B + \cos\varphi C i_3)i_3 \\ &+ m(\cos\varphi\overline{B} + \sin\varphi\overline{C}i_3) \end{aligned} \tag{4-6}$$

Par suite de l'indépendance linéaire des fonctions sin et cos, cette équation équivaut au système suivant :

$$(E' - \vec{p}\,')B = m\overline{C} \quad ; \quad (E' - \vec{p}\,')C = m\overline{B} \tag{4-7}$$

Ce système équivaut, en conjuguant, à :

$$(E' + \vec{p}\,')\overline{B} = mC \quad ; \quad (E' + \vec{p}\,')\overline{C} = mB \tag{4-8}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} m^2B &= m(E' + \vec{p}\,')\overline{C} = (E' + \vec{p}\,')m\overline{C} \\ &= (E' + \vec{p}\,')(E' - \vec{p}\,')B \\ &= (E'^2 - \vec{p}\,'^2)B \\ m^2C &= m(E' + \vec{p}\,')\overline{B} = (E' + \vec{p}\,')m\overline{B} \\ &= (E' + \vec{p}\,')(E' - \vec{p}\,')C \\ &= (E'^2 - \vec{p}\,'^2)C \end{aligned} \tag{4-9}$$

Il n'y a donc de solution non nulle que si

$$E'^2 = m^2 + \vec{p}\,'^2 \tag{4-10}$$

On prendra ici seulement la solution positive :

$$E' = \sqrt{m^2 + \vec{p}\,'^2} \ ; \ E = \sqrt{m_0{}^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}} \tag{4-11}$$

qui a l'avantage de conserver la relation $E = mc^2$, et dont on verra qu'elle suffit à obtenir toutes les ondes planes dont on peut avoir besoin. Avec l'énergie positive (4-11), le système (4-7) se réduit à :

$$C = (\epsilon + \vec{\pi}\,)\overline{B} \ ; \ \vec{\pi} = \frac{1}{m_0c}\vec{p}$$

$$\epsilon = \frac{E}{m_0c^2} = \sqrt{1 + \vec{\pi}^{\,2}} \tag{4-12}$$

La solution ainsi obtenue, à savoir :

$$\phi = \cos\varphi\ B + \sin\varphi\ \overline{\mathcal{E}B}i_3 \ ; \ \mathcal{E} = \epsilon - \vec{\pi} \tag{4-13}$$

dépend de 8 constantes arbitraires, et est la solution en ondes planes générale, car le changement de ϵ en $-\epsilon$ et de $\vec{\pi}$ en $-\vec{\pi}$ change la phase φ de signe et laisse inchangé ϕ. On utilisera dans la suite les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= B\widehat{B} = \underline{\Omega}_1 + i\underline{\Omega}_2 \\ \underline{J} &= \overline{B}\widehat{B} = \underline{J}_0 - \underline{\vec{J}} \\ \underline{K}_{(j)} &= -\overline{B}\sigma_{(j)}\widehat{B} = \underline{K}_{(j)}{}^0 - \underline{\vec{K}}_{(j)} \\ \underline{S}_{(j)} &= B\sigma_{(j)}\widehat{B} = \underline{\vec{M}}_{(j)} + i\underline{\vec{N}}_{(j)} \end{aligned} \tag{4-14}$$

Ces grandeurs soulignées sont fixes, puisque B est un élément fixe de l'algèbre d'espace. (4-13) entraîne :

$$\begin{aligned} \overline{\phi} &= \cos\varphi\ \overline{B} + \sin\varphi\ \mathcal{E}Bi_3 \\ \widehat{\phi} &= \cos\varphi\ \widehat{B} - \sin\varphi\ i_3B^\dagger\mathcal{E} \end{aligned} \tag{4-15}$$

Calculons tout d'abord les tenseurs sans dérivée. On a :

$$\begin{aligned} R = \phi\widehat{\phi} &= (\cos\varphi\ B + \sin\varphi\ \overline{\mathcal{E}B}i_3) \\ &\times (\cos\varphi\ \widehat{B} - \sin\varphi\ i_3B^\dagger\mathcal{E}) \end{aligned} \tag{4-16}$$

$$\begin{aligned} 2R = &(1+\cos 2\varphi)B\widehat{B} \\ &+ i\sin 2\varphi\ (B\sigma_3B^\dagger\mathcal{E} - \overline{\mathcal{E}B}\sigma_3\widehat{B}) \\ &+ (1-\cos 2\varphi)\overline{\mathcal{E}B}B^\dagger\mathcal{E} \end{aligned} \tag{4-17}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 2(\Omega_1 + i\Omega_2) = &(1+\cos 2\varphi)(\underline{\Omega}_1 + i\underline{\Omega}_2) \\ &+ i\sin 2\varphi\ (\overline{\underline{K}_{(3)}}\mathcal{E} + \overline{\mathcal{E}}\underline{K}_{(3)}) \\ &+ (1-\cos 2\varphi)\overline{\mathcal{E}}(\Omega_1 - i\Omega_2)\mathcal{E} \end{aligned} \tag{4-18}$$

Et comme $\overline{\mathcal{E}}\mathcal{E} = 1$, on obtient :

$$(\Omega_1 + i\Omega_2) = \underline{\Omega}_1 + i\sin 2\varphi\ \underline{K}_{(3)}\cdot\mathcal{E} + i\cos 2\varphi\ \underline{\Omega}_2 \tag{4-19}$$

soit finalement :

$$\Omega_1 = \underline{\Omega}_1 \tag{4-20}$$

$$\Omega_2 = \sin 2\varphi\ \underline{K}_{(3)}\cdot\mathcal{E} + \cos 2\varphi\ \underline{\Omega}_2 \tag{4-21}$$

Seul le scalaire Ω_1 est fixe. Le pseudo-scalaire Ω_2 oscille avec la phase 2φ. Mais comme la phase contient un facteur t, et comme la valeur moyenne d'un sin ou d'un cos est nulle, alors la valeur moyenne dans le temps de Ω_2 est nulle. La présence de la phase 2φ dans les tenseurs est interprétée habituellement comme un phénomène de battement entre ondes à énergie positive et ondes à énergie négative. En effet on peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} &B = B_1 + B_2 \\ &B_1 = \frac{1}{2}(B + \overline{\mathcal{E}B})\ \ ;\ \ B_2 = \frac{1}{2}(B - \overline{\mathcal{E}B}) \end{aligned} \tag{4-22}$$

Et ceci donne :

$$\mathcal{E}\ \overline{B_1} = B_1\ \ ;\ \ \mathcal{E}\ \overline{B_2} = B_2 \tag{4-23}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \cos\varphi\ B + \sin\varphi\ \overline{\mathcal{E}B}i_3 \\ &= \cos\varphi\ (B_1 + B_2) + \sin\varphi\ (B_1 - B_2)i_3 \\ &= B_1e^{\varphi i_3} + B_2e^{-\varphi i_3} \end{aligned} \tag{4-24}$$

Ceci signifie que l'onde plane de (4-13), qu'on appellera ici onde plane générale, est somme de l'onde plane usuelle à énergie positive E et impulsion $\vec{p}$ et de l'onde plane à énergie négative $-E$ et d'impulsion $-\vec{p}$. Le battement entre ces deux ondes est présent dans tous les tenseurs sans dérivée. Ainsi le calcul du courant J donne :

$$\begin{aligned} J = &(\mathcal{E}\cdot\underline{J})\mathcal{E} + \cos 2\varphi\ [\underline{J} - (\mathcal{E}\cdot\underline{J})\mathcal{E}] \\ &- \frac{i}{2}\sin 2\varphi\ (\mathcal{E}\overline{\underline{S}_{(3)}} + \underline{S}_{(3)}\mathcal{E}) \end{aligned} \tag{4-25}$$

Si l'onde plane n'est pas identiquement nulle et si la vitesse est inférieure à c le terme $\mathcal{E}\cdot\underline{J}$ est strictement positif. La densité de probabilité de présence est, en moyenne temporelle :

$$\rho = (\mathcal{E}\cdot\underline{J})\epsilon \tag{4-26}$$

Le courant de probabilité moyen est :

$$\vec{j} = c(\mathcal{E}\cdot\underline{J})\vec{\pi} = \frac{c\rho}{\epsilon}\vec{\pi} = \rho\vec{v} \tag{4-28}$$

Donc, en moyenne temporelle, la vitesse de la probabilité, dans l'onde plane générale, est égale à la vitesse de l'électron-corpuscule. Ce résultat a d'abord été obtenu dans le cadre de l'équation de Schrödinger, puis dans le cadre de l'équation de Dirac, mais avec une onde plane qui n'est pas la plus générale possible. Le passage du courant de Schrödinger au courant de Dirac n'est pas trivial, car la généralisation relativiste de la partie temporelle du courant de Schrödinger est le courant J, tandis que la généralisation relativiste de la partie spatiale du courant de Schrödinger est le courant de Gordon $\frac{1}{m}k_{(3)}$. Lorsqu'on utilise l'onde plane générale de l'équation de Dirac, on n'obtient le résultat classique qu'en moyenne temporelle pour le courant J. Mais on verra plus loin qu'on obtient exactement le résultat classique avec le courant de Gordon, sans avoir besoin de considérer des moyennes temporelles.

Le calcul des tenseurs avec dérivées du premier ordre donne des résultats plus simples que pour les tenseurs sans dérivée, parce que la phase disparaît des résultats : tous les tenseurs avec dérivées du premier ordre du type (3-7) sont fixes. On obtient :

$$\begin{aligned} k_{(3)} &= m(\mathcal{E}\cdot\underline{J})\mathcal{E} \\ l_{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{(3)} &= -im\Omega_1 \\ \tau &= im[\underline{K}_{(3)} - (\mathcal{E}\cdot\underline{K}_{(3)})\mathcal{E}] \\ v &= \frac{im}{2}(\overline{\mathcal{E}\underline{S}_{(3)}} - \underline{S}_{(3)}\overline{\mathcal{E}})\mathcal{E} \end{aligned} \quad (4\text{-}29)$$

Le courant de Gordon est donc fixe pour l'onde plane générale, et peut donc être considéré comme la généralisation relativiste du courant de Schrödinger. Le courant-charge magnétique est identiquement nul. La partie bivectorielle T_{3b} du tenseur $T_{(3)}$ est également nulle, ce qui correspond au fait que le tenseur d'impulsion-énergie est symétrique. Et la partie pseudoscalaire de $T_{(3)}$ nous donne :

$$T_{00} - T_{11} - T_{22} - T_{33} = m\Omega_1 \quad (4\text{-}30)$$

Comme l'invariant Ω_1 est une différence de carrés, il peut avoir un signe quelconque : même si l'énergie est positive dans la phase de l'onde plane, la densité d'énergie du tenseur de Tetrode peut être positive, nulle, ou négative suivant les valeurs de B.

Remarquons aussi que 4 des 8 composantes de τ et que la composante pseudo-scalaire de v sont identiquement nulles. Les tenseurs non invariants de jauge électrique sont aussi des tenseurs fixes puisque l'on obtient :

$$\begin{aligned} k_{(1)} &= k_{(2)} = 0 \\ l_{(1)} &= -m(\mathcal{E}\cdot\underline{K}_{(2)})\mathcal{E} \\ l_{(2)} &= m(\mathcal{E}\cdot\underline{K}_{(1)})\mathcal{E} \\ T_{(1)} &= \frac{m}{2}(\overline{\mathcal{E}\underline{S}_{(2)}} + \underline{S}_{(2)}\overline{\mathcal{E}})\mathcal{E} \\ T_{(2)} &= -\frac{m}{2}(\overline{\mathcal{E}\underline{S}_{(1)}} + \underline{S}_{(1)}\overline{\mathcal{E}})\mathcal{E} \end{aligned} \quad (4\text{-}31)$$

Conclusion

Dans les tenseurs calculés à partir de l'onde plane générale, on ne voit plus de symétrie entre les tenseurs $K_{(1)}$, $K_{(2)}$, $K_{(3)}$ ou $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, $T_{(3)}$. Ceci vient de la présence dans l'équation de Dirac d'un terme en $i\sigma_3$ qui est le générateur de la transformation de jauge électrique, et qui ne laisse subsister que cette invariance de jauge électrique. Il n'y a invariance de jauge $U(1)\times SU(2)$ que si l'on supprime le terme de masse, ou au moins si l'on peut le négliger. Et c'est bien ce que fait le modèle standard pour les forces électro-faibles.

Il serait souhaitable de poursuivre le rapprochement qui a été esquissé ici entre la théorie électro-faible, qui utilise un groupe de jauge ayant justement la structure $U(1)\times SU(2)$, et l'équation de Dirac dont les tenseurs présentent naturellement cette symétrie. Les travaux récents de R. Boudet [8] semblent prouver qu'un tel rapprochement est possible.

Références

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **117**, 610 (1928)

[2] C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n°1 1997.
C. Daviau : *Dirac equation in the space Clifford algebra*, in Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer 1998

[3] M.A. Naïmark : *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz* (Dunod, Paris 1962).

[4] D. Hestenes : *Space-Time Algebra* (Gordon & Breach New York 1966, 1987, 1992).
D. Hestenes : *Real Spinor Fields.* J. Math. Phys., **8** n°4 1967
D. Hestenes : *Local observables in the Dirac theory.* J. Math. Phys, **14** n°7 1973)
D. Hestenes : *Proper particle mechanics.* J. Math. Phys., **15** n°10 1974)
D. Hestenes : *Proper dynamics of a rigid point particle.* J. Math. Phys., **15** n°10 1974)
D. Hestenes : *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* J. Math. Phys., **16** n°3 1975
D. Hestenes : *A unified language for Mathematics and Physics & Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics* JSR Chisholm & AK Common eds, (Reidel, Dordrecht, 1986)

[5] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin 1/2.* (Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n°4 1983 et **9** n°1 1984)
G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin 1/2 magnetic monopole.* (Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985)
G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* (Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985)
G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992.

[6] : O. Costa de Beauregard : *Sur un tenseur ininterprété en théorie de Dirac* Ann. Fond. Louis de Broglie, **14** n°3, 1989.

[7] Louis de Broglie : *La théorie des particules de spin* $\frac{1}{2}$, Gauthier-Villars, Paris 1952.

[8] R. Boudet : *La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps.* Ann. Fond. Louis de Broglie, **13** n°1 1988.
R. Boudet : *Le corpuscule de Louis de Broglie et la géométrie de l'espace-temps.* (Courants, Amers, Ecueils en microphysique, Ann. Fond. Louis de Broglie, 1993)
R. Boudet : *The Takabayasi moving Frame, from a Potential to the Z Boson*, in "The Present Status of the Quantum Theory of the Light", S. Jeffers and J.P. Vigier eds., Kluwer Dordrecht 1995

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1997)