Théorie du "Champ Soustractif" ou "Champ unifié"

Louis de Broglie

Suite et fin du cours de 1956-1957

Je vais terminer ce cours en donnant une esquisse d'une théorie à laquelle je m'étais beaucoup intéressé il y a quelques années (en 1949 et 1952) en la désignant sous le nom de "théorie du champ soustractif". Je ne développerai pas entièrement cette théorie, notamment en ce qui concerne les interactions des particules et des champs ambiants et la manière d'éviter ainsi les valeurs infinies des énergies d'interaction qui, depuis des années, constitue l'un

Mon but, en résumant la théorie du champ soustractif sera seulement cette année, de montrer qu'elle fournit (peut-être ?) quelques indications sur la manière dont pourrait s'opérer cette unification des champs dont nous avons parlé et dont apparaîtrait alors la question des interactions.

J'ai rappelé précédemment le système d'équations qui est à la base de ce que j'avais appelé la "Mécanique ondulatoire" du photon et qui constitue en réalité (parce que j'introduisais un terme de masse propre non nulle du photon) les équations générales de la particule de spin 1. Je rappelle la forme de ces équations (partie maxwellienne) :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{E}\ ,\ \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H} + k_0^2\vec{A}\ ,\ \mathrm{div}\vec{E} = -k_0^2 V$$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}\ ,\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}V\ ,\ \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0$$

avec $k_0 = (2\pi/h)\mu_0 c, \mu_0$ masse propre de la particule.

Malheureusement la Mécanique ondulatoire de photon, en ce qui concerne les interactions entre les charges électriques et le champ électromagnétique, ne change rien d'essentiel aux résultats de la théorie quantique des champs habituelle et conduit en particulier à une valeur infinie pour la masse propre des particules électrisées, résultats inadmissibles qui embarrassent les théoriciens depuis vingt-cinq ans.

C'est en réfléchissant à cette question que j'avais été amené à reprendre en 1949 sous une forme nouvelle, une tentative faite en 1939 par M. Stuckelberg et reprise ensuite de diverses façons par MM. Bopp, Pais et Feynman. J'ai fait sur cette "théorie du champ soustractif", une série de notes aux Comptes Rendus pendant l'été de 1949 dont j'ai rassemblé les résultats dans un article de "Portugaliae mathematica", puis sous une forme un peu différente dans un article du Journal de Physique. Enfin j'ai repris toute la question sous une autre forme en m'inspirant des travaux de M. Podolsky dans trois notes aux Comptes Rendus en 1951 et au début de 1952.

Voici la bibliographie correspondante :

E.G.C. Stuckelberg, *Nature*, 1939, **44**, 118 et Helvetica Physica Acta 1941, **14**, 51.

F. Bopp, *Annalen der Physik*, 1940, **38**, 345 et 1943, **42**, 575.

A. Pais, *Verhandlungen der Neerlandschen Akademie*, 1ère section, **DXIX** n°1, Amsterdam, 1947.

L. de Broglie, *C.R.A.S.* 1949, **229**, 157, 269, 640 ; 1950, **230**, 1009 ; 1951, **232**, 1269 ; 1952, **234**, 20, 1505.

L. de Broglie, *Portugaliae Mathematica*, 1949, **8**, 37; *J. Phys.* 1950, **11**, 481.

Premier exposé de la théorie du champ soustractif (travaux de 1949-50)

Dans la théorie générale des particules de spin 1, généralisation de la Mécanique ondulatoire du photon, on associe à toute particule de cette catégorie un champ analogue à un champ électromagnétique et représenté par deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dont les six composantes forment les six composantes distinctes d'un tenseur antisymétrique du second rang. Dans le cas où la particule de spin 1 est un photon, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ constituent le champ électromagnétique au sens usuel.

Parmi les équations de la particule de spin 1 que nous avons écrites plus haut figure l'équation

$$\mathrm{div}\vec{E} = -k_0^2 V$$

C'est d'elle dont je m'étais servi pour introduire, dans le cas statique d'une particule immobile, l'hypothèse du "champ soustractif".

Dans la mécanique ondulatoire du photon, on suppose que les protons sont des particules de spin 1 dont la masse μ_0 n'est pas rigoureusement nulle mais extraordinairement petite (certainement inférieure à $10^{-45}g$, peut être voisine de $10^{-64}g$). La constante $k_0 = \frac{2\pi}{h}\mu_0 c$ a aussi une valeur extrêmement petite et, si l'on néglige les termes en k_0^2 dans les équations Maxwelliennes, on retrouve les équations de Maxwell usuelles.

Pour le champ photonique, on a donc

$$\mathrm{div}\vec{E} = -\gamma^2 V$$

où $\gamma = k_0$ du photon est extrêmement petit.

Nous allons maintenant introduire l'hypothèse du champ soustractif. Sous la forme la plus simple, elle consiste à admettre que tout corpuscule électrisé est en interaction non seulement avec le champ électromagnétique des photons de constante γ extrêmement petite, mais aussi avec un champ de mésons de spin 1 de constante $k_0 \gg \gamma$.

Elle comporte de plus la précision suivante : la liaison du champ photonique avec le corpuscule électrisé s'exprimant comme d'habitude en attribuant au corpuscule une charge électrique ϵ, sa liaison avec le champ "mésonique" s'exprimera en lui attribuant une "charge mésonique" ϵ_1 égale *(ceci est essentiel)* à $-\epsilon$.

L'hypothèse du champ soustractif étant ainsi précisée on est amené, en introduisant des termes de sources dans les équations des deux champs photoniques et mésoniques, à écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E}_{k_0} &= -k_0^2 V_{k_0} + 4\pi\epsilon_1\delta(r) \\
&= -\epsilon_1 k_0^2 \tfrac{e^{-k_0 r}}{r} + 4\pi\epsilon_1\delta(r) \\
\mathrm{div}\vec{E}_{\gamma} &= -\gamma^2 V_{\gamma} + 4\pi\epsilon\delta(r) \\
&= -\epsilon\gamma^2 \tfrac{e^{-\gamma r}}{r} + 4\pi\epsilon\delta(r)
\end{aligned}$$

Le corpuscule étant placé à l'origine des coordonnées et $\epsilon_1 = -\epsilon$. En effet les potentiels V_{k_0} et V_γ ont alors la forme de Yukawa $(\epsilon_1/r)e^{-k_0 r}$ et $(\epsilon/r)e^{-\gamma r}$ et les termes de sources en $\delta(r)$ expriment la présence à l'origine des coordonnées de la charge qui crée le champ

$$\delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

En additionnant alors les équations ainsi obtenues, on obtient en posant $\vec{E} = \vec{E}_{k_0} + \vec{E}_\gamma$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\epsilon\Big[\frac{k_0^2}{4\pi}\frac{e^{-k_0 r}}{r} - \frac{\gamma^2}{4\pi}\frac{e^{-\gamma r}}{r}\Big] \qquad (1)$$

Le fait fondamental, c'est que les termes en $\delta(r)$ qui, dans les théories antérieures étaient à l'origine des valeurs infinies trouvées pour les énergies propres, ont disparu des second nombres.

Or l'équation (1) obtenue par l'*unification* des champs $\vec{E}_{k_0}$ et $\vec{E}_\gamma$ en un champ total $\vec{E} = \vec{E}_{k_0} + \vec{E}_\gamma$ peut être interprétée de la façon suivante : tout se passe comme si l'on avait affaire à un champ électrique $\vec{E}$ produit par une distribution continue d'électricité de densité

$$\sigma(r) = \epsilon\Big[\frac{k_0^2}{4\pi}\frac{e^{-k_0 r}}{r} - \frac{\gamma^2}{4\pi}\frac{e^{-\gamma r}}{r}\Big]$$

On est ainsi parvenu d'une façon vraiment curieuse à substituer à la charge ponctuelle dont on était parti, une charge étendue de densité continue. La répartition de cette charge est très intéressante. L'intégrale $\int \sigma dv$ donne une charge totale nulle, mais elle se compose de deux parties, la partie $\epsilon(k_0^2/4\pi)(e^{-k_0 r}/r)$ qui est très concentrée autour de l'origine (si l'on admet avec Yukawa que le k_0 des mésons est de l'ordre 10^{13} cm^{-1} de sorte que $(e^{-k_0 r}/r)$ est nulle sensiblement pour $r \gg 10^{13} cm$) et une charge de signe opposé $-\epsilon(\gamma^2/4\pi)(e^{-\gamma r}/r)$ qui (à cause du γ^2) correspond à une densité extrêmement faible mais répandue à une très grande distance. Pour $\gamma \to 0$ la charge $\epsilon(k_0^2/4\pi)(e^{-k_0 r}/r)$ reste concentrée autour de l'origine, tandis que la densité $-\epsilon(\gamma^2/4\pi)(e^{-\gamma r}/r)$ dont la charge totale reste égale à $-\epsilon$ est rejetée à l'infini.

On vérifie que cette distribution de charge produit bien autour d'elle le potentiel

$$V(r) = \epsilon\frac{e^{-\gamma r} - e^{-k_0 r}}{r} \simeq \epsilon\frac{1 - e^{-k_0 r}}{r}$$

qui est précisément celui qui correspond à l'hypothèse du champ soustractif.

En partant de l'expression de $\sigma(r)$ donnée plus haut et en supposant qu'un électron de charge électrique $\epsilon = -e$ est lié, en dehors de son champ électromagnétique photonique, à un champ mésonique pour lequel il possède une "charge mésonique" $\epsilon_1 = -\epsilon = +e$, j'avais calculé l'énergie totale du champ statique par la formule

$$W_0 = \frac{1}{2}\int \sigma V d\tau = \int \frac{1}{8\pi}E^2 d\tau$$

et en l'égalant à l'énergie propre m_0c^2 je trouvais

$$m_0c^2 = \frac{e^2}{4}k_0$$

ce qui donnait pour la masse propre des mésons de constante k_0

$$\mu_0 = \frac{k_0 h}{2\pi c} = 4\frac{\mu_0 c}{e^2}\frac{h}{2\pi} = 4 \times 137 m_0 = 548 m_0$$

car la "constante de structure fine" $(2\pi e^2/hc)$ bien connue depuis la théorie de Sommerfeld de 1916, est sensiblement égale à $\frac{1}{137}$. Mais, en refaisant plus tard ces calculs dans le cadre du formalisme lagrangien de Podolsky (1951-52), je me suis aperçu qu'il conduit à une valeur différente de μ_0 parce qu'il y a lieu d'ajouter, dans l'expression de W_0, à $\frac{1}{2}\int \sigma V d\tau$ un terme dépendant du potentiel de sorte que finalement on trouve pour μ_0 la moitié de la valeur indiqué ci-dessus soit $2 \times 137 m_0 = 274 m_0$, ce qui coïncide approximativement avec la valeur attribuée à la masse du meson π. Je reviendrai sur ce point quant je parlerai de mes travaux de 1951-52.

Il est facile de généraliser la théorie précédente. Nous avons jusqu'ici considéré seulement des corpuscules électrisés ayant une charge électrique ϵ non nulle et nous avons limité à deux le nombre des champs liés à ces corpuscules. Or il est aisé de s'affranchir de ces restrictions.

Pour cela, considérons un corpuscule en interaction avec un nombre quelconque n de particules de spin 1 (que par abus nous désignerons sous le nom de "mésons", bien que plusieurs sortes de mésons aient un spin différent de 1). Soient $\epsilon_1 ... \epsilon_\mu$ les "charges" du corpuscule par rapport à ces divers champs "mésoniques". On écrira

$$\mathrm{div}\vec{E}_i = -k_{0i}^2 V_i + 4\pi\epsilon_i\delta(r) \quad (i = 1, 2, ...n)$$

et, en ajoutant, on a

$$\mathrm{div}\vec{E} = -\sum_{i=1}^{n} k_{0i}^2 V_i + 4\pi\delta(r)\sum_{i=1}^{\mu}\epsilon_i,$$

k_{0i} désignant la constante k_0 du ième champ mésonique et $\vec{E}$ étant égal à $\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$. On voit alors que, pour se débarrasser du terme en $\delta(r)$ et des divergences qu'il entraine, il faut poser

$$\sum_{i=1}^{n} -\epsilon_i = 0$$

On peut alors définir comme précédemment une densité de charge σ par la formule

$$\sigma(r) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon_i}{4\pi}k_{0i}^2\frac{e^{-k_{0i}r}}{r}$$

la charge totale correspondante $\int \sigma dv$ étant nulle.

Dans le cas où l'un des champs "mésoniques" est un champ électromagnétique (photonique), la charge ϵ_i correspondante est la charge électrique du corpuscule au sens usuel et la partie correspondante de la densité σ est rejetée à très grande distance.

Si, de plus, il y a seulement intervention de deux champs, le champ photonique et un champ mésonique, on peut poser

$$n = 2 \quad \epsilon_1 = -\epsilon_2 = e \quad k_{01} = \gamma \quad k_{02} = k_0$$

et l'on retrouve immédiatement les formules du cas particulier précédement étudié.

Quelques conséquences intéressantes des formules précédentes

La forme des relations que nous venons d'obtenir nous permet de déduire quelques conséquences intéressantes que j'avais signalées dans mes travaux de 1949-50.

D'abord, comme il paraît probable que tout corpuscule en interaction avec des champs de bosons doit obéir à la relation $\sum \epsilon_i = 0$, on voit que "tout corpuscule en interaction avec des champs de bosons doit être en interaction avec au moins deux de ces champs, la somme des "charges" correspondantes du corpuscule devant être nulle".

Si le corpuscule est électrisé, l'un des champs auxquels il est lié doit être le champ photonique, le ou les autres champs étant "mésoniques".

Si le corpuscule est électriquement neutre, tous les champs avec lesquels il est en interaction sont mésoniques. Comme il existe des particules neutres de spin 1/2 (neutrons, neutrinos), on peut en déduire la curieuse conséquence suivante : "il existe au moins deux sortes de mésons de spin 1 de masses differentes". Ceci est nécessaire puisque le corpuscule neutre doit être en interaction avec deux champs mésoniques dont aucun ne peut être le champ électromagnétique des photons.

Voici une autre remarque curieuse que j'avais faite dans mon article au Journal de Physique en 1950. Considérons une onde électromagnétique qui, venant de l'extérieur, tombe sur une particule neutre, par exemple un neutron. Dans la théorie du champ soustractif, le champ électrique de l'onde doit agir sur la charge σ du corpuscule. Or nous savons que, même pour un corpuscule neutre, cette charge n'est pas nulle : d'où paraît résulter cette conclusion paradoxale qu'une onde électromagnétique devrait pouvoir être absorbée ou diffusée par un corpuscule neutre.

Mais regardons les choses de plus près. Les ondes électromagnétiques usuelles, même les rayons γ, ont des longueurs d'ondes très grandes par rapport à 10^{-13}cm. Or pour un corpuscule neutre, la distribution $\sigma(r)$ a pour expression

$$\sigma(r) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon_i}{4\pi}k_{0i}^2\frac{e^{-k_{0i}r}}{r}$$

où les k_{0i} sont des constantes très grandes (ayant les dimensions L^{-1}) telles que leurs inverses $(1/k_{0i})$ soient au plus de l'ordre de 10^{-13}cm. De plus la charge totale est $\int \sigma(r)d\tau = 0$. On voit alors aisément que le champ électrique pouvant être considéré à chaque instant comme uniforme dans le domaine occupé par la charge, son action sur la distribution de charge dont la charge totale est nulle sera nulle. Donc malgré l'existence de la distribution de charge σ, le corpuscule neutre sera insensible à l'action d'une onde électromagnétique de longueur d'onde grande par rapport à 10^{-13}cm.

Considérons au contraire un corpuscule chargé. On a alors

$$\sigma(r) = -\frac{\epsilon}{4\pi}\gamma^2 \frac{e^{-\gamma r}}{r} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon_i}{4\pi} k_{0i}^2 \frac{e^{-k_{0i} r}}{r}$$

où γ est la très petite constante k_0 du photon tandis que les k_{0i} sont toujours très grands de l'ordre 10^{13}cm et l'on doit avoir

$$\epsilon = -\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i$$

La charge totale est encore nulle : $\int \sigma d\tau = 0$, mais ici la distribution est formée de deux parties :

1. celle qui correspond dans $\sigma(r)$ au terme en γ, distribution de charge totale $-\epsilon$ qui est pratiquement rejetée à l'infini ;

2. celle qui correspond aux termes en k_{0i}, distribution concentrée dans une région très voisine de l'origine (de dimension au plus égale à 10^{-13}cm) et dont la charge totale est (très approximativement)

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon_i}{4\pi} k_{0i}^2 \int_0^\infty \frac{e^{-k_{0i} r}}{r} 4\pi r^2 dr = -\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i = \epsilon$$

C'est sur cette charge ϵ concentrée à l'origine qu'agit le champ de l'onde extérieure. Il est très curieux de constater ainsi que ce sont les termes d'origine mésonique qui sont à l'origine de l'action du champ extérieur sur le corpuscule chargé. Si ce champ extérieur agit sur le corpuscule chargé, c'est parce que la densité σ d'origine "photonique" et de charge totale $-\epsilon$ se trouve alors rejetée à l'infini et que, par suite, le champ extérieur (qui ne s'étend jamais jusqu'à l'infini) ne peut pas agir sur elle.

Examen de la théorie qui précède

Si, par analogie avec l'emploi de cette expression dans la théorie de la double solution, nous désignons par "région singulière" du corpuscule lié au champ de bosons la région de dimensions de l'onde au plus de 10^{-13}cm où les exponentielles $e^{-k_{0i} r}$ ne sont pas négligeables, nous pouvons d'abord noter que, dans cette région singulière, les grandeurs du "champ unifié" deviennent très grandes mais restent finies même en $r = 0$ de telle sorte que cette région constitue une région de haute concentration des champs de bosons.

Vérifions le, dans le cas d'un corpuscule électrisé immobile lié à un champ photonique de très petite constante γ et à un champ mésonique de très grande constante k_0 (modèle d'électron par exemple). Nous avons pour le potentiel scalaire unifié

$$V(r) = \epsilon \frac{e^{-\gamma r} - e^{-k_0 r}}{r} \simeq \epsilon \frac{1 - e^{-k_0 r}}{r}$$

potentiel qui est la somme d'un potentiel quasi Coulombien $(\epsilon/r)e^{-\gamma r}$ (qui devient Coulombienne si $\gamma = 0$) et d'un potentiel $-\epsilon(e^{-k_0 r}/r)$ de Yukawa qui se retranche du précédent (d'où le nom de "champ soustractif"). Dès qu'on s'éloigne de la région singulière $(r \gg (1/k_0)), V(r)$ se réduit au potentiel quasi Coulombien, mais dans la région singulière, quand r tend vers zéro, $V(r)$ croît, mais de moins en moins rapidement et atteint pour $r = 0$ la valeur très grande, mais finie, $V(r) \simeq \epsilon k_0$. Le champ électromagnétique $\vec{E}$ est radial et son unique composante est

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \simeq +\frac{\epsilon}{r^2} - \epsilon(k_0 + \frac{1}{2}) \frac{e^{-k_0 r}}{r}$$

Dès que l'on s'éloigne de la région singulière $r \gg \frac{1}{k_0}, E_r$ se réduit au champ coulombien $+(\epsilon/r^2)$, mais si l'on pénètre dans la région singulière en faisant tendre r vers zéro, on voit en développant $e^{-k_0 r}$ en série que E_r croît de moins en moins vite et tend pour $r = 0$ vers la valeur très grande, mais finie ϵk_0^2. Ce sont ces valeurs finies des grandeurs du champ unifié, résultant de la façon dont nous avons éliminé les termes en $\delta(r)$, qui font disparaître les divergences de la théorie usuelle. On peut remarquer qu'en $r = 0$, le champ $\vec{E}$ subit une discontinuité.

On trouverait aussi des grandeurs de champ finies dans le cas où la particule est liée à n champs de bosons et même dans le cas non statique où la particule est en mouvement.

En ajoutant les équations $\mathrm{div}\vec{E}_i = k_{0i}^2 V_i + 4\pi\epsilon_i\delta(r)$ et en admettant la relation $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$, nous avons en quelques sorte "escamoté" les facteurs gênants $\delta(r)$ et fait apparaître la densité continue $\sigma(r)$ dans $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\sigma$. au premier abord on peut croire que nous avons ainsi rempli le programme de Mie puisque les termes de source sont finalement remplacés par une densité de charge σ fonction des potentiels V_i. Mais je crois qu'il n'en est rien, car l'escamotage des termes en $\delta(r)$ n'est qu'apparente : c'est en effet parce que les termes en $\epsilon_i\delta(r)$ figurent dans les équations individuelles des divers champs de bosons que nous pouvons poser $V_i = (\epsilon_i/r)e^{-k_{0i} r}$ avec Yukawa et introduire cette expression dans la densité σ. Il faut donc bien commencer par introduire les termes de sources en $\epsilon_i\delta(r)$ dans les équations individuelles des champs de bosons avec des valeurs arbitraires des ϵ_i soumis par une autre hypothèse arbitraire à la relation $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$. Nous ne réussissons donc pas par la théorie du champ soustractif à chasser des équations de départ les termes de source de façon que ces équations ne contiennent rien qui soit extérieur au champ lui-même.

Nous devons d'ailleurs remarquer qu'après avoir "escamoté" les termes en source en $\delta(r)$ et obtenu une théorie de la forme de Mie avec une densité σ fonction des potentiels, nous nous trouvons dans le cas exceptionnel de la théorie de Mie où la densité étant fonction *linéaire* des potentiels, les équations de Mie sont elles-mêmes linéaires.

Finalement, nous avons toujours, à la base de la théorie, des équations linéaires avec termes de sources qui n'incorporent pas la particule dans le champ et nous devons toujours postuler la force Lorentz, le champ qui y figure étant d'ailleurs le champ unifié.

Il me semble que la véritable manière d'exprimer la liaison des champs de bosons liés à une même particule serait d'écrire des équations du champ unifié qui comporteraient des termes non linéaires sensibles seulement dans la région singulière où les champs ont des valeurs très élevées. C'est cette non linéarité très localisée qui souderait ensemble la particule et les n champs de bosons (portant chacun une infinité de régions singulières qui leur sont propres et qui constituent leurs bosons). Naturellement il faudrait introduire de quelque manière (que je ne puis préciser) l'onde u, le champ v, de la particule elle-même, onde u qui se trouverait soudée à tous les champs de bosons par des effets de non-linéarité dans la région singulière où elle a des valeurs très élevées. Nous retrouvons ainsi le programme que nous avions déjà esquissé plus haut. En dehors de la région singulière, l'onde u de la particule et les n champs de bosons obéiraient à des équations linéaires très approximativement indépendantes.

Ce programme est assurément encore vague et sa réalisation difficile. Mais en étudiant la seconde manière d'exposer la théorie du champ soustractif que j'avais utilisée dans mes notes de 1951-52, nous apercevrons quelques (très vagues) indications sur la manière d'aborder ce programme.

Seconde manière d'aborder la théorie de champ soustractif

Dans mes trois notes de 1951-52, j'ai repris la théorie du champ soustractif sous une forme différente en employant un schéma lagrangien de l'Electromagnétisme développé par M. Podolsky et qui s'adapte aisément à la théorie du champ soustractif.

Pour écrire ce formalisme, je me suis servi des coordonnées d'univers de Mikowski $x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad x^4 = ict$ et, comme dans l'univers euclidien, il est inutile de distinguer composantes covariantes et composantes contravariantes nous pourrons toujours écrire les indices des tenseurs en haut. Nous pourrons alors nous servir des indices du bas pour désigner la dérivation par rapport à une variable c'est à dire que $F_\lambda^{\alpha\beta\cdots}$ signifiera $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}F^{\alpha\beta\cdots}$. Naturellement $F_{\lambda\lambda}^{\alpha\beta\cdots}$ signifiera alors avec la convention nouvelle des sommation des indices deux fois répétés

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial (ict)^2}\right)F^{\alpha\beta\cdots} = -\ \Box F^{\alpha\beta}$$

Nous bornant au cas où l'on fait intervenir deux champs de bosons de spin 1 et de constantes k_1 et k_2, nous pouvons prendre comme Lagrangien de la théorie du champ soustractif

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F_\gamma^{\alpha\beta}F_\gamma^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\frac{k_1^2k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\alpha A^\alpha\right]$$

$F^{\alpha\beta}$ étant le tenseur antisymétrique du champ unifié $\vec{E}, \vec{H}$, A^α le quadrivecteur potentiel de ce champ $V, \vec{A}$. Nous admettons les relations classiques

$$F^{\alpha\beta} - A_\beta^\alpha = A_\alpha^\beta \quad A_\alpha^\alpha = 0 \quad F_\gamma^{\alpha\beta} + F_\alpha^{\beta\gamma} + F_\beta^{\gamma\alpha} = 0$$

équivalentes aux équations Maxwelliennes sans second membre

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}\ ,\ \vec{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}V$$
$$\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0$$
$$-\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{E}\ ,\ \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

On peut exprimer le Lagrangien à l'aide des A^α et de leurs dérivées premières et secondes. On obtiendra donc les équations d'Euler-Lagrange correspondant à $\delta\int L dx^1dx^2dx^3dx^4 = 0$ en l'absence de charge en écrivant

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu\nu}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1,2,3,4)$$

En présence d'une particule liée au champ unifié, nous introduisons au second membre de l'équation précédente le terme

$$4\pi\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2+k_2^2}j^\alpha \text{ avec } j^\alpha = \rho_0 u^\alpha$$

μ^α étant la vitesse d'univers de la particule chargée et ρ_0 la densité dans le système propre, soit $\epsilon\delta(\vec{r}_0)$. Le terme ajouté peut être considéré comme une sorte de "valeur pondérée" du courant car l'on peut écrire

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i}{k_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i^2}}\delta(r_0)u^\alpha$$

avec $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$.

En explicitant les termes de l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient

$$\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\beta}_{\beta\gamma^2} - F^{\alpha\beta}_{\beta} + \frac{k_1^2k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\alpha \qquad (2)$$
$$= 4\pi\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2+k_2^2}j^\alpha \ , \ (\alpha = 1,2,3,4)$$

Pour vérifier que cette équation contient la solution envisagée dans la théorie du champ soustractif, cherchons une solution de la forme $\vec{A} = \vec{A}_{(1)} + \vec{A}_{(2)}$ avec les équations de propagation

$$(\,\Box + k_1^2)A^\alpha_{(1)} = 4\pi j^\alpha, (\,\Box + k_2^2)A^\alpha_{(2)} = -4\pi j^\alpha$$

on trouve alors

$$(\,\Box + k_1^2)(\,\Box + k_2^2)A^\alpha = 4\pi(k_2^2 - k_1^2)j^\alpha$$

Le premier membre ayant une forme envisagée par M. Bhabha en théorie du champ. Comme $F^{\alpha\beta}_{\beta} = A^\alpha_{\beta\beta} = -\,\Box A^\alpha$, on retrouve aisément l'équation de Lagrange (2) car celle-ci peut s'écrire

$$\Box\,\Box A^\alpha + (k_1^2+k_2^2)\,\Box A^\alpha + k_1^2k_2^2A^\alpha = 4\pi(k_2^2-k_1^2)j^\alpha$$

Pour achever de raccorder l'équation de Lagrange avec nos conceptions antérieures, nous l'écrirons sous la forme

$$-F^{\alpha\beta}_{\beta} = 4\pi J^\alpha$$

avec$J^\alpha = \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\left[(k_2^2-k_1^2)j^\alpha - \frac{F^{\alpha\beta}_{\beta\gamma^2}}{4\pi} - \frac{k_1^2k_2^2}{4\pi}A^\alpha\right]$ d'où $J^\alpha_\alpha = 0$ (car $A^\alpha_\alpha = 0$ et $-F^{\alpha\beta}_{\alpha\beta\gamma^2} = -\,\Box\,\Box A^\alpha_\alpha = 0$).

J^α correspond dans nos premières conceptions au courant total. Dans le cas d'une charge ponctuelle immobile, la composante de temps $(J^4/i) = \sigma$ s'exprimera en fonction de $(j^4/i) = \epsilon\delta(r)$ par

$$\sigma = \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\left[(k_2^2-k_1^2)\epsilon\delta(r) + (\Delta\mathrm{div}\vec{E} - k_1^2k_2^2V)\frac{1}{4\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\left[(k_2^2-k_1^2)\epsilon\delta(r) - \frac{1}{4\pi}\Delta(k_1^2V_1 + k_2^2V_2) - \frac{k_1^2k_2^2}{4\pi}(V_1+V_2)\right]$$

$$\sigma = -\frac{k_1^2}{4\pi}V_1 - \frac{k_2^2}{4\pi}V_2$$

car $\Delta V_1 = k_1^2V_1 - 4\pi\epsilon\delta(r)$ et $\Delta V_2 = k_2^2V_2 + 4\pi\epsilon\delta(r)$.

Nous retrouverons bien la valeur de σ introduite précédemment avec "l'escamotage" des termes en δ, origine des divergences.

Remarquons cependant que l'ancienne forme de la théorie n'est pas identique à la nouvelle. L'ancienne repose en effet sur les équations "sans second membre" de la page précédente auxquelles on ajoute, après escamotage des termes en δ, les équations "avec second membre"

$$\mathrm{div}\vec{E} = -k_1^2V_1 - k_2^2V_2 \quad , \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H} + k_1^2\vec{A}_1 + k_2^2\vec{A}_2$$

Comme V_1 et $V_2, \vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ figurent séparément dans ces équations, on voit qu'on n'a pas complètement "unifié" le champ car l'unification complète exigerait de ne plus voire figurer dans les équations que $V = V_1 + V_2$ et $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

Dans la nouvelle forme de la théorie, au contraire, on ajoute aux équations sans second membre les équations (2) où ne figurent plus que les potentiels "unifiés", mais où au second membre figurent les termes en $\delta(r)$ qui ne sont pas escamotés. On peut dire que la première forme de la théorie fait disparaître les termes en δ, mais ne réalise pas une unification complète des grandeurs de champ tandis que la seconde forme réalise l'unification complète des grandeurs de champs (y compris les potentiels), mais fait intervenir explicitement les termes en δ. Les deux formes ne sont donc pas équivalentes et c'est pourquoi elle peuvent conduire, comme nous allons le voir, à des conséquences différentes. Mais ni l'une ni l'autre n'opèrent complètement l'incorporation du corpuscule au champ car elles reposent toutes les deux sur des équations aux dérivées partielles linéaires qui contiennent, explicitement dans la seconde, implicitement dans la première, des termes de sources arbitrairement surajoutés.

Tenseur énergie-impulsion

Dans mon mémoire d'avril 1951, j'avais considéré dans le cadre du formalisme précédent le tenseur énergie-impulsion qui n'est pas symétrique

$$4\pi T^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\alpha_\mu}A^\alpha_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\alpha_{\beta\mu}}A^\alpha_{\beta\nu} + \frac{\partial}{\partial_{\mu\beta}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\alpha_{\mu\beta}}\right)A^\alpha_\nu$$

$$= \delta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\beta}_{\gamma}F^{\alpha\beta}_{\gamma} + \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{k_1^2k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\alpha A^\alpha\right]$$
$$-F^{\alpha\mu}A^\alpha_\nu + \frac{1}{k_1^2+k_2^2}\times$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}_{\mu\beta} + F^{\alpha\mu}_{\beta^2}\right)A^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\left(F^{\alpha\beta}_{\mu} + F^{\alpha\mu}_{\beta}\right)A^\alpha_{\beta\nu}\right]$$

Dans ma note de janvier 1952, j'avais indiqué un autre tenseur $T^{\mu\nu}$ pouvant être adopté

$$4\pi T^{\mu\nu} = -\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\nu}_{\gamma^2}F^{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\beta}_{\mu}F^{\alpha\beta}_{\nu}$$
$$+F^{\alpha\mu}F^{\alpha\nu} + \frac{k_1^2k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\mu A^\nu - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

Ces deux tenseurs satisfont à la condition de conservation $T^{\mu\nu}_\mu = 0$ qui exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Si l'on calcule l'énergie propre d'une particule ponctuelle immobile liée au champ des photons et à un champ de mésons de spin 1, on trouve avec l'un ou l'autre de ces tenseurs

$$\begin{aligned} W_0 &= -\int T_{44} d\tau \\ &= -\int \tfrac{1}{4\pi}\left[\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{k_1^2+k_2^2} F_j^{i4} F_j^{i4} + \tfrac{1}{2} F^{i4} F^{i4}\right] d\tau \end{aligned}$$

avec i, j = 1, 2 3. D'où:

$$\begin{aligned} W_0 &= \int \tfrac{1}{8\pi} E^2 d\tau + \tfrac{1}{8\pi}\tfrac{1}{k_1^2+k_2^2}\int (\Delta V)^2 d\tau \\ &= \int \tfrac{1}{8\pi} E^2 d\tau + \tfrac{1}{8\pi}\tfrac{1}{k_1^2+k_2^2}\int (k_1^2 V_1 + k_2^2 V_2)^2 d\tau \end{aligned}$$

puisque

$$\int F_j^{i4} F_j^{i4} d\tau = \int \sum_{i,j}\left(\frac{\partial E_i}{\partial x^j}\right)^2 d\tau = \int (\Delta V)^2 d\tau$$

en raison de la symétrie sphérique et

$$\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = -k_1^2 V_1 - k_2^2 V_2$$

Finalement comme $k_2 \gg k_1,\ k_1 \simeq 0$ et $\epsilon = -e$, on trouve

$$W_0 = \int \frac{1}{8\pi} E^2 d\tau + \frac{\epsilon^2 k^2}{4} = \frac{\epsilon^2 k^2}{2}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi}\frac{1}{k_1^2+k_2^2} \int (k_1^2 V_1 + k_2^2 V_2)^2 d\tau &\simeq \frac{k_2^2}{2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{r^2} e^{-2k_2 r} r^2 dr \\ &= \frac{\epsilon^2 k_2^2}{2}\int_0^\infty e^{-2k_2 r} dr = \frac{\epsilon^2 k_2}{4} \end{aligned}$$

et nous avons déjà trouvé :

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2 d\tau = \frac{\epsilon^2 k_2}{4}$$

La valeur de W_0 ainsi trouvée est le double de celle que nous avions trouvée précédemment en posant

$$W_0 = \frac{1}{2}\int \sigma V d\tau = \frac{1}{8\pi}\int E^2 d\tau.$$

Cette nouvelle valeur de W_0, déjà annoncée par Stuckelberg et calculée par Bopp en 1940 dans le cadre d'une autre forme de théorie du champ soustractif qui réalise moins bien que les deux précédentes l'unification des champs de bosons de spin 1, conduit en posant toujours $m_0 c^2 = W_0$ à la valeur de la masse propre de méson de constante k_0

$$\mu_0 = 2 \times 137 m_0 = 274\, m_0$$

moitié de celle que nous avions trouvée précédemment. Cette nouvelle valeur de m_0 a le grand intérêt de coïncider à peu près exactement avec la masse que l'on attribue aujourd'hui au méson π. Il se peut que cette coïncidence soit fortuite, mais elle est néanmoins curieuse.

La valeur de $\mu_0 = 548\mu_0$ que j'avais d'abord trouvée résultait-elle d'une erreur de calcul ? Je ne le crois pas, je crois qu'elle résultait de la première forme que j'avais donnée à la théorie. Dans cette première forme, j'admettais en effet que le champ unifié $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ lié à l'électron obéissait aux équations

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{E} \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H} - 4\pi\vec{j} \qquad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\sigma$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{-k_1^2 V_1 - k_2^2 V_2}{4\pi} \text{ et } \vec{j} = \frac{-k_1^2\vec{A}_1 - \vec{k}_2^2 A_2}{4\pi}$$

On peut donc dire dans cette forme de la théorie que le champ unifié $\vec{E}, \vec{H}$ obéit exactement aux équations ordinaires de Maxwell avec les termes de sources $4\pi\sigma$ et $-4\pi\vec{j}$. Le raisonnement que l'on fait habituellement pour trouver en théorie de Maxwell la densité de l'énergie conduit alors à prendre pour la densité de l'énergie l'expression usuelle $W = (1/8\pi)(E^2 + H^2)$ qui, appliquée au cas statique d'un électron immobile donne bien

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{8\pi}\int E^2 d\tau = -\frac{1}{8\pi}\int \vec{E}\mathrm{grad}V d\tau \\ &= \frac{1}{8\pi}\int V \mathrm{div}\vec{E} d\tau = \frac{1}{2}\int \sigma V d\tau. \end{aligned}$$

J'étais donc bien logiquement arrivé à la valeur $W_0 = (e^2 k_2/4)$ donnant $\mu_0 = 548 m_0$. La seconde forme de la théorie conduit à ajouter dans l'expression de W_0 le terme

$$\frac{1}{8\pi}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}\int (\Delta V)^2 d\tau$$

qui, nous l'avons vu, double sa valeur et fournit une valeur moitié moindre de μ_0. Les deux formes ne sont donc pas, comme nous l'avions déjà dit, équivalentes bien que très apparentées et la seconde forme, fondée sur le Lagrangien de Podolsky, parce qu'elle unifie toutes les grandeurs de champs (y compris les potentiels) et qu'elle fournit l'intéressante valeur $\mu_0 = 274 m_0$ parait préférable.

Nous avons vu que l'on avait

$$T_\mu^{\mu\nu} = 0$$

Nous verrons que, quand on a cette relation de conservation pour une charge à symétrie sphérique, on a aussi dans le système propre de la particule

$$\int T^{ii} d\tau = \mu \text{ sans sommation sur } i \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Il est facile de vérifier ces relations avec les deux définitions des $T^{\mu\nu}$ que nous avons envisagées. Le principe de l'inertie de l'énergie est alors satisfait.

Nous pourrons en conclure que la théorie du champ soustractif introduit automatique une “pression de Poincaré” qui assure la validité de la relation $T_\mu^{\mu\nu} = 0$, ce qui constitue une importante supériorité de la théorie du champ soustractif sur la théorie classique de Lorentz. Comme ce point est très intéressant, j'en ferai plus loin une étude spéciale.

Le fait que le formalisme Lagrangien précédent conduit à interpréter la pression de Poincaré alors que, nous le verrons, la première forme ne peut pas le faire est aussi une supériorité marquée de la deuxième forme de la théorie du champ soustractif sur la première.

Généralisation au cas de plus de 2 champs

Dans ma troisième note (avril 1952), j'ai examiné la généralisation du formalisme lagrangien au cas où il y a plus de deux champs de bosons de spin 1 liés à la particule.

Pour cela, admettons que pour chacun des n champs liés à la particule on peut écrire

$$\Box A^\alpha_{(i)} + k_i^2 A^\alpha_{(i)} = 4\pi j^\alpha_{(i)} \qquad (i = 1, 2, ...n) \quad (3)$$

la constante k_i étant toujours reliée à la masse propre μ_{0i} de la i-ième sorte de bosons par la relation $k_i = (2\pi/h)\mu_{0i}c$. On a aussi

$$j^\alpha_{(i)} = \epsilon_i \delta(\vec{r}_0) u^\alpha$$

où ϵ_i est la “charge” de la particule par rapport au i-ième champ de bosons et u^α la vitesse d'univers de cette particule. Pour généraliser le formalisme de Podolsky, nous poserons

$$(\Box + k_1^2)(\Box + k_2^2)...(\Box + k_n^2) A^\alpha = 4\pi K J^\alpha \qquad (4)$$

avec

$$A^\alpha = A^\alpha_{(1)} + A^\alpha_{(2)} + \cdots + A^\alpha_{(n)} = \sum_{i=1}^n A^\alpha_{(i)}$$

J^α est la “moyenne” pondérée de j^α définie par la formule

$$J^\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i}{k_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i^2}} \delta(\vec{r}_0) u^\alpha$$

Nous voulons, en partant des équations, voir sous quelles conditions l'on peut obtenir (4) en partant de (3).

Prenons d'abord le cas $n = 2$ que nous avons déjà étudié. Nous obtenons à partir de (3)

$$(\Box + k_1^2)(\Box + k_2^2)(A^\alpha_{(1)} + A^\alpha_{(2)}) = 4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) u^\alpha \Box\delta + 4\pi(\epsilon_1 k_2^2 + \epsilon_2 k_1^2)\delta u^\alpha$$

Etudions le second terme du second membre : nous pouvons l'écrire

$$4\pi(k_1^2 + k_2^2) \frac{\frac{\epsilon_1}{k_1^2} + \frac{\epsilon_2}{k_2^2}}{\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}} \delta(r) u^\alpha$$

Ce qui est bien de la forme KJ^α avec la définition donnée plus haut du courant pondéré J^α. Si nous admettons conformément à la théorie du champ soustractif que $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$, le premier terme du second membre qui contient la fonction singulière $\Box\delta$ disparaît et il reste, en posant $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$:

$$(\Box + k_1^2)(\Box + k_2^2) A^\alpha = 4\pi(k_2^2 - k_1^2) j^\alpha$$

ce qui est bien la formule que nous avions plus haut. Nous savons que, grâce à la forme particulière du second membre de source dans l'équation précédente, nous avons ainsi éliminé les valeurs infinies en $r = 0$ et les divergences qui en résultent. Or nous voyons que l'hypothèse $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ sert non seulement à donner au deuxième membre la forme voulue, mais aussi à éliminer les termes singuliers en $\Box\delta$.

Passons maintenant au cas de $n = 3$. Les équations (3) nous donnent alors

$$\begin{aligned}(\Box + k_1^2)(\Box + k_2^2)(\Box + k_3^2)(A^\alpha_{(1)} + A^\alpha_{(2)} + A^{(\alpha)}_{(3)}) &= 4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) u^\alpha \Box\Box\delta \\ &+ 4\pi[\epsilon_1(k_2^2 + k_3^2) \\ &+ \epsilon_2(k_3^2 + k_1^2) + \epsilon_3(k_1^2 + k_2^2)] u \Box\delta \\ &+ 4\pi(\epsilon_1 k_2^2 k_3^2 + \epsilon_2 k_3^2 k_1^2 + \epsilon_3 k_1^2 k_2^2)\delta u^\alpha\end{aligned}$$

Ici pour éliminer les termes singuliers en $\Box\delta$ et $\Box\Box\delta$, il ne suffit plus de poser $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \sum_i \epsilon_i = 0$ il faut aussi poser

$\sum_i \epsilon_i k_i^2 = 0$ compte tenu de la première condition

car on a

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 0$$

d'où

$$\epsilon_1(k_2^2 + k_3^2) + \epsilon_2(k_3^2 + k_1^2) + \epsilon_3(k_1^2 + k_2^2) = -(\epsilon_1 k_1^2 + \epsilon_2 k_2^2 + \epsilon_3 k_3^2)]$$

On doit alors poser $K = k_1^2 k_2^2 + k_2^2 k_3^2 + k_3^2 k_1^2$ et on retrouve l'équation (4) avec la définition admise de J^α. On a donc ici deux conditions pour éviter les valeurs infinies qui sont

$$(I) \quad \sum_i \epsilon_i = 0 \qquad\qquad (II) \quad \sum_i \epsilon_i k_i^2 = 0$$

Pour $n = 4$, on obtient de la même manière, en plus des deux conditions précédentes, la condition supplémentaire

$$\epsilon_1(k_2^2 k_3^2 + k_3^2 k_4^2 + k_4^2 k_2^2) + ... = 0$$

qui, compte tenu de (I) et de (II), donne

$$(III) \qquad \sum_i \epsilon_i k_i^4 = 0$$

On retrouve l'équation (4) avec toujours la même définition du courant pondéré en posant

$$K = k_1^2 k_2^2 k_3^2 + ...$$

D'une façon générale, quand on passe du cas de $n-1$ champs de bosons de spin 1 au cas n champs de bosons de spin 1, la condition

$$\sum_i^n \epsilon_i k_i^{2(n-2)} = 0$$

vient s'ajouter aux précédentes de sorte que pour n champs de bosons de spin 1 liés à la particule, on doit s'imposer les $(n-1)$ conditions

$$\sum_1^n \epsilon_i k_i^{2(p-2)} = 0 \qquad \text{avec } 2 \leq p \leq n$$

Comme chaque champ mésique introduit deux constantes ϵ_i et μ_{0i}, on trouve ainsi finalement $n-1$ conditions entre $2n$ constantes. Il y a donc seulement $n+1$ constantes indépendantes, les autres se déduisant de celles-là par les conditions qui les lient.

Dans le cas $n = 2$, on a donc trois constantes indépendantes qui sont l'une des deux charges ϵ_i et les deux masses propres μ_{0i} et μ_{02}.

Si l'un des champs de bosons de spin 1 est un champ électromagnétique de photons, on peut poser $\mu_{01} \simeq 0$ et supposer connue la charge ϵ_1 (qui est alors la charge électrique de la particule au sens usuel du mot) et l'on a encore $2(n-1)$ constantes liées par $n-1$ conditions, soit $n-1$ constantes inconnues indépendantes. Si l'on connaissait la liste exacte des mésons de spin 1 avec leurs masses μ_{0i}, on devrait pouvoir vérifier les conditions trouvées plus haut.

La théorie que nous venons d'esquisser a certainement des rapports avec la “théorie de la renormalisation de la masse” due à M. Pauli où les conditions (I) et (II) sont déjà bien connues.

Je n'insisterai pas sur les applications que l'on pourrait tenter de faire des formules précédentes pour la prévisions des masses des mésons de spin 1. Nos connaissances sur les mésons et les bases de la théorie du champ soustractif sont encore, les unes et les autres, trop imparfaites pour que cela soit vraiment intéressant.

Indications que la deuxième méthode peut fournir sur la “véritable unification” des champs

Dans le dernier paragraphe, nous sommes partis des équations

$$(\Box + k_i^2) A^\alpha_{(i)} = 4\pi j^\alpha_{(i)} = 4\pi \epsilon_i \delta(\vec{r}) \quad (i = 1, 2, ...n)$$

qui expriment la liaison de chacun des n champs de bosons avec la particule de charge $\epsilon_1 ... \epsilon_n$. Puis nous avons “unifié” les n champs en posant

$$A^\alpha = A^\alpha_{(1)} + A^\alpha_{(2)} + ...A^\alpha_{(n)}$$

et en admettant des relations entre les $2n$ constantes ϵ_i et μ_{0i}, nous avons écrit comme équation exprimant la liaison du champ unifié avec la particule

$$(\Box + k_1^2)(\Box + k_2^2)...(\Box + k_n^2) A^\alpha = 4\pi K J^\alpha$$

où la constante K et le quadrivecteur J^α s'expriment à l'aide des constantes ϵ_i et μ_{0i}.

Nous pouvons aussi exprimer ceci de la manière suivante. Si l'équation du i-ième champ de bosons “non lié” est

$$L_i A^\alpha_{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, ...\mu)$$

L_i étant un opérateur linéaire contenant des dérivées par rapport aux variables d'espace-temps mais non ces variables elles-mêmes, de sorte que $L_i L_j = L_j L_i$, quels que soient i et j. En unifiant le champ par la définition

$$A^\alpha = \sum_1^n A^\alpha_{(i)}$$

on peut écrire

$$L_1 L_2 ... L_n A^\alpha = 0$$

ce qui est exact, mais ne lie aucunement les champs entre eux. Si l'on veut exprimer la liaison introduite entre les champs par la présence d'une particule possédant les charges “bosoniques” $\epsilon_1 ... \epsilon_2$, on introduira arbitrairement au second membre de l'équation précédente un tenseur de source de la forme $4\pi K J^\alpha$ où K et J^α seront convenablement définis en fonction des μ_{0i} (qui figurent déjà dans les L_i) et les charges ϵ_i, ces $2n$ constantes étant reliées par des relations également arbitrairement postulées. Maintenant, la ligne d'idées que nous avons suivie dans ce cours nous porte à penser qu'en réalité le terme de source du second membre de l'équation

$$L_1 L_2 ... L_n A^\alpha = 4\pi K J^\alpha$$

n'est qu'une représentation très imparfaite de la liaison réalisée entre les champs par la présence de la particule. La représentation exacte consisterait sans doute à remplacer le second membre par des termes non linéaires en A^α (et leurs dérivées). Ces termes non linéaires ne seraient importants que dans la très petite région singulière de la particule et réaliseraient dans cette région la soudure des champs entre-eux. A l'extérieur de la région singulière, les termes non linéaires devenant négligeables, chacun des $A^\alpha_{(i)}$ serait très sensiblement solution de $L_i A^\alpha_{(i)} = 0$. Dans le problème extérieur, chaque $A^\alpha_{(i)}$ serait proportionnel à une solution de $L_i A^\alpha_{(i)} = 0$ qui présenterait une singularité en $\frac{1}{r}$ au centre de la région singulière si l'équation linéaire était encore valable dans cette région, mais le champ unifié $A^\alpha = \sum_i^n A^\alpha_{(i)}$ serait obtenu en faisant la somme de ces solutions singulières avec des coefficients bien déterminés, ces coefficients étant déterminés par la non linéarité locale dans la région singulière. Ce sont là des idées que la théorie de la double solution nous a rendues familières.

Considérons de nouveau le cas simple d'une particule immobile liée à deux champs de mésons de constantes k_1 et k_2. Dans le problème extérieur nous poserons $(\Box+k_1^2)A^4_{(1)} = 0$ et $(\Box+k_2^2)A^4_{(2)} = 0$ et nous aurons les solutions de Yukawa $(1/r)e^{-k_1 r}$ et $(1/r)e^{-k_2 r}$. Nous pourrions alors poser

$$V = \frac{A^4}{i} = \frac{C_1}{r}e^{-k_1 r} + \frac{C_2}{r}e^{-k_2 r}$$

avec C_1 et C_2 arbitraires et nous aurions une solution de l'équation linéaire

$$(\Box+k_1^2)(\Box+k_2^2)A^4 = 0$$

Mais la véritable équation du champ unifié est

$$(\Box+k_1^2)(\Box+k_2^2)A^\alpha = \begin{pmatrix} \text{fonction non linéaire} \\ \text{des } A^\alpha \text{et des dérivées,} \end{pmatrix}$$

le second membre n'étant important que dans la région singulière. L'obligation de satisfaire à l'équation non linéaire dans la région singulière imposerait à C_1 et C_2 d'avoir les valeurs bien définies $C_1 = \epsilon$ et $C_2 = -\epsilon$ et nous aurions

$$V = \epsilon \frac{e^{-k_1 r} - e^{-k_2 r}}{r}$$

forme que nous connaissons bien.

Nous entrevoyons donc une méthode pour réaliser l'unification des champs de bosons et leur liaison avec une particule par des termes non linéaires. Mais, comme je l'ai dit, il serait indispensable d'introduire dans le champ l'onde u de la particule elle-même (qui peut ne pas être un boson et avoir une onde u spinorielle) de façon à réaliser la soudure dans la région singulière de cette onde u avec tous les champs de bosons de spin 1 (photons ou mésons) qui doivent chacun comporter par ailleurs une infinité de régions singulières qui leur sont propres et qui constituent les bosons liés aux divers champs. Il faudrait aussi sans doute introduire des champs de bosons ayant un spin entier (en unités $\frac{h}{2\pi}$), mais différents de 1 (0, 2, 3 ...). En particulier, c'est de cette manière que devrait s'introduire le champ gravifique, s'il est vrai que les "gravitons" sont des bosons de spin 2.

Mais tout ceci n'est évidemment qu'un programme assez vague dont la réalisation détaillée, si elle est possible, n'est pas encore pour demain.

La pression de Poincaré et son interprétation dans la théorie du "champ soustractif"

La pression de Poincaré dans la théorie de l'électron de Lorentz

Dans sa théorie des électrons, Lorentz, pour éviter de trouver des énergies infinies, considérait l'électron non pas comme ponctuel, mais comme étendu. Dans son système propre, l'électron serait dans une petite sphère remplie d'électricité avec une densité $\rho_0(r_0)$. Dans un système galiléen, où l'électron est en mouvement avec la vitesse v, les équations du champ électromagnétique s'écrivent

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{E}, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H} - 4\pi\rho\vec{v}, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

avec $\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$.

Le tenseur énergie-impulsion T prend dans le système propre où ne subsiste que le champ électromagnétique $\vec{E}_0$ la forme :

$$T_0 = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_0^2 - E_{0x}^2 & E_{0x}E_{0y} & E_{0x}E_{0z} & 0 \\ E_{0y}E_{0x} & \frac{1}{2}E_0^2 - E_{0y}^2 & E_{0y}E_{0z} & 0 \\ E_{0z}E_{0x} & E_{0z}E_{0y} & \frac{1}{2}E_0^2 - E_{0z}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}E_0^2 \end{pmatrix}$$

Les T_0^{4i} et T_0^{i4} sont nuls parce qu'ils sont égaux respectivement aux flux d'impulsion et d'énergie qui sont évidemment nuls dans le système si l'électron est en repos.

Si l'on désigne par $\vec{G}$ la quantité de mouvement et par W l'énergie dans un système galiléen quelconque, on a

$$G_x = \int \frac{i}{c}T^{14}d\tau \;\ldots\; W = -\int T^{44}d\tau$$

et, si le mouvement s'opère dans le sens x, G_y et G_z sont évidemment nuls.

Les formules de transformation du tenseur T quand on passe du système propre au système où l'électron a la vitesse v parallèle à 0x sont

$$T^{14} = \frac{i\beta(T_0^{44} - T_0^{11})}{1-\beta^2}\ , T^{44} = \frac{T_0^{44} - \beta^2 T_0^{11}}{1-\beta^2}$$

Si nous intégrons dans l'espace en tenant compte de ce que $dV = dV_0\sqrt{1-\beta^2}$ d'après la contraction de Lorentz, nous obtenons

$$G_x = \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\int(-T_0^{44} + T_0^{11})dV_0$$

$$W = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \int (T_0^{44} - \beta^2 T_0^{11}) dV_0$$

Or, nous l'avons vu, on a $T_0^{11} = \frac{1}{8\pi}E_0^2 - \frac{1}{4\pi}E_{0x}^2$ d'où

$$\int T_0^{11} dV_0 = \int (\frac{1}{8\pi}E_0^2 - \frac{1}{4\pi}E_{0x}^2) dV_0 = \frac{1}{3}W_0$$

car, en raison de la symétrie sphérique dans le système propre,

$$\int E_{0x}^2 dV_0 = \frac{1}{3}\int E_0^2 dV_0$$

et

$$\begin{aligned}\int T_0^{11} dV_0 &= \frac{1}{8\pi}\int (E_0^2 - \frac{2}{3}E_0^2) dV_0 \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{8\pi}\int E_0^2 dV_0 = \frac{1}{3}W_0\end{aligned}$$

On trouve donc

$$G_x = \frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad W = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right)$$

Et nous nous apercevons que ces résultats ne sont pas conformes à la dynamique de la relativité suivant laquelle nous devrions obtenir

$$\vec{G} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Si nous examinons l'origine de cette difficulté, nous voyons qu'elle provient de ce que nous n'avons pas $\int T_0^{11} dV_0 = 0$. Si nous avions cette relation tout rentrerait dans l'ordre.

Quand on y réfléchit, on s'aperçoit que l'électron conçu à la façon de Lorentz ne peut pas être stable. Les diverses parties d'une distribution d'électricité étendue se repoussant mutuellement, l'électron de Lorentz tend à faire explosion.

Si l'on considère un petit élément de volume $dx_0 dy_0 dz_0$ dans le système propre, la définition des tensions de Maxwell montre (par un raisonnement bien connu en théorie de l'Elasticité) que cet élément est soumis à une force $\vec{f}$ dont les composantes sont données par

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} ...$$

soit en notation condensée

$$f^\mu = T_\nu^{\mu\nu}$$

(puisque dans le système propre les dérivées par rapport au temps sont nulles). On démontre d'ailleurs en théorie électromagnétique que

$$f^\mu = F^{\mu\alpha} j^\alpha$$

de sorte les trois composantes d'espace de f_μ sont les composantes de la force de Lorentz tandis que la composante de temps de f^μ (nulle dans le système propre) est le travail par unité de temps de la force de Lorentz.

Finalement, dans la théorie de l'électron de Lorentz, les divers éléments de volume de l'électron sont soumis à des forces non nulles qui tendent à le faire éclater et cela parce que la divergence quadrimensionnelle $T_\nu^{\mu\nu}$ du tenseur $T^{\mu\nu}$ n'est pas nulle.

Nous allons voir que si $T_\nu^{\mu\nu}$ était nulle, c'est à dire si l'électron était stable, nous aurions $\int T_0^{11} dV_0 = 0$. En effet, si $T_\nu^{\mu\nu} = 0$, on peut écrire dans le système propre où les composantes T_0^{i4} et les dérivées par rapport au temps sont nulles.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T_0^{ik} = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

d'où

$$x^k \frac{\partial}{\partial x^i} T_0^{ik} = 0$$

et par suite

$$\iiint x^k \frac{\partial}{\partial x^i} T_0^{ik} dV_0 = 0$$

Les T^{ik} étant nulles à l'infini plus fortement que $(1/x^k)$, on peut par une intégration par partie transformer la dernière équation en

$$-\iiint \frac{\partial x^k}{\partial x^i} T_0^{ik} dV_0 = -\iiint \delta_{ik} T_0^{ik} dV_0 = 0$$

ou

$$\sum_i^3 \iiint T_0^{ii} dV_0 = 0$$

Comme, par raison de symétrie sphérique

$$\iiint T_0^{11} dV_0, \iiint T_0^{22} dV_0 \text{ et } \iiint T_0^{33} dV_0$$

sont égales, on trouve bien que ces trois intégrales sont nulles séparement.

Nous arrivons à la conclusion suivante. Pour assurer la stabilité de l'électron et pour retrouver correctement les expressions relativistes de l'énergie et de l'impulsion, il est nécessaire d'introduire dans le tenseur $T^{\mu\nu}$ des termes de tensions qui, dans le système propre, équilibrent l'action "explosive" du champ électrostatique et, en assurant la validité de la relation $(\partial/\partial x^i) T_0^{ik} = 0$ pour $k = 1, 2, 3$, et par suite la nullité de $\iiint T_0^{11} dV_0$, rétabliraient l'accord avec les expressions correctes relativistes pour l'impulsion et l'énergie.

Henri Poincaré, qui avait développé la Dynamique relativiste (notamment dans son grand mémoire de 1909 dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo) avant que la théorie de Relativité n'ait trouvé son épanouissement dans les travaux d'Albert Einstein, avait bien remarqué tout ceci et il en avait conclu qu'il fallait introduire dans la théorie de l'électron une pression non électromagnétique pour contrebalancer l'action explosive des forces électromagnétiques. C'est ce que l'on nomme depuis lors "la pression de Poincaré".

Mais dans la théorie de l'électron de Lorentz, on ne voit pas d'où provient cette pression et on ne sait pas l'interpréter de sorte que la difficulté reste entière. Nous allons voir que la théorie du champ soustractif, en introduisant à côté du champ électromagnétique de l'électron un champ mésonique, permet de retrouver la pression de Poincaré et en montrer l'origine.

La pression de Poincaré dans la théorie du champ soustractif

Reprenons la théorie de l'électron avec l'hypothèse du champ soustractif. L'électron est liée à la fois au champ électromagnétique des photons de constante $k_1 \simeq 0$ et à un champ de bosons de spin 1 (le champ mésonique) de constante k_2 très grande. Le champ unifié défini par $A^\alpha = A_1^\alpha + A_2^\alpha$... obéit aux équations

$$F^{\alpha\beta} = A^\alpha_\beta - A^\beta_\alpha \qquad A^\alpha_\alpha = 0 \qquad F^{\alpha\beta}_\gamma + F^{\beta\gamma}_\alpha + F^{\gamma\alpha}_\beta = 0$$

$$\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\beta}_{\beta\gamma^2} - F^{\alpha\beta}_\beta + \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\alpha = 4\pi\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2+k_2^2}j^\alpha$$

Nous adopterons le deuxième des tenseurs $T^{\mu\nu}$ que nous avons considéré, dont je donne à nouveau l'expression

$$4\pi T^{\mu\nu} = -\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\nu}_{\gamma^2}F^{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2}F^{\alpha\beta}_\mu F^{\alpha\beta}_\nu$$

$$+F^{\alpha\mu}F^{\alpha\nu} + \frac{k_1^2k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\mu A^\nu - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

avec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{k_1^2+\ k_2^2}F^{\alpha\beta}_\gamma F^{\alpha\beta}_\gamma + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{k_1^2k_2^2}{k_1^2+k_2^2}A^\alpha A^\alpha\right]$$

Si l'on calcule la divergence quadridimensionnelle de $T^{\mu\nu}$, on trouve après un calcul un peu long que je ne reprends pas

$$T^{\mu\nu}_\nu = F^{\mu\alpha}\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2}j^\alpha$$

ce qui donne dans le système propre où l'électron est immobile

$$T^{ik}_{0k} = F^{i4}\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2}j^4 = E_0^i\frac{k_1^2-k_2^2}{k_1^2+k_2^2}\epsilon\delta(r_0) \simeq E_0^i\epsilon\delta(r_0)$$

Cette formule prouve que, sauf au point $r_0 = 0$ siège de la particule, $T^{ik}_k = 0$.

Que se passe-t-il au point $r_0 = 0$? Nous avons vu qu'en ce point les E_0^i qui sont très grands sans être infinis sont discontinus en ce sens que, si l'on traverse le point $r_0 = 0$ en suivant une droite, le vecteur $\vec{E}_0$ très grand se retourne brusquement. M. Bopp a remarqué que cette circonstance permet de considérer $\vec{E}_0(0)$ comme nul : tout se passe comme si le corpuscule ponctuel placé en $r_0 = 0$ était tiré de tous les côtés également par des forces très grandes qui se font équilibre et, comme une singularité ponctuelle ne peut pas "éclater", tout se passe comme si la force totale qui s'exerce sur le corpuscule était nulle. La même conclusion serait exacte en théorie de Lorentz, si l'on y considérait l'électron comme ponctuel en posant $\rho_0 = \epsilon\delta(\vec{r}_0)$, mais alors le champ électrostatique serait infini en $r_0 = 0$ et la masse de l'électron serait infinie. La théorie du champ soustractif a l'avantage d'éviter ces valeurs infinies tout en profitant toujours du fait qu'une singularité soumise à l'action de forces très grandes qui agissent isotropiquement dans toutes les directions ne peut pas "éclater".

Bref, nous pouvons admettre que nous avons dans le système propre

$$T^{ik}_{0k} = 0 \qquad \text{avec } i,k = 1,2,3.$$

Nous avons vu que cette relation assure la stabilité de l'électron et qu'elle entraîne $\iiint T_0^{11}dV_0 = 0$..., ce qui permet de retrouver les expressions relativistes correctes de l'énergie et de l'impulsion du corpuscule.

A titre d'exercice, nous allons vérifier que l'on a bien

$$\iiint T_0^{11}dV_0 = 0$$

Nous nous plaçons dans le système propre où les dérivées en t sont nulles et où seules les grandeurs $A^4 = iV_0$ et $F^{i4} = iE_0^i$ sont différentes de zéro. Nous pouvons alors vérifier que, en négligeant k_1^2 devant k_2^2

$$-\frac{\mathcal{L}}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}E_0^2 + \frac{1}{8\pi k_2^2}(\Delta V_0)^2$$

Appelons $W_0^{(e)}$ l'énergie électrostatique classique

$$W_0^{(e)} = \frac{1}{8\pi}\int E_0^2 d\tau_0$$

Nous avons vu précédemment, en calculant la masse propre de l'électron, que

$$\frac{1}{8\pi k_2^2}\int(\Delta V_0)^2 d\tau_0 = \frac{1}{8\pi}\int k_2^2 V_0^2 d\tau_0 = W_0^{(e)}$$

et c'est ce résultat qui, dans la deuxième forme de la théorie, nous a conduit à doubler la valeur de $W_0 = m_0c^2$ trouvée dans la première forme de la théorie ($W_0 = 2W_0^{(e)}$ au lieu de $W_0 = W_0^{(e)}$).

Dans l'expression de T_0^{11}, les termes purement électrostatiques (c'est-à-dire qui sont indépendants de k_2) sont $(1/8\pi)E_0^2$ provenant de $\mathcal{L}$ et $-(1/4\pi)E_{0x}^2$

provenant de $F^{\alpha\mu}F^{\alpha\nu}$ et, comme par raison de symétrie $\int E_0^2 d\tau_0 = \frac{1}{3}E_0^2 d\tau_0$, on trouve

$$\int T_0^{11} d\tau_0 = \int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{E_0^2}{2} - E_{0x}^2\right) + \text{ termes en } k_2$$

$$= \frac{1}{3}W^{(e)} + \frac{1}{4\pi k_2^2}\int\left[\frac{1}{2}(\Delta V_0)^2 - F_{\gamma^2}^{\alpha 1}F^{\alpha 1} + \frac{1}{2}F_1^{\alpha\beta}F_1^{\alpha\beta} d\tau_0\right]$$

Or

$$\begin{aligned} F_{\gamma^2}^{\alpha 1}F^{\alpha 1} &= F_{\gamma^2}^{41}F^{41} = A_{1\gamma^2}^4 A_1^4 = \square \tfrac{\partial V_0}{\partial x_1}\cdot\tfrac{\partial V_0}{\partial x_1} \\ &= -\Delta \tfrac{\partial V_0}{\partial x_1}\tfrac{\partial V_0}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Une intégration par parties, qui introduit un changement de signe, permet de mettre ce terme dans l'intégrale sous la forme

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1^2}\Delta V_0$$

De même, on a le tenseur

$$\frac{1}{2}F_1^{\alpha\beta}F_1^{\alpha\beta} = F_1^{4\beta}F_1^{4\beta} = A_{1\beta}^4 A_{1\beta}^4 = -\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^1 \partial x^\beta}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^1 \partial x^\beta}$$

et, par deux intégrations partielles qui au total n'introduisent aucun changement de signe, on peut faire figurer ce terme dans l'intégrale sous la forme

$$-\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1^2}\Delta V_0$$

Finalement

$$\int T_0^{11} d\tau_0 = \frac{1}{3}W_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi k_2^2}\int\left[\frac{1}{2}(\Delta V_0)^2 - 2\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1^2}\Delta V_0\right] d\tau_0$$

Or, par raison de symétrie sphérique

$$\int \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1^2}\Delta V_0 d\tau_0 = \frac{1}{3}\int(\Delta V_0)^2 d\tau_0$$

de sorte que l'intégrale de l'expression précédente vaut $-\frac{1}{6}\int(\Delta V_0)^2 d\tau_0$ d'où

$$\int T_0^{11} d\tau_0 = \frac{1}{3}W_0^{(e)} - \frac{1}{3}\frac{1}{8\pi k_2^2}\int(\Delta V_0)^2 d\tau_0 = 0$$

puisque

$$\frac{1}{8\pi k_2^2}\int(\Delta V_0)^2 d\tau_0 = W_0^{(e)}$$

Nous savons ainsi que la pression de Poincaré est *automatiquement* introduite dans la théorie du "champ soustractif", du moins sous sa seconde forme lagrangienne. Autrement dit, la pression centrifuge qu'exerce le champ électrostatique quant il est seul se trouve contrebalancée par son amalgame avec le champ mésonique de constante k_2. On peut dire encore que, si la conception lorentzienne classique de l'électron ne parvenait pas à expliquer la stabilité de ce corpuscule, c'est parce qu'elle lui attribuait uniquement un champ électrostatique et ignorait son champ mésonique. Cette manière de lever automatiquement, en en donnant une interprétation, la difficulté classique liée à l'intervention nécessaire de la pression de Poincaré est l'un des aspects séduisants de la théorie du champ soustractif.