Une méthode de calcul des intégrales de Feynman

Olivier Pénuisique

Les Verdonnières, Saint Macoux, 86400 CIVRAY

1. Introduction

Entre physique et mathématique, existent de multiples liens. De la dérivée, aux espaces d'Hilbert en passant par la transformation de Fourier, l'analyse vectorielle le calcul matriciel et symbolique, et la fonction de Dirac ; il serait périlleux d'affirmer dogmatiquement une prééminence de l'une sur l'autre. Philosophiquement, comme l'a montré Poincaré, la physique mathématique offre aux mathématiques dites "pures" une source d'inspiration et d'invention (la valeur de la science).

Le but de cet article fidèle à cette tradition, est d'exposer une méthode de calcul des intégrales de Feynman, en partant du même point de vue que celui-ci qui est d'effectuer un "paramétrage intégral" desdites intégrales. La différence majeure est d'effectuer ce paramétrage d'une manière arbitraire en utilisant les intégrales de Dirichlet qui sont l'outil majeur de cette théorie. Un deuxième point important à souligner est que l'on a utilisé de manière essentiel l'homogénéité de certaines fonctions, des propriétés de parité (non uniformité) s'inspirant de travaux de Riemann, et de l'idée de la démonstration de la formule de Weil en analyse complexe. Le cadre naturel est d'ailleurs celui des hyperfonctions des japonais Sato et Kaschiwara.

Qui dit intégrale de Feynman songe à la renormalisation. Ce qui pourra étonner dans cet article vient du fait que le procédé utilisé ne fait intervenir que la "topologie" des diagrammes de Feynman.

Cet article fournit donc une méthode de calcul de ces intégrales. Son objectif sera atteint si les physiciens utilisent ou adaptent cette méthode dans leurs calculs quotidiens.

2. Notations

Soit un diagramme de Feynman D ayant s boucles et m facteurs. On aura $k_1, ..., k_s$ moments internes et on notera k le vecteur $(k_1, ..., k_s)$. Chaque facteur Boson ou Fermion aura un dénominateur de la forme $F_i(k) = \frac{1}{2}\,{}^t k A_i k + {}^t B_i k + c_i i\varepsilon[1m]$ où chaque b_{ij} est un 4-vecteur. A_i est le produit tensoriel (Kronéckerien) de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_3 \end{pmatrix}$$

avec une certain matrice carrée symétrique d'ordre s ne dépendant que du diagramme de Feynman D.

On introduit de plus q facteurs de normalisation tels que :

$$R_j(k) = \frac{1}{2}\,{}^t k \Omega_i k + {}^t \omega_i k + 1 \; j\varepsilon[1\; q]$$

où Ω_i et ω_i tendent vers 0.

On définit l'intégrale de Feynman de D relative au polynome P (à coefficient dans l'algèbre de Clifford engendrée par les matrices de Dirac γ) par :

$$\mathcal{F}_D(P) = \int_{k \in \mathbb{R}^{4s}} P(k) \frac{\bigwedge_{i=1}^{s} d^4 k_i}{\prod_{i=1}^{m} (F_i(k) + \varepsilon\sqrt{-1}) \prod_{j=1}^{q} (R_j(k) + \varepsilon\sqrt{-1})} \text{ où } \varepsilon > 0$$

Remarquons que pour q assez grand cette intégrale a bien un sens. Evidemment ce qui nous intéresse c'est ce que devient $\mathcal{F}_D(P)$ quand $\varepsilon \to 0$ avec Ω_i et $\omega_i \to 0$.

Remarquons d'abord par linéarité il suffit de calculer $\mathcal{F}_D(k^n)$ ou k^n est un monome des k_i de degré homogène n on considère donc

$$\mathcal{F}_D(k^n) = \int_{k \in \mathbb{R}^{4s}} \frac{k^n \bigwedge_{i=1}^{s} d^4 k_i}{\prod_{i=1}^{m} (F_i(k) + \varepsilon\sqrt{-1}) (\prod_{j=1}^{q} R_j(k) + \varepsilon\sqrt{-1})}$$

On va modifier cette dernière intégrale pour la remplacer par une autre qui, à la limite, aura le même comportement, ce qui resoudra le problème proposé, mais sera plus facile à traiter.

Des $R_j(k)$ on n'en garde qu'un seul que l'on notera $F_o(k)$ on "partitionne" $\mathbb{R}^{4s}$ avec des hyperfonctions de la façon suivante :

chaque $F_i(k)+\varepsilon\sqrt{-1}$ en facteur sera remplacé par

$$\left[F_i(k)+\varepsilon\frac{F_i(k)\sqrt{-1}}{|F_i(k)|}\right]^{\beta_i}$$

où les β_i sont des entiers positifs impairs.

La fonction $k\to\frac{F_i(k)}{|F_i(k)|}$ est la fonction, signe de F_i, [1] on notera simplement par $<\pm,F_i>$ on considère donc l'intégrale - dont l'intégrande est une hyperfonction - :

$$\mathcal{F}_D(n,\beta_i)=\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}\frac{k^n\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i}{\prod_{j=0}^m(F_j(k)+<\pm F_j>\varepsilon_j i)^{\beta_i}}$$

où cette fois $i=\sqrt{-1}$ unité imaginaire $\varepsilon_j>0$ si β_o est un entier impair suffisamment grand cette intégrale a bien un sens.

Posons :

$$G_j(k)=F_j(k)+<\pm,F_j>\varepsilon_j i$$

on a alors

$$\mathcal{F}_D(n,\beta_i)=\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}k^n\prod_{j=0}^m G_j^{-\beta_j}(k)\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i$$

3. Paramétrisation par les intégrales de Dirichlet

Considérons l'intégrale de Dirichlet

$$I_F(\beta_j)=\int F(\sum_{j=0}^m\lambda_j)\bigwedge_{j=0}^m\lambda_j^{\beta_j-1}d\lambda_j$$

prise sur le premier quadrat ($\lambda_i\geq 0$) où la fonction F est quelconque mais tendant vers 0 vers l'infini suffisament rapidement. L'arbitaire dans le choix de F permettra d'ailleurs d'utiliser les methodes de la théorie des distributions (fonctions tests). $\mathcal{F}_D(n,\beta_i)$ avec $I_F(\beta_j)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D(n,\beta_i)&=I_F^{-1}(\beta_j)\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}k^n\prod_{j=0}^m G_j^{-\beta_j}(k)\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i\int_{\lambda_i\geq 0}F(\sum_{j=0}^m\lambda_j)\bigwedge_{j=0}^m\lambda_j^{\beta_j-1}d\lambda_j\\&=I_F^{-1}(\beta_j)\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}\int_{\lambda_j\geq 0}k^nF(\sum_{j=0}^m\lambda_j)\bigwedge_{j=0}^m\left[\frac{\lambda_j}{G_j(k)}\right]^{\beta_j-1}d\frac{\lambda_j}{G_j(k)}\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i\\&=I_F^{-1}(\beta_j)\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}\int_{\frac{\lambda_j}{G_j(k)}=x_j}k^nF(\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j)\bigwedge_{j=0}^m x_j^{\beta_j-1}dx_j\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i\end{aligned}$$

Remarquons que d'après nos notions *Re* $G_j(k)=F_j(k)$. Or k varie dans $\mathbb{R}^{4s}$ les matrices A_j étant celles d'une forme quadratique dont la signature est (+,+,+,..,+,-,-,-,...,-) (s fois) $F_j(k)$ peut donc s'annuler (cone de lumière à s corps) et changer de signe.

Mais alors, d'après la définition des $G_j(k)$ $G_j(k)$ change également de signe avec $F_j(k)$ ou plus exactement on passe de $G_j(k)$ à -$G_j(k)$ avec le signe de $F_j(k)$ et dans ce cas on passe également de x_j à -x_j.

On peut représenter graphiquement cette situation, par un "plan", où, en abscisse on aura l'axe de x_j, en "ordonnée" l'axe de $G_j(k)$. On tracera la famille des hyperboles $x_jG_j(k)=\lambda_j$. Les valeurs de $\lambda_j\geq 0$ sont la distance entre l'origine et l'intersection des hyperboles $G_j(k)=\frac{\lambda_j}{x_j}$ quand x_j change de signe on passe du 1er quadrant au 3ème quadrant et donc $G_j(k)$ se change en -$G_j(k)$. On dit suivant la terminologie de l'analyse complexe à plusieurs variables que $G_j(k)$ change de domaines d'holomorphie.

Remarquons que réciproquement si $G_j(k)$ se transforme en $-G_j(k)$, x_j change de signe. Dans tout les cas $G_j(k)$ x_j reste dans le même domaine d'holomorphie. Quand x_j change de signe, la valeur de $\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j$ reste inchangée.

Donc la fonction $x_j\to F(\sum_{j=0}^m G_j(k)\ x_j)$ est paire, les β_j étant impairs $x_j^{\beta_j^{-1}}$ est pair, et donc d'après les propriétés générales de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D(n,\beta_i)&=I_F^{-1}\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}\int_{x_j}k^nF(\sum_{j=0}^m G_j(k)\ x_j)\bigwedge_{j=0}^m x_j^{\beta_j-1}d_{x_j}\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i\\&=I_F^{-1}(\beta_j)\int_{x_j\in\mathbb{R}}\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}k^nF(\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j)\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i\bigwedge_{j=0}^m x_j^{\beta_j-1}d_{x_j}\\&=2^{m+1}I_F^{-1}(\beta_j)\int_{x_j\geq 0}\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}k^nF\left[\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j\right]\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i\bigwedge_{j=0}^m x_j^{b_j-1}dx_j\end{aligned}$$

reste donc à calculer

$$\int_{k\in\mathbb{R}^{4s}}k^nF\left[\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j\right]\bigwedge_{i=1}^s d^4k_i:=J(n,D).$$

A cette fin donnons une expression plus compacte à $\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j$ on a :

$$\sum_{j=0}^m G_j(k)x_j=\sum_{j=0}^m F_j(k)x_j+i\sum_{j=0}^m<\pm F_j>x_j\varepsilon_j$$

La partie imaginaire de cette expression garde un

[1] Comme la fonction de Heaviside en théorie des distributions on n'a pas besoin de la définir pour les k vérifiant $F_i(k)=0$

signe constant on notera $< \pm F_j >$ par $(\pm)^j$

$$= \sum_{j=0}^{m} F_j(k)x_J + i\sum_{j=0}^{m}(\pm)^j \varepsilon_j x_j$$

regardons la partie réelle

$$\sum_{j=0}^{m} F_j(k)x_j : \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2}\ {}^tkA_jkx_j + \sum_{j=0}^{m}\ {}^tb_ikx_j\ \sum_{j=0}^{m} c_jx_j$$

remarquons que $c_0 = 1$ posons

$$A = \sum_{j=0}^{m} A_jx_j \quad b = \sum_{j=0}^{m} b_jx_j \quad c = \sum_{j=0}^{m} c_jx_j$$

il vient :

$$Re\sum_{j=0}^{m} G_j(k)x_j = \frac{1}{2}\ {}^tkAk + \ {}^tbk + c$$

et A, b et c sont des fonctions linéaires des x_j d'autre part prenons F telle que F se prolonge en une fonction holomorphe sa valeur au bord sera

$$\lim_{\varepsilon_j \to 0} J(n,0) = \int_{k\in\mathbb{R}^{4s}} k^n F\left[\sum_{j=0}^{m} F_j(k)x_j\right] \bigwedge_{i=1}^{s} d^4k_i$$

néanmoins on peut écrire sans faire cette hypothèse

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{m}(\pm)^j\varepsilon_jx_j$$

et ε est fonction linéaire des x_j tout comme A, B et c on obtient alors pour $J(n,D)$ l'expression suivante :

$$J(n,D) = \int_{k\in\mathbb{R}^{4s}} k^4F\left[\frac{1}{2}\ {}^tkAk + \ {}^tbk + c + i\varepsilon\right] \bigwedge_{i=1}^{s} d^4k_i$$

où A, b, c et ε sont répétons le, linéaires en les x_j, donc homogènes de degré 1 en lesdites variables. La décomposition canonique du trinome du second degré donne : $\frac{1}{2}\ {}^tkAk + \ {}^tbk + c = \frac{1}{2}\ {}^t\left[k + A^{-1}b\right] A \left[kaA^{-1}b\right] - \frac{1}{2}\ {}^tbA^{-1}b + c$ on a utilisé le fait que A est symétrique (ainsi que son inverse). Remarquons que A^{-1} est homogène de degré -1 en les x_j. Donc $\frac{1}{2}bA^{-1}b$ sera homogène de degré 1-1+1=1 (attention cette dernière fonction n'est pas linéaire). $A^{-1}b$ est homogène de degré 0 remarquons qu'évidemment ε est homogène de degré 1. Posons $k' = k + A^{-1}b$ on a :

$$J(n,D) = \int_{k'\in\mathbb{R}^{4s}} (k' - A^{-1}b)^nF\left[\frac{1}{2}\ {}^tk'Ak' - \frac{1}{2}bA^{-1}b + c + i\varepsilon\right] \bigwedge_{i=1}^{s} d^4k'_i$$

A étant symétrique homogène de degré 1 $A = \ {}^tRR$ (réduction de Gauss) ou R est homogène de degré $\frac{1}{2}$ – comme il est facile de le vérifier –. Comme $det^tR = detR$ on a $det\ A = (detR)^2$ donc $detR = \sqrt{detA}$. D'après l'algèbre linéaire que $detA$ est homogène en les x_i de degré 4s dont $\sqrt{detA}$ sera homogène de degré $\frac{4S}{2} = 2S$ et on aura pour $J(n,D)$

$$J(n,D) = \int_{u\in\mathbb{R}^{4s}} (R^{-1}u - A^{-1}b)^nF\left[\frac{1}{2}\ {}^tuu - \frac{1}{2}bA^{-1}b + c + i\varepsilon\right] detR^{-1}d^4u_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{detA}} \int_{u\in\mathbb{R}^{4s}} (R^{-1}u - A^{-1}b)^nF\left[\frac{1}{2}\ {}^tuu - \frac{1}{2}bA^{-1}b + c + i\varepsilon\right] d^4u_i$$

où l'on a posé : $u = Rk'$ développons $(R^{-1}u - A^{-1}b)^n$ par l'identité multinomiale $J(n,D)$ se transforme en une somme d'intégrale du type :

$$\int_{\mathbb{R}^{4S}} u^lF\left[\frac{1}{2}\ {}^tuu - \frac{1}{2}bA^{-1}b + c + i\varepsilon\right] \bigwedge_{i=1}^{s} d^4u_i$$

chaque terme étant préalablement multiplié par un coefficient homogène en les x_j de degré homogène $-(\frac{1}{2}|l|+2S)$ donc négatif. On remarque alors que l'on a deux types d'intégrales de la forme :

$$\int_{\lambda_i\geq 0} F\left(\textstyle\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\right) \bigwedge_{j=0}^{m} \lambda_j^{\beta_j^{-1}} d\lambda_j = I_F(\beta_j) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^{4s}} u^lF\left[\frac{1}{2}\ {}^tuu - \frac{1}{2}\ {}^tbA^{-1}b + c + i\varepsilon\right] \bigwedge_{i=1}^{s} d^4u_i$$

montrons comment la seconde se ramène à la première. Celle-ci s'écrit :

si α_i est entier cette intégrale est nulle.

$$\int_{\mathbb{R}^{4s}} \prod_{i=1}^{4s} u_i^{2\alpha_i - 1}F\left(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{4S} u_i^2 + M\right) \bigwedge_{i=1}^{s} d^4u_i \qquad = \int_{\mathbb{R}^{4s}} \prod_{i=1}^{4s}(u_i^2)^{\alpha_i^{-1}}F\left(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{4S} u_i^2 + M\right) \bigwedge d\frac{u_i^2}{2}$$

$$= 2^{-4s} \int_{u_i^2 \geq 0} 2^{|\alpha|-4s} \prod_{i=1}^{4s} (u_i^2)^{\alpha_i^{-1}} F\,(\,\textstyle\sum_{i=1}^{4s} u_i^2 + M\,) \bigwedge du_i^2$$

avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{4s} \alpha_i$ or cette même intégrale se répète 2^{4s} fois.

$$\int_{\lambda_i \geq 0} \prod_{i=1}^{4s} \lambda_i \alpha_{i-1} F\,(\,\textstyle\sum^{4s} \lambda_i + M\,)\, d\lambda_i$$

en posant $\lambda_i = u_i^2$ on reconnait la première intégrale. On démontre (cf Goursat) que :

$$I_F(\beta_i) = \frac{\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(\beta_j)}{\Gamma(\beta_0 + \beta_1 + ... + \beta_m)} \int_0^{+\infty} F(\xi) \xi^{\beta_0+\beta_1+...+\beta_m - 1} d\xi$$

par conséquent on aura pour la seconde intégrale en se souvenant que $M = -\frac{1}{2}\ {}^t bA^{-1}b + c + i\varepsilon$ et $\sum_{i=1}^{4S} 2\alpha_i - 1 = |l| = 2|\alpha| - 4s$ ou $|l|$ est la longueur du multi indice l donc $|\alpha| = \frac{1}{2}|l| + 2s$

$$\int_{\mathbb{R}^{4s}} u^l F\left[\frac{1}{2}\ {}^t uu - \frac{1}{2} bA^{-1}b + c + i\varepsilon\right] \bigwedge_{i=1}^{s} d^4 u_i = \frac{\prod_{i=1}^{4s} \Gamma(\alpha_i}{\Gamma(|\alpha|)} \int_0^{+\infty} F(\xi + M) \xi^{|\alpha|-1} d\xi := S_\alpha(M)$$

4. Fonctions homogènes et leur intégration

on a

$$\mathcal{F}_D(n, \beta_i) = 2^{m+1} I_F^{-1}(\beta_j) \int_{x_j \geq 0} J(n, D) \bigwedge_{j=0}^{m} dx_j x_j^{\beta_j - 1}$$

$J(n, D)$ se décompose en une somme de termes ayant comme coefficient une fonction homogène F de degré $-(\,\frac{1}{2}|l| + 2s\,) = -|\alpha|$ avec $S_\alpha(M)$ ou M est homogène de degré 1 donc

$$\mathcal{F}_D(n, \beta_i) = \sum 2^{m+1} I_F^{-1}(\beta_j) \int_{x_j \geq 0} F S_\alpha(M) \bigwedge_{j=0}^{m} x_j^{\beta_j - 1} dx_j$$

Remarquons que pour l'interprétation physique on a $\beta_j = 1$ pour $j \neq 0$ et β_0 est impair suffisament grand on devra donc considérer les intégrales :

$$2^{m+1} I_F^{-1}(\beta_0, \beta_j = 1) \int_{x_j \geq 0} F S_\alpha(M) x_0^{\beta_O^{-1}} \bigwedge_{j=0}^{m} dx_j$$

ou F est homogène de degré $-(\,\frac{1}{2}|l| + 2s\,) = -|\alpha|$ et M est homogène de degré 1.

Considérons la forme différentielle $\omega = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+1} x_i dx_{1\wedge} ... {}_\wedge \widehat{dx_j} \wedge ... dx_m$ notons $|F|$ le degré d'une fonction homogène $|F|$ on a le théorème suivant "$d\omega = (m+1) d\tau$ (avec $d\tau = dx_{0\wedge} ... {}_\wedge dx_m$) et si F est homogène $(dF)\omega = |F| F d\tau$ où d est l'opération de dérivation extérieure".

La démonstration est un simple calcul. Elle utilise la formule d'Euler $\sum_{i=0}^{m} x_i \partial_i F = |F| F$. On a d'autre part le théorème suivant = "$F S_\alpha(M) d\tau$ est une forme exacte". Plus précisément on a une fonction Y telle que $d(FY(M)\omega) = F S_\alpha(M) d\tau$ avec

$$Y(t) = \frac{1}{|M|} t^{-\frac{|F|+m+1}{|M|}} \int_{cte}^{t} s_\alpha(\xi) \xi^{\frac{|F|+m+1}{|M|} - 1} d\xi$$

qui se démontre ainsi :

en supposant le problème résolu on différentie $FY(M)\omega$. En utilisant le théorème ci-dessus on tombe sur une équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre (s_α) dont Y est la solution générale.

D'autre part au lieu de considérer F seule, on considère $x_0^{\beta_O - 1} F$ qui restera homogène mais de degré $|F| + \beta_O - 1 = \beta_0 - |\alpha| - 1$ dans ce cas on aura

$$Y(t) = \frac{1}{|M|} t^{-\frac{|F|+m+\beta_o}{|M|}} \int_{cte}^{t} S_\alpha(\xi) \xi^{\frac{|F|+m+\beta_O}{|M|} - 1} d\xi$$

on prendra $cte = +\infty$. Le principe, analogue a celui de la démonstration de la formule de Weil, va être d'utiliser et d'itérer la formule de Stokes. Pour éviter les singularités il convient d'éviter là où le déterminant de A s'annule. Or celui-ci s'évanouit seulement en l'origine [2] (c'est une caratéristique des diagrammes de Feynman), donc on va utiliser le bord suivant avec $\sum_{i=0}^{m} x_i = R, x_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{m} x_i = \varepsilon$ (cet ε n'a rien à voir avec celui des hyperfonctions)

Pour le premier bord qui rencontre les axes en $R \to \infty$ la fonction decroissant rapidement Y tendra vers 0.

On considèrera le plan muni d'un repère avec x_0 en abscisse et x_1 en ordonnée. Le bord est le bord géométrique du trapèze E de sommets $(\varepsilon, 0); (R, 0); (0, R); (0, \varepsilon)$. Evidemment dans le cas de $x_0, ..., x_m$ on se placera dans un espace à $m + 1$ dimensions avec un $m + 1$ polytope, remplaçant le trapèze.

Pour le bord qui rencontre les axes en ε, on remarque qu'avec l'homothétie de rapport ε en posant $\varepsilon \mu_i = x_i$, $\int F S_\alpha(M) d\tau$ s'écrira $\varepsilon^{|F|+m+1} \times$ quelque chose de borné et $x^{l_0^{-1}} F S_\alpha(M) d\tau$ s'écrira $\varepsilon^{|F|+m+\beta_0} \times$ quelque chose de borné et si $|F| + m +$

[2] en ce qui concerne bien entendu les $x_j \geq 0$

$\beta_O > 0$ cette contribution tendra vers 0 avec ε (remarquer l'analogie avec la théorie du potentiel). Or $|F|+m+\beta_O = -|\alpha|+m+\beta_O = -\frac{1}{2}|l|-2s+m+\beta_0$ or l'expression $-\frac{1}{2}|l|-2s+m$ est reliée à la topologie des diagrammes de Feynmann et si β_0 est suffisamment grand $|F|+m+\beta_0$ reste positif.

Reste ensuite les contributions sur les axes. Or à ce niveau on annule certain des x_i et c'est ce qui est essentiel, les M et F restent homogènes ce qui permet d'itérer la procédure, on a donc :

$$\int_E FS_\alpha(M)x_0^{\beta_0^{-1}}d\tau = \int_{\partial E} FY(M)x_0^{\beta_0-1}\omega$$

Remarquons que lorsque le nombre d'intégrations diminue d'une unité le degré homogène augmente d'une unité. Autrement dit $|Fx_0^{\beta_0^{-1}}|+m$ est un invariant d'intégration d'ailleurs égale à $|F|+m+\beta_0-1$. Finalement l'interaction donnera une somme alternée de termes

$$\lim_{x_{j1}\to 0} x_{j1} \lim_{j2\to 0} x_{j\ 2}.... \lim_{j_{m+1}\to 0} x_{jm+1}F\times M^{-\frac{|F|+m+\beta_0}{|M|}}\times x_0^{b_o^{-1}}\times\times\int_{+\infty}^{\varepsilon>0} x_1^{-1}\int_{+\infty}^{x_m} x_2^{-1}...\int_{+\infty}^{x_m} x_{m+1}^{\frac{|F|+m+\beta_O}{|M|}-1}S_\alpha(x_{m+1})dx_{m+1}...dx$$

L'exposant -1 intervenant à chaque intégration provient de $-\frac{|F|+m+\beta_O}{|M|}+\frac{|F|+m+\beta_O}{|M|}-1=-1$. Remarquons que le deuxième facteur ne fait pas intervenir les grandeurs physiques (masse, charge). Le premier facteur est une limite à calculer. De plus, à chaque intégration sur E les différentes "arêtes" se retrouvent un nombre pair de fois.

Il ne faudrait pas croire que puisque la somme est alternée les différentes contributions se compensent.

Prenons par exemple

$$\lim_{y\to 0} x \lim_{y\to 0}\frac{y}{xy+3y^2} = \lim_{x\to 0} x\times = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

mais

$$\lim_{y\to 0} y \lim_{x\to 0}\frac{x}{3y^2+xy} = \lim_{y\to 0} y \lim_{x\to 0}\frac{x}{3y^2} = \lim_{y\to 0} y\times 0 = 0$$

résultat qui différe du précédent.

Ces différentes valeurs aux bords permettent d'ailleurs de créer un "modèle" de la "fonction" de Dirac en posant :

$$\delta(x) = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\lim_{\mu\to 0}\frac{\mu}{\mu\lambda+x\lambda^2}$$

Le lecteur vérifiera que si $x\neq 0$ $\delta(x)=0$ mais que si $x=0$ $\delta(0)=1$ c'est la propriété de la fonction de Dirac.

Reste à considérer le second facteur

$$\int_{+\infty}^{\varepsilon>0} x_1^{-1}\int_{+\infty}^{x_1}...\int_{+\infty}^{x_m} x_{m+1}^{\frac{|F|+m+\beta_O}{|M|}-1}S_\alpha(x_{m+1})dx_{m+1}...dx_1$$

Remarquons que ce qui nous intéresse c'est la valeur limite quand $\varepsilon\to 0$ remarquons qu'a priori on a une singularité en $x_1=0$ aussi on modifie l'intégrale cidessus pour la remplacer par :

$$\int_\infty^\varepsilon x_1^{q-1}\int_\infty^{x_1} x_2^{-1}\int_\infty^{x_2} x_3^{-1}...\int_\infty^{x_m} x_{m+1}^r S_\alpha(x_{m+1})dx_{m+1}...dx_1 \text{ avec } q>0 \text{ et } r=\frac{|F|+m+\beta_0}{|M|}-1$$

Le changement de variable $x_{m+1}=\lambda_{m+1}x_m, x_m=\lambda_m x_{m+1}...x_2=\lambda_2 x_1, x_1=\lambda_1\varepsilon$ donne

$$\int_\infty^1\int_\infty^1...\int_\infty^1(\lambda_1^q(\lambda_1...\lambda_{m+1})^r S_\alpha(\varepsilon\lambda_1...\lambda_{m+1})d\lambda_1...d\lambda_{m+1}\varepsilon^{q+r+1}$$

changeant encore les variables en posant $\lambda_2=e^{t_2}\lambda_3=e^{t_3}...\lambda_{m+1}=e^{t_{m+1}}$ il vient

$$\int_\infty^1\int_\infty^0...\int_\infty^0\lambda_1^{q+r}e^{(r+1)(t_2+...t_{m+1})}S_\alpha(\varepsilon\lambda_1 e^{t_2+...t_{m+1}})dt_2...dt_{m+1}d\lambda_1\varepsilon^{q+r+1}$$

$$= (-1)^m\int_\infty^1\int_0^\infty...\int_0^\infty\lambda_1^{q+r}\varepsilon^{(q+r)}e^{(r+1)(t_2+...t_{m+1})}S_\alpha(\varepsilon\lambda_1 e^{t_2+-+t_{m+1}})dt_2...dt_{m+1}d\lambda_1$$

l'intégrale sur les t_i est l'intégrale de Dirichlet mais avec $F(x)=e^{(r+1)x}S_\alpha(\varepsilon\lambda_1 e^x)$ on peut donc la calculer on a :

$$= (-1)^m\int_\infty^1\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^{+\infty}\lambda_1^{q+r}\varepsilon^{q+r+1}e^{(r+1)\xi}S_\alpha(\varepsilon\lambda_1 e^\xi)d\lambda_1 d\xi\xi^{m-1}$$

par un changement de variable et faisant tendre ε vers on a

$$=_{\varepsilon\to 0} (-1)^{m+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{(q+r+1)x}e^{(r+1)\xi}}{\Gamma(m)}S_\alpha(e^{\xi+x})\xi^{m-1}d\xi dx$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{qx}e^{(r+1)(\xi+x)}S_\alpha(e^{\xi+x})\xi^{m-1}d\xi dx$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-q\xi}e^{(r+1+q)(\xi+x)}S_\alpha(e^{\xi+x})\xi^{m-1}d\xi dx$$

$\xi \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ il est clair que $x+\xi \in \mathbb{R}$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-q\xi}e^{(r+1+q)z}S_\alpha(e^{z})\xi^{m-1}d\xi dz$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m)}\int_{0}^{+\infty}\xi^{m-1}e^{q\xi}d\xi\times\int_{\mathbb{R}}e^{(q+r+1)z}S_\alpha(e^{z})dz$$

Par Fubini remarquons que $q>0$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(m)}\times\frac{1}{q^m}\times\Gamma(m)\times\int_{0}^{+\infty}u^{q+r}S_\alpha(u)du$$

car on a posé $e^z=u$ et remplaçant S_α par sa valeur il vient

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{q^m}\times\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}u^{q+r}F(w+u)w^{|\alpha|-1}dudw$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{q^m}\times\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}w^{|\alpha|-1}u^{q+r}F(u+w)dudw$$

on reconnait encore une intégrale de Dirichlet.

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{q^m}\times\frac{\Gamma(q+r+1)\Gamma(|\alpha|)}{\Gamma(q+r+|\alpha|-1)}\int_{0}^{+\infty}\xi^{q+r+|\alpha|}F(\xi)d\xi$$

or $q+r+|\alpha|=q+|F|+m+\beta_0-1+|\alpha|$ car $|M|=1$ or $|F|+|\alpha|=0$, $q+m+\beta_0-1=q+r+|\alpha|$, et donc

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{q^m}\;\frac{\Gamma(q+|F|+m+\beta_0)\Gamma(|\alpha|)}{\Gamma(q+m+\beta_0-1)}\int_{0}^{+\infty}\xi^{q+m+\beta_0-1}F(\xi)d\xi$$

on voit que la dernière intégrale est la même que celle intervenant dans $I_F(\beta_j)$ par conséquent le résultat final ne dépend pas de F ce qui est normal. On s'est débarrassé ainsi de toutes les intégrations. Reste le facteur q^m qui donne quand $q\to 0$ l'ordre de la divergence. Néanmoins cette divergence n'existe qu'avec un nombre de facteur m donné.

Cependant ce nombre n'est pas un invariant, et n'a pas vraiment de sens physique. En effet la fraction $\frac{1}{AB}$ a 2 facteurs à son dénominateur, cependant $\frac{1}{AB\times 1\times 1}$ a 4 facteurs à son dénominateur. D'où le principe suivant pour renormaliser.

Principe de renormalisation : à une approximation donnée - donc à m_0 facteurs - où m_0 représente le plus grand nombre de facteurs dans une somme de diagramme de Feynmann. On considère que les diagrammes ayant moins de m_0 facteurs disons m' se complètent par m_0-m' facteurs complémentaires égaux à 1 aux dénominateurs. Lesdits facteurs seront dit triviaux.

L'énoncé de ce principe se justifie en ce sens que dans les calculs des intégrales, tels qu'on l'a effectué plus haut q^m sera un facteur commun à l'ensemble des diagrammes. En le sortant de la somme des diagrammes correspondants (avec $(-1)^{m+1}$) on aura un facteur libre de divergence pour β_0 assez grand. D'ailleurs on pourra toujours avoir β_0 assez grand ne serait ce qu'en considérant $G_0(k)$ non plus comme une puissance fonction de β_0 mais lui même comme un facteur trivial.

On peut remarquer le rôle complémentaire joué par m et β_0 et que $\Gamma(|\alpha|)\Gamma(q+m+\beta_0-1)$ sont définis sans ambiguité par la définition de Γ due à Euler.

Quant à $\Gamma(q+|F|+m+\beta_0)=\Gamma(q+m+\beta_0-2s-\frac{1}{2}|l|$ pour $m+\beta_O$ assez grand existera également sans ambiguité. Dans tous les cas on fera tendre q vers zéro.

L'existence de $G_0(k)$ avec ses termes tendant vers zéro va apporter des termes non nuls dans les diverses intégrations de la même manière que le modèle de la fonction δ proposé plus haut introduisait une valeur non nulle mais bornée en zéro.

Si l'on réfléchit à l'existence de $G_0(k)^{-\beta_0}$ on voit qu'à la limite il est un facteur trivial. Sa seule motivation est de rendre convergente $\mathcal{F}_D(n,\beta_i)$ cela afin de la paramétrer par une intégrale de Dirichlet. Ainsi le calcul fait plus haut (en III) utilise le théorème de Fubini dans l'échange des intégrations des k_i avec les x_j. On peut sans introduire ce facteur de convergence permuter ces intégrations. On n'a plus égalité mais une expression dans laquelle, en suivant la même méthode de précédement, on n'a plus de divergence. Les résultats précédents s'obtiennent alors en faisant $\beta_O = 0$ dans les formules, il restent licites en prenant un nombre suffisament grand de facteurs triviaux.

5. Conclusion

Traditionnellement on distingue 3 sortes de renormalisation : numérique sur laquelle on ne dira rien, soustractive et dimensionnelle.

Le lecteur aura sûrement remarqué l'analogie des β_j avec la régularisation dimensionnelle. Néanmoins point n'est besoin comme on peut s'en apercevoir d'introduire un espace temps fictif, dans les calculs car les fonctions Γ (qui jouent un rôle fondamental) apparaissent naturellement. La méthode utilisée ici utilise des exposants - qui rappelons-le sont impairs - mais que rien n'empêche, par un procédé formel de prolongement, à supposer qu'ils varient à l'intérieur d'un domaine d'holomorphie.

Remarquons de plus que l'on introduit par commodité un facteur de convergence $G_0(k)^{-\beta_0}$ qui peut s'écrire $\frac{1}{\varepsilon Q(k)+1}$ où Q est une forme quadratique et ε un réel positif tendant vers 0. On a :

$$\frac{1}{\varepsilon Q(k)+1} = \frac{1}{\varepsilon\left[Q(k)+\frac{1}{\varepsilon}\right]} = \frac{1/\varepsilon}{Q(k)+1/\varepsilon} = \frac{A}{Q(k)+A} \text{ où } A = 1/\varepsilon$$

On écrira si $Q(k)$ est l'un des $F_j(k) j \neq 0$

$$\frac{1}{Q(k)} \times \frac{1}{\varepsilon Q(k)+1} = \frac{A}{Q(k)\left[Q(k)+A\right]} = \frac{1}{Q(k)+A} - \frac{1}{Q(k)}$$

On obtient donc une soustraction. Ainsi la méthode exposée plus haut, que l'on appelera paramétrisation de Dirichlet, tient à la fois d'une régulation dimensionnelle et soustractive.

Le lecteur pourra sembler déçu de ne pas trouver ici des calculs consistants. Il faut bien voir que ce qui est exposé ici est seulement une méthode.

Un point important à souligner sont les propriétés de parité des $G_j(k)$- exposées en III -. Elles sont l'analogue d'une non uniformité en théorie de la variable complexe. Cette propriété intervient dans l'étude de Riemann sur la fonction hypergéométrique, chez Poincaré et les fonctions automorphes, et dans le groupe d'une équation différentielle. Plus classiquement elle intervient dans le calcul de

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b\sin(\pi a/b)}$$

qui donne la formule des couplements d'Euler et ramène à la fonction Γ. D'ailleurs ce genre de propriété se rencontre encore dans l'équation fonctionnelle liant la fonction zeta de Riemann à Γ. L'analogie avec la variable complexe ne se limite pas à cela, le lecteur aura remarqué l'analogie avec la théorie du potentiel.

Bibliographie
Mathématiques "Pures" :

[1] E. Goursat : Cours d'analyse mathématique, tome 1, page 381, exercice 3.

[2] M. Kashiwara : Foundations of Algebraic Analysis, Princeton University Press 1986.

[3] F. Roddier : Distributions et transformations de Fourier, Mac Graw Hill 1978.

[4] B. Chabat : Introdution à l'analyse complexe (2 tomes), Mir 1990.

Physique mathématique :

[5] E. Lifchitz et L. Pitayevski : Théorie quantique relativiste (2 tomes), Mir 1973.

[6] L.H. Ryder : Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1989.

[7] G.T. Hooft et M. Veltman : Nuclear Physics, B44 189, 1972.

[8] R. Hwa et V. Teplitz : Homology et Feynman Integrals, New-York 1966.

[9] M. Nakahara : Geometry, Topology and Physics, Adam Hilger, 1990.

[10] S. Narisan : Physics Reports 84, 263, 1982.

(Manuscrit reçu le 28 novembre 1996)