Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac

CLAUDE DAVIAU

Fondation Louis de Broglie, 23 Quai Conti, 75006 Paris.

RÉSUMÉ. Après avoir rappelé comment Louis de Broglie a construit un modèle du photon par fusion de deux spineurs de Dirac, on utilise une autre façon d'écrire l'équation de Dirac, avec l'algèbre de Clifford d'espace, et on en regarde les conséquences sur la méthode de fusion. Le résultat est qu'au lieu de construire un champ électromagnétique à valeur complexe, on obtient quatre champs de type bosonique à valeur réelle, vérifiant des équations semblables, et on étudie les symétries internes à cet ensemble de champs.

ABSTRACT. First we recall how Louis de Broglie build a photon model by fusion of two Dirac spinors. We use another way to read the Dirac equation, in the space Clifford algebra, and we see the consequences on the fusion method. While L. De Broglie got one electromagnetic field with complex value, we get four bosonic fields with real value, and similar wave equations, and we study the internal symetries for this set of fields..

La théorie des quanta commence avec la lumière : l'émission et la réception de lumière s'effectuent par paquets, ces paquets seront étudiés par Einstein, le dualisme ondes-corpuscules qui s'y introduit sera généralisé par Louis de Broglie à tout corpuscule. Après la découverte des équations des ondes des corpuscules, Louis de Broglie est revenu à la lumière, et a réétudié le dualisme onde-corpuscule pour le photon. Il comprit que le photon étant un boson et non un fermion, devait être construit non pas à partir d'un spineur, mais de deux spineurs liés. Dans sa théorie de la lumière, Louis de Broglie [1 à 3] part de l'équation de Dirac [4], que l'on écrira ici sous la forme :

$$\psi = 0$$
$$q = \frac{e}{\hbar c}\ ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{1}$$

où e, négatif, est la charge de l'électron et les A_μ sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. La signature utilisée ici pour la métrique d'espace-temps est $+ - - -$, donc les composantes contravariantes de A sont $A^0 = A_0$ et $A^j = -A_j$, $j = 1, 2, 3$. On prendra ici la forme usuelle des matrices de Dirac :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\ ; \quad \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$I = \sigma_0 = \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ; \quad \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ; \quad \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

L. de Broglie associe au photon une onde obtenue à partir de deux spineurs de Dirac $\psi^{(1)}$ et $\psi^{(2)}$ sans charge électrique, de même masse propre égale à la moitié de celle du photon. Ils vérifient donc :

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + i\frac{m}{2})\psi^{(j)} = 0\ ; \quad j = 1,\ 2 \tag{6}$$

Ces spineurs sont liés l'un à l'autre, dans le même état de mouvement, et pour cela les composantes ${\psi_i}^{(1)}$ du premier spineur et les composantes ${\psi_j}^{(2)}$ du second sont liées par les égalités :

$$(\partial_\nu {\psi_i}^{(1)}){\psi_j}^{(2)} = {\psi_i}^{(1)}(\partial_\nu {\psi_j}^{(2)}) = \frac{1}{2}\partial_\nu({\psi_i}^{(1)}{\psi_j}^{(2)}) \tag{7}$$

Avec les quatre composantes du premier spineur et les quatre composantes du second, on obtient 16 produits $\psi_{ij} = {\psi_i}^{(1)}{\psi_j}^{(2)}$, aussi le champ ainsi décrit est à valeur dans $\mathbb{C}^{16}$. A partir de ces 16 composantes,

L. de Broglie considère la matrice 4×4 :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Les équations de Dirac (6), avec les équations de liaisons (7), donnent alors les équations:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\psi = 0 \tag{9}$$
$$\partial_\mu \psi (\gamma^\mu)^t + im\psi = 0 \tag{10}$$

Puis on multiplie ces équations à droite par une matrice adéquate, $\Gamma = 4i\gamma_2\gamma_0$, et comme on a alors $(\gamma^\mu)^t\Gamma = -\Gamma\gamma^\mu$, on obtient:

$$\gamma^\mu \partial_\mu(\psi\Gamma) + im(\psi\Gamma) = 0 \tag{11}$$
$$\partial_\mu(\psi\Gamma)\gamma^\mu - im(\psi\Gamma) = 0 \tag{12}$$

Les γ_j et leurs produits constituent une base de l'espace vectoriel $M_4(\mathbb{C})$ des matrices 4×4 à coefficients complexes, donc on peut poser :

$$\begin{aligned} \psi\Gamma = \mathbf{I}_1 I_4 + im\mathbf{A}^\mu\gamma_\mu + \mathbf{E}^j\gamma_{0j} + \mathbf{H}^j\gamma_{kl} \\ + im\mathbf{B}^\mu\gamma_\mu\gamma_{0123} + \mathbf{I}_2\gamma_{0123} \end{aligned} \tag{13}$$

où $\gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j$ et où (j,k,l) est une permutation circulaire de $(1,2,3)$. On notera ici avec des lettres grasses les grandeurs de la théorie de la lumière, qui sont à valeurs complexes. Avec (11), (12) et (13), on obtient alors des équations qui se répartissent en deux groupes, le premier étant appelées par L. de Broglie équations maxwelliennes :

$$\partial_\mu \mathbf{A}^\mu = 0 \tag{14}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = -m^2\mathbf{A}^0 \tag{15}$$
$$\partial_0\vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} + m^2\vec{\mathbf{A}} \tag{16}$$
$$\vec{\mathbf{E}} = -\partial_0\vec{\mathbf{A}} - \vec{\nabla}\mathbf{A}^0 \tag{17}$$
$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{18}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0 \tag{19}$$
$$\partial_0\vec{\mathbf{H}} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} \tag{20}$$

Le second groupe est constitué par les équations non maxwelliennes :

$$\mathbf{I}_1 = 0 \; ; \quad \partial_0\mathbf{I}_1 = 0 \; ; \quad \vec{\nabla}\mathbf{I}_1 = 0 \tag{21}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 \tag{22}$$
$$\partial_0\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\nabla}\mathbf{B}^0 \tag{23}$$
$$\partial_0\mathbf{I}_2 = m^2\mathbf{B}^0 \tag{24}$$
$$\vec{\nabla}\mathbf{I}_2 = -m^2\vec{\mathbf{B}} \tag{25}$$
$$\partial_\mu\mathbf{B}^\mu = -\mathbf{I}_2 \tag{26}$$

Comme les champs de la mécanique quantique sont à composantes complexes, tandis que le champ électromagnétique est à composantes réelles, la théorie de la lumière de L. de Broglie a eu à justifier cette divergence. L'explication mise en avant dans la théorie de la lumière est que le champ électromagnétique macroscopique comporte toujours un nombre énorme de photons. En tenant compte des créations et annihilations de photons, L. de Broglie justifie le fait que le champ macroscopique est toujours à valeurs réelles.

On va poser ici le problème différemment en partant d'une équation d'onde à composantes réelles pour la particule de spin $\frac{1}{2}$. Cette équation d'onde, complètement équivalente à l'équation de Dirac, a été présentée en [5] et étudiée en [6] et [7]. On reprendra ici la méthode d'obtention de [7], qui consiste à associer à toute onde de Dirac ψ une onde $\phi = f(\psi)$ à valeur dans l'algèbre de Clifford d'espace, algèbre sur le corps des réels. La transformation f, bijective et linéaire, est définie par :

$$\begin{aligned} f(\psi) = \phi =& a_1 + a_2\sigma_3\sigma_2 + a_3\sigma_3\sigma_1 + a_4\sigma_1\sigma_2 \\ &+ a_5 i + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3 \end{aligned} \tag{27}$$

où les a_j sont les parties réelles et imaginaires des ψ_i :

$$\begin{aligned} \psi_1 = a_1 + ia_4 \; ; \quad \psi_2 = -a_3 - ia_2 \\ \psi_3 = a_8 + ia_5 \; ; \quad \psi_4 = a_6 + ia_7 \end{aligned} \tag{28}$$

L'algèbre d'espace est isomorphe à l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli et leurs produits, c'est-à-dire $M_2(\mathbb{C})$. On y utilise les conjugaisons définies par :

$$\begin{aligned} \phi^\dagger =& a_1 - a_2\sigma_3\sigma_2 - a_3\sigma_3\sigma_1 - a_4\sigma_1\sigma_2 \\ &- a_5 i + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \overline{\phi} =& a_1 + a_2\sigma_3\sigma_2 + a_3\sigma_3\sigma_1 + a_4\sigma_1\sigma_2 \\ &- a_5 i - a_6\sigma_1 - a_7\sigma_2 - a_8\sigma_3 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi} =& a_1 - a_2\sigma_3\sigma_2 - a_3\sigma_3\sigma_1 - a_4\sigma_1\sigma_2 \\ &+ a_5 i - a_6\sigma_1 - a_7\sigma_2 - a_8\sigma_3 \end{aligned} \tag{31}$$

Ces conjugaisons vérifient, pour tout élément A et B de l'algèbre d'espace

$$\begin{aligned} (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \; ; \; \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B} \\ \widehat{A} = \overline{A}^\dagger \; ; \; \widehat{AB} = \widehat{B}\widehat{A} \end{aligned} \tag{32}$$

Les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de la transformation f sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ mais f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire car on a :

$$f(i\psi) = \phi i\sigma_3 \tag{33}$$

C'est donc bien la structure d'espace vectoriel et d'algèbre sur $\mathbb{R}$ que nous utiliserons, les fonctions a_k étant des fonctions de l'espace et du temps à valeur dans $\mathbb{R}$. On obtient aussi, pour tout $\phi = f(\psi)$:

$$f(\psi^*) = \sigma_2\overline{\phi}\sigma_2 \; ; \; f(\gamma^\mu\psi) = \sigma^\mu\overline{\phi} \tag{34}$$

On obtient l'équation d'onde pour ϕ en appliquant f à l'équation de Dirac :

$$f\left([\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi\right) = 0$$

ce qui donne :

$$\sigma^\mu \partial_\mu \overline{\phi} + q\sigma^\mu A_\mu \overline{\phi} i\sigma_3 + m\phi i\sigma_3 = 0 \qquad (35)$$

On utilisera les notations suivantes :

$$\nabla \;\; = \partial_0 + \vec{\partial}\ ; \quad \vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 \quad (36)$$
$$A = A^0 - \vec{A}\ ; \quad \vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3 \quad (37)$$

Et il en résulte :

$$\overline{\nabla} = \partial_0 - \vec{\partial} = \sigma^\mu \partial_\mu \qquad (38)$$
$$\overline{A} = A^0 + \vec{A} = \sigma^\mu A_\mu \qquad (39)$$

L'équation de Dirac prend donc la forme :

$$\overline{\nabla}\ \overline{\phi} + q\overline{A}\ \overline{\phi} i\sigma_3 + m\phi i\sigma_3 = 0 \qquad (40)$$

et ceci équivaut à :

$$\nabla\phi i\sigma_3 = m\overline{\phi} + qA\phi \qquad (41)$$

A partir de cette équation, adoptons une démarche analogue à celle de la théorie de la lumière en considérant deux ondes $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$ solutions de l'équation de Dirac (41), avec une charge nulle et une demi-masse :

$$\overline{\nabla}\ \overline{\phi}^{(j)} i\sigma_3 = \frac{m}{2}\phi^{(j)} \quad ; \quad j = 1,\ 2. \qquad (42)$$

Les composantes des ondes $\phi^{(j)}$ seront notées maintenant :

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} =& a_1 + a_2\sigma_3\sigma_2 + a_3\sigma_3\sigma_1 + a_4\sigma_1\sigma_2 \\ &+ a_5 i + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3\end{aligned} \qquad (43)$$

$$\begin{aligned}\phi^{(2)} =& b_1 + b_2\sigma_3\sigma_2 + b_3\sigma_3\sigma_1 + b_4\sigma_1\sigma_2 \\ &+ b_5 i + b_6\sigma_1 + b_7\sigma_2 + b_8\sigma_3\end{aligned} \qquad (44)$$

Les deux ondes étant dans le même état de mouvement, on supposera des conditions analogues à (7) :

$$\begin{aligned}(\partial_\mu a_j)b_k = a_j(\partial_\mu b_k) = \frac{1}{2}\partial_\mu(a_j b_k) \\ j = 1, \ldots, 8\ ; \quad k = 1, \ldots, 8\end{aligned} \qquad (45)$$

Pour pouvoir suivre un calcul analogue à celui de la théorie de la lumière, on peut écrire l'équation (42) sous forme matricielle en posant :

$$\phi^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_8 \end{pmatrix} \qquad (46)$$

Et on utilisera quatre matrices M^μ telles que $\sigma^\mu\overline{\phi} i\sigma_3 = M^\mu\phi$, à savoir :

$$M^0 = \begin{pmatrix} i\gamma_0\gamma_2 & 0 \\ 0 & i\gamma_0\gamma_2 \end{pmatrix}\ ;\ M^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0\gamma_5 \\ -\gamma_0\gamma_5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_2\gamma_3 \\ i\gamma_2\gamma_3 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ M^3 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_2\gamma_1 \\ i\gamma_2\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad (47)$$

Avec ces matrices l'équation de Dirac (42) prend la forme :

$$M^\mu \partial_\mu \phi^{(j)} = \frac{m}{2}\phi^{(j)} \qquad (48)$$

Ces matrices anticommutent :

$$\begin{aligned}&M^\mu M^\nu + M^\nu M^\mu = 0\ ,\ \mu \neq \nu \\ &(M^0)^2 = -I_8\ ;\ (M^j)^2 = I_8\ ,\ j = 1,\ 2,\ 3.\end{aligned} \qquad (49)$$

où I_8 est la matrice unité 8×8. On utilisera aussi :

$$M_0 = -M^0\ ;\ M_j = M^j\ ,\ j = 1,\ 2,\ 3. \qquad (50)$$

Puis, suivant la méthode de calcul utilisée par la théorie de la lumière, on mettra les 64 composantes $\phi_{ij} = a_i b_j$ sous la forme d'une matrice 8×8 :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \ldots & \phi_{18} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \ldots & \phi_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{81} & \phi_{82} & \ldots & \phi_{88} \end{pmatrix} \qquad (51)$$

Les équations de Dirac (48), avec les conditions (45), donnent de manière similaire à (9) et (10) :

$$\begin{aligned}M^\mu \partial_\mu \phi = m\phi \\ \partial_\mu \phi (M^\mu)^t = m\phi\end{aligned} \qquad (52)$$

où M^t désigne la matrice transposée de M. Comme on a $(M^0)^t = -M^0$ et $(M^j)^t = M^j$, $j = 1,\ 2,\ 3$, on obtient, en multipliant les équations (52) à droite par $M = 8M^0$:

$$\begin{aligned}M^\mu \partial_\mu(\phi M) = m(\phi M) \\ \partial_\mu(\phi M)M^\mu = -m(\phi M)\end{aligned} \qquad (53)$$

Dans la théorie de la lumière, qui utilise les complexes, la matrice $\psi\Gamma$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des γ_μ et de leurs produits. Mais ici les M_μ n'engendrent avec leurs produits qu'une algèbre de dimension 16, alors que l'algèbre des matrices 8×8 est de dimension 64. Soit N une combinaison linéaire des matrices M_μ et de leurs produits : il faut quatre de ces combinaisons pour obtenir l'élément général de l'algèbre des matrices. On considérera donc quatre telles combinaisons :

$$\begin{aligned} N_{(i)} =& I_{(i)1}I_8 + mA_{(i)}{}^{\mu}M_{\mu} + E_{(i)}{}^{j}M_{0j} \\ &+ H_{(i)}{}^{j}M_{kl} + m(B_{(i)}{}^{j}M_{0kl} \\ &+ B_{(i)}{}^{0}M_{123}) + I_{(i)2}M_{0123} \end{aligned} \tag{54}$$

où l'indice (i), qui n'est pas un indice de composante contravariante ou covariante, est mis entre parenthèses, et vaut 0, 1, 2, 3, et $(j,\ k,\ l)$ est une permutation circulaire de $(1,\ 2,\ 3)$. Alors il existe quatre matrices P^i qui commutent avec les M_μ et leurs produits, telles que toute matrice 8×8, et en particulier ϕM, s'écrit de manière unique :

$$\phi M = N_{(i)}P^i \tag{55}$$

avec la convention usuelle de sommation sur les indices hauts et bas. On peut prendre :

$$\begin{aligned} P^0 = I_8 \ \ ; \ \ P^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3\gamma_1 \\ \gamma_3\gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \\ P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \ \ &; \ \ P^3 = P^1P^2 \end{aligned} \tag{56}$$

Les équations (53) deviennent :

$$\begin{aligned} M^\mu\partial_\mu(N_{(i)}P^i) &= m(N_{(i)}P^i) \\ \partial_\mu(N_{(i)}P^i)M^\mu &= -m(N_{(i)}P^i) \end{aligned} \tag{57}$$

Par suite de la commutation des matrices P^i avec les M^μ, et de l'indépendance linéaire des $N_{(i)}P^i$, on obtient :

$$\begin{aligned} M^\mu\partial_\mu\ N_{(i)} &= m\ N_{(i)} \\ (\partial_\mu\ N_{(i)})M^\mu &= -m\ N_{(i)} \end{aligned} \tag{58}$$

Avec (54) et avec les propriétés d'anticommutation des matrices M_μ, on obtient, pour chaque valeur de l'indice i :

$$\begin{aligned} \partial_\mu\ A_{(i)}{}^{\mu} &= 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{(i)} &= -m^2\ A_{(i)}{}^{0} \\ \partial_0\ \vec{E}_{(i)} &= \vec{\nabla}\times\vec{H}_{(i)} + m^2\ \vec{A}_{(i)} \\ \vec{E}_{(i)} &= -\partial_0\ \vec{A}_{(i)} - \vec{\nabla}\ A_{(i)}{}^{0} \\ \vec{H}_{(i)} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}_{(i)} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}_{(i)} &= 0 \\ \partial_0\ \vec{H}_{(i)} &= -\vec{\nabla}\times\vec{E}_{(i)} \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} I_{(i)1} = 0\ ;\ \ \partial_0\ I_{(i)1} = 0\ ;\ \ \vec{\nabla}\ I_{(i)1} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}_{(i)} &= 0 \\ \partial_0\ \vec{B}_{(i)} &= -\vec{\nabla}\ B_{(i)}{}^{0} \\ \partial_0\ I_{(i)2} &= m^2\ B_{(i)}{}^{0} \\ \vec{\nabla}\ I_{(i)2} &= -m^2\ \vec{B}_{(i)} \\ \partial_\mu\ B_{(i)}{}^{\mu} &= -\ I_{(i)2} \end{aligned} \tag{60}$$

Ainsi on obtient quatre champs à composantes réelles ayant les mêmes équations d'évolution que le champ électromagnétique à composantes complexes de la théorie de la lumière. Ce résultat est très encourageant, parce que nous savons que les électrons n'interagissent pas seulement avec le champ électromagnétique, mais aussi avec trois autres champs de bosons, dans le cadre des interactions faibles. Il est donc a priori satisfaisant de voir ici apparaître non pas un champ électromagnétique, mais quatre champs. Certes on est loin ici du modèle électro-faible, parce que la méthode heuristique employée pour obtenir les équations d'onde est sans doute trop simple. Il n'empêche qu'il existe une différence significative et intéressante entre le développement du calcul basé sur les complexes, et le développement du calcul utilisant l'algèbre réelle d'espace.

On peut alors légitimement se demander quel est le lien existant entre le champ électromagnétique complexe obtenu par Louis de Broglie et les quatre champs non complexes obtenus ici. Pour le voir, il suffit de développer (13) en utilisant (8) et ensuite de passer aux composantes réelles grâce à (27), (28) et les égalités (43) et (44). On obtient alors simplement ceci :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\mu &= A_{(2)}{}^{\mu} - i\ A_{(1)}{}^{\mu} \\ \mathbf{E}^j &= E_{(2)}{}^{j} - i\ E_{(1)}{}^{j} \\ \mathbf{H}^j &= H_{(2)}{}^{j} - i\ H_{(1)}{}^{j} \\ \mathbf{I}_1 &= -I_{(2)1} + i\ I_{(1)1} \\ \mathbf{B}^\mu &= -B_{(2)}{}^{\mu} + i\ B_{(1)}{}^{\mu} \\ \mathbf{I}_2 &= -I_{(2)2} + i\ I_{(1)2} \end{aligned} \tag{61}$$

La partie réelle du champ électromagnétique complexe de la théorie de la lumière est donc le champ d'indice 2, et la partie imaginaire est l'opposé du champ d'indice 1. Pour la partie non maxwellienne, il y a une différence de signe : le champ réel d'indice 2 est l'opposé de la partie réelle du champ complexe, et le champ d'indice 1 est la partie imaginaire du champ complexe. Les champs d'indice 0 et 3 sont nouveaux par rapport à la théorie de la lumière, à variables complexes. Ils sont également nouveaux par rapport au "photon magnétique" de G. Lochak [8]. Il pose en effet :

$$\begin{aligned} S &= \Gamma\gamma_5 \\ \psi S &= \mathbf{I'}_1 I_4 + im\mathbf{A'}^{\mu}\gamma_\mu \\ &\quad + \mathbf{E'}^{j}\gamma_{0j} + \mathbf{H'}^{j}\gamma_{kl} \\ &\quad + im\mathbf{B'}^{\mu}\gamma_\mu\gamma_{0123} + \mathbf{I'}_2\gamma_{0123} \end{aligned} \tag{62}$$

Donc, compte-tenu de (13) et du fait que $i\gamma_5 = \gamma_{0123}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I'}_1 &= -i\mathbf{I}_2 = I_{(1)2} + i\ I_{(2)2} \\
\mathbf{A'}^\mu &= -i\mathbf{B}^\mu = B_{(1)}{}^\mu + i\ B_{(2)}{}^\mu \\
\mathbf{E'}^j &= -i\mathbf{H}^j = -H_{(1)}{}^j - i\ H_{(2)}{}^j \\
\mathbf{H'}^j &= i\mathbf{E}^j = E_{(1)}{}^j + i\ E_{(2)}{}^j \\
\mathbf{B'}^\mu &= i\mathbf{A}^\mu = A_{(1)}{}^\mu + i\ A_{(2)}{}^\mu \\
\mathbf{I'}_2 &= i\mathbf{I}_1 = -I_{(1)1} - i\ I_{(2)1}
\end{aligned} \tag{63}$$

Les champs considérés par G. Lochak correspondent donc aussi aux champs réels d'indice 1 et 2, avec une rotation de dualité entre le champ électrique et le champ magnétique. Il obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
-\partial_0\vec{\mathbf{H}}' &= \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}}' + m^2\vec{\mathbf{B}} \\
\partial_0\vec{\mathbf{E}}' &= \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}}' \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{H}}' &= m^2\mathbf{B'}^0 \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}}' &= 0 \\
\vec{\mathbf{H}}' &= \vec{\nabla}\mathbf{B'}^0 + \partial_0\vec{\mathbf{B}}' \\
\vec{\mathbf{E}}' &= \vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}' \\
0 &= \partial_0\mathbf{B'}^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}}'
\end{aligned} \tag{64}$$

Invariance relativiste des champs

On peut exprimer simplement, dans l'algèbre d'espace, les champs réels précédemment obtenus, ainsi que leur devenir sous une rotation de Lorentz. Pour cela posons :

$$\begin{aligned}
&A_{(j)} = A_{(j)}{}^0 - \vec{A}_{(j)}\ ;\ \vec{A}_{(j)} = A_{(j)}{}^k\sigma_k \\
&B_{(j)} = B_{(j)}{}^0 - \vec{B}_{(j)}\ ;\ \vec{B}_{(j)} = B_{(j)}{}^k\sigma_k \\
&F_{(j)} = \vec{E}_{(j)} + i\ \vec{H}_{(j)} \\
&\vec{E}_{(j)} = E_{(j)}{}^k\sigma_k\ ;\ \vec{H}_{(j)} = H_{(j)}{}^k\sigma_k \\
&X_{(j)} = I_{(j)1} + F_{(j)} + i\ I_{(j)2} \\
&Y_{(j)} = A_{(j)} - i\ B_{(j)}
\end{aligned} \tag{65}$$

A partir des égalités (43), (44), on obtient :

$$\begin{aligned}
&X_{(0)} = \phi^{(1)}i\sigma_3\widehat{\phi}^{(2)}\ ;\ mY_{(0)} = -\overline{\phi}^{(1)}\ \widehat{\phi}^{(2)} \\
&X_{(1)} = \phi^{(1)}\sigma_2\widehat{\phi}^{(2)}\ ;\ mY_{(1)} = \overline{\phi}^{(1)}\sigma_1\widehat{\phi}^{(2)} \\
&X_{(2)} = -\phi^{(1)}\sigma_1\widehat{\phi}^{(2)}\ ;\ mY_{(2)} = \overline{\phi}^{(1)}\sigma_2\widehat{\phi}^{(2)} \\
&X_{(3)} = -\phi^{(1)}\widehat{\phi}^{(2)}\ ;\ mY_{(3)} = -\overline{\phi}^{(1)}i\sigma_3\widehat{\phi}^{(2)}
\end{aligned} \tag{66}$$

Les équations de l'électromagnétisme s'expriment de manière très simplifiée si l'on utilise l'algèbre d'espace car les sept équations maxwelliennes (59) équivalent à :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}A_{(j)} &= F_{(j)} \\
\nabla F_{(j)} &= -m^2A_{(j)}
\end{aligned} \tag{67}$$

tandis que les équations non maxwelliennes (60) équivalent à :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}iB_{(j)} &= -(I_{(j)1} + iI_{(j)2}) \\
\nabla(I_{(j)1} + iI_{(j)2}) &= m^2iB_{(j)}
\end{aligned} \tag{68}$$

Ces équations entrainent :

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}Y_{(j)} &= X_{(j)} \\
\nabla X_{(j)} &= -m^2Y_{(j)}
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}Y^\dagger{}_{(j)} &= -\widehat{X}_{(j)} \\
\nabla\widehat{X}_{(j)} &= m^2Y_{(j)}
\end{aligned} \tag{70}$$

Mais en retour (69) seul, ou (70) seul, ne permet pas d'obtenir les équations séparées (67) et (68), qui sont moins symétriques. En effet les relations (69) sont invariantes dans la transformation de dualité $X \mapsto X' = iX$; $Y \mapsto Y' = iY$, qui transforme A en B, I_1 en I_2, $\vec{E}$ en $\vec{H}$, tandis que les relations (70) ne sont pas invariantes dans cette transformation : ce sont elles qui distinguent $\vec{E}$ de $\vec{H}$ et annulent I_1 et pas I_2.

Il est aisé, à partir de ces équations de retrouver l'équation de Klein-Gordon au second ordre, car on a $\square = \overline{\nabla}\nabla = \nabla\overline{\nabla}$, et on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\square X_{(j)} + m^2X_{(j)} &= 0 \\
\square Y_{(j)} + m^2Y_{(j)} &= 0
\end{aligned} \tag{71}$$

Les équations (67) sont invariantes relativistes, examinons la forme que prend ici cette invariance. On sait que le groupe de recouvrement du groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}^\uparrow{}_+$ est le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ unimodulaires, c'est-à-dire de déterminant 1, donc est contenu dans l'algèbre d'espace. Soit M une matrice unimodulaire :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_3 \\ m_2 & m_4 \end{pmatrix}\ ;\ \det M = 1 \tag{72}$$

On a alors :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_4 & -m_3 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix} = \widehat{M} \tag{73}$$

Et il est établi que la transformation r qui, à tout vecteur d'espace-temps $V = V_0 + V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 + V_3\sigma_3$ fait correspondre le vecteur V' tel que

$$V' = r(V) = \overline{M}VM^{-1} \tag{74}$$

est une rotation de Lorentz orthochrone conservant l'orientation. L'application $h : M \mapsto r$ est un homomorphisme du groupe de Lie $SL(2,\mathbb{C})$ sur le groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}^\uparrow{}_+$, de noyau $\{1\ ;\ -1\}$.

L'équation de Dirac écrite sous la forme (41) est invariante sous le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ car si l'on pose :

$$\phi' = M\phi \ ; \ \nabla' = \overline{M}\nabla M^{-1} \ ; \ A' = \overline{M}AM^{-1} \quad (75)$$

alors l'équation (41) équivaut à

$$\nabla'\phi' i\sigma_3 = m\overline{\phi}' + qA\phi' \quad (76)$$

donc garde la même forme. De plus le bivecteur champ électromagnétique F est transformé en $F' = MFM^{-1}$, donc les $X_{(j)}$ et les $Y_{(j)}$ se transforment suivant :

$$Y'_{(j)} = \overline{M}Y_{(j)}M^{-1} \ ; \ X'_{(j)} = MX_{(j)}M^{-1} \quad (77)$$

et l'invariance relativiste résulte de :

$$\begin{aligned}
I'_{(j)1} &= M\ I_{(j)1}M^{-1} = I_{(j)1}MM^{-1} = I_{(j)1} \\
\overline{\nabla}'Y'_{(j)} &= M\overline{\nabla}\overline{M}^{-1}\overline{M}Y_{(j)}M^{-1} \\
&= M\overline{\nabla}X_{(j)}M^{-1} = X'_{(j)} \\
\nabla'Y'_{(j)} &= \overline{M}\nabla M^{-1}MX_{(j)}M^{-1} \\
&= \overline{M}(-m^2Y_{(j)})M^{-1} \\
&= -m^2\overline{M}Y_{(j)}M^{-1} = -m^2Y'_{(j)}
\end{aligned} \quad (78)$$

Groupe interne de symétrie

L'ensemble des champs et des équations obtenues est peu symétrique, par suite de la séparation entre grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes, aussi est-il intéressant de regarder ce qui se passerait si les lois d'évolution étaient (69) seulement plutôt que (69) et (70). En effet, en effectuant une rotation de dualité sur les champs d'indice (0) et (3) on pourrait prendre :

$$\begin{aligned}
X_{(0)} &= \phi^{(1)}\sigma_3\widehat{\phi}^{(2)} \ ; \ mY_{(0)} = \overline{\phi}^{(1)}i\widehat{\phi}^{(2)} \\
X_{(1)} &= \phi^{(1)}\sigma_2\widehat{\phi}^{(2)} \ ; \ mY_{(1)} = \overline{\phi}^{(1)}\sigma_1\widehat{\phi}^{(2)} \\
X_{(2)} &= -\phi^{(1)}\sigma_1\widehat{\phi}^{(2)} \ ; \ mY_{(2)} = \overline{\phi}^{(1)}\sigma_2\widehat{\phi}^{(2)} \\
X_{(3)} &= \phi^{(1)}i\widehat{\phi}^{(2)} \ ; \ mY_{(3)} = -\overline{\phi}^{(1)}\sigma_3\widehat{\phi}^{(2)}
\end{aligned} \quad (79)$$

Ces quatre champs sont globalement invariants dans un groupe de transformations qui a justement la structure $U(1) \times SU(2)$ de la théorie électro-faible : par exemple la multiplication à droite par $i\sigma_3$ transforme $\phi^{(1)}\sigma_2\widehat{\phi}^{(2)}$ en $\phi^{(1)}\sigma_2 i\sigma_3\widehat{\phi}^{(2)} = \phi^{(1)}(-\sigma_1)\widehat{\phi}^{(2)}$, c'est-à-dire transforme $X_{(1)}$ en $X_{(2)}$ et la multiplication à droite par $i\sigma_2$ transforme $\phi^{(1)}\sigma_2\widehat{\phi}^{(2)}$ en $\phi^{(1)}i\widehat{\phi}^{(2)} = \phi^{(1)}(-\sigma_1)\widehat{\phi}^{(2)}$, c'est-à-dire transforme $X_{(1)}$ en $X_{(3)}$. Comme $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$ sont les générateurs de $SU(2)$ et que les rotations de dualité engendrées par la multiplication par i commutent avec les multiplications par $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$, on obtient un groupe de symétrie interne ayant naturellement la structure $U(1) \times SU(2)$ pour les champs de (79) et les lois d'évolution (69).

Or il est aisé d'obtenir les lois (69) sans les lois (70). Il suffit pour cela de remarquer que (69) vient en fait de $M^\mu\partial_\mu(\phi M) = m(\phi M)$ tandis que (70) vient de $\partial_\mu\phi(M^\mu)^t = m\phi$. On obtiendra donc la seule équation (69) si l'on part de deux spineurs $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$ dont le premier suit une équation de Dirac avec la masse m tandis que le second est fixe. On a alors exactement $\partial_\mu\phi_{ij} = (\partial_\mu{\phi_i}^{(1)}){\phi_j}^{(2)}$, ce qui donne $M^\mu\partial_\mu(\phi M) = m(\phi M)$ comme seule loi d'évolution.

Mais est-il raisonnable de rajouter à la nature plus de symétrie qu'elle n'en a ? Jusqu'à preuve du contraire il n'y a pas de vraie symétrie entre électricité et magnétisme, donc les rotations de dualité ne sont pas une vraie symétrie de la nature. On sait aussi que la symétrie $U(1) \times SU(2)$ est spontanément brisée. Cette brisure de symétrie serait- elle liée à la non symétrie entre électricité et magnétisme ?

Conclusion :

Les quatre champs correspondant aux quatre $X_{(j)}$ de (66) satisfont les mêmes équations que le champ électromagnétique à valeur complexe de L. de Broglie. La seule différence est qu'il y a quatre champs possibles, et non un seul. Ceci paraît intéressant, parce que la théorie électro-faible, dans laquelle opèrent quatre bosons de jauge, comporte également quatre champs de type électromagnétique. Certes la théorie de la fusion, bien antérieure à la compréhension des forces faibles, est loin de comporter tous les aspects développés ces dernières années. Il est nécessaire de la transformer pour pouvoir y incorporer une symétrie interne, mais cette symétrie interne est alors naturellement de type $U(1) \times SU(2)$. Il est donc envisageable de concilier la méthode de fusion de Louis de Broglie et les symétries de jauge introduites dans l'étude des forces électro-faibles. La méthode de fusion de Louis de Broglie mériterait d'être mieux connue.

Les nombres complexes se sont introduits en physique d'abord comme des outils de calcul, la transformation de Fourier étant plus simple d'utilisation avec les complexes. Toute la physique classique utilise des grandeurs de nature certes diverse, nombres, vecteurs, tenseurs, mais il s'agit toujours de grandeurs qui peuvent se ramener aux nombres réels. Un changement drastique est intervenu lorsque E. Schrödinger, pour obtenir le bon signe dans son équation, introduisit un i à la bonne place. Puis les physiciens se sont habitués à la présence des nombres complexes au point qu'ils n'envisagent même plus que l'on puisse s'en passer. Pourtant il existe en géométrie de Clifford des objets de carré -1, de nature géométrique différente, par exemple des bivecteurs et des trivecteurs, en sorte qu'on ne pourra pas refuser indéfiniment de s'interroger sur la nature géométrique des objets utilisés dans les théories physiques. Se servir des algèbres réelles n'est pas sans conséquences, ainsi qu'on le voit ici, puisque la dimension des produits tensoriels n'est pas la même, avec de nouvelles possibilités par rapport à la théorie basée sur l'utilisation des nombres complexes.

Références

[1] L. de Broglie : *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la Lumière : tome 1 La Lumière dans le vide*, Hermann, Paris 1940. *tome 2 Les interactions entre les photons et la matière*, Hermann, Paris 1942.

[2] L. de Broglie : *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*, Gauthier-Villars, Paris 1954

[3] L. de Broglie : *Ondes électromagnétiques et photons*, Gauthier-Villars, Paris 1968

[4] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **117**, 610 (1928)

[5] C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n° 1 1997.

[6] C. Daviau : *Dirac equation in the space Clifford algebra*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht, 1998

[7] C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 1 1998

[8] G. Lochak : *Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de de Broglie*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** n° 1 1995

(Manuscrit reçu le 2 octobre 1997)