Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 23, no 3-4, 1998

Étude classique de l'équation de Dirac

Jaume Haro

Departament de Matemàtica Aplicada I, E.T.S.E.I.B., Universitat Politècnica de Catalunya
e-mail : haro@ma1.upc.es

ABSTRACT. In this work we show, from a mathematical point of view, that the solutions of Dirac's equation have a classical behavior when Planck's constant converges to zero. The most important result is: "The part of quantum state with positive (resp. negative) kinetic energy, has in the limit a classical behavior with positive (resp. negative) kinetic energy". Notice, this is a mathematical result, because physically, the classical states with negative kinetic energy don't make sense.

1 Introduction

Dans cet article nous étudierons la dynamique d'une particule relativiste qui se trouve dans un champ électromagnétique. Pour simplifier nous prendrons la masse, la charge et la vitesse de la lumière égales à l'unité.

La dynamique quantique de la particule est décrite par l'équation de Dirac:

$$i\hbar\partial_t\psi = \sum_{j=1}^{3}\alpha_j(-i\hbar\partial_j - A_j(x))\psi + \beta\psi + V(x)\psi,$$

où α_j et β sont les matrices de Dirac dans une répresentations quelconque. Nous dénoterons par $T_q^t\psi_\hbar$ la solution avec condition initiale $\psi_\hbar$.

La dynamique classique est décrite par les équations d'Hamilton:

$$\dot{x} = \partial_p H(x,p), \quad \dot{p} = -\partial_x H(x,p),$$

où l'hamiltonien est $H(x,p) = \sqrt{(p - A(x))^2 + 1} + V(x)$.

Notre objetif est trouver le même type de résultats sur la limite classique qu'on obtient pour le cas non-relativiste (voir [7], [8], [9], [10], [14]). C'est-à-dire, voir que quand la constante de Planck converge vers zéro on obtient la mécanique classique.

La différence essentielle avec le cas non-relativiste est que dans le cas relativiste apparaîssent deux types d'états quantiques différents, ceux qui ont une énergie cinétique positive et ceux qui ont une énergie cinétique négative; alors comme les états avec énergie cinétique négative ne disparaîssent pas à la limite, si on veut trouver résultats classiques, il faut du point de vue mathématique, considérer la dynamique classique d'énergie cinétique négative comme donné par l'hamiltonien $-H(x,p)$. Dénotons les deux dynamiques classiques de la façon suivante $T_{c,\pm}^t$.

Alors pour comparer les dynamiques quantiques et classiques il faut premièrement trouver une correspondance entre l'espace des états quantiques $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$ et l'espace des états classiques $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$. Si la constante de Planck $\hbar_0$ est fixée il n'y a aucune correspondance (on peut prouver que c'est une conséquence du Principe d'incertitude d'Heisenberg), mais si on considère les applications $\psi : (0,\hbar_0] \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)$; $\hbar \to \psi_\hbar$, alors il est possible de trouver différentes correspondances. Pour cette raison, nous sommes obligés d'introduire les espaces Q et C. (La notation utilisée pour les espaces fonctionnels est décrite plus bas, à la fin de cette section).

Comme nous voulons voir ce qui se passe à la limite, il est naturel de définir sur Q et C les relations d'équivalence suivantes:

$$\psi \sim_q \bar{\psi} \text{ si et seulement si } \lim_{\hbar\to 0}||\psi_\hbar - \bar{\psi}_\hbar||_2 = 0.$$

$$\phi \sim_c \bar{\phi} \text{ si et seulement si } \lim_{\hbar\to 0}(\phi_\hbar - \bar{\phi}_\hbar) = 0.$$

Alors on peut introduire les espaces quotients, $\tilde{Q} = \frac{Q}{\sim_q}$ et $\tilde{C} = \frac{C}{\sim_c}$; sur $\tilde{C}$ nous pouvons définir les dynamiques classiques $T_{c,+}^t$ et $T_{c,-}^t$ et sur $\tilde{Q}$ la dynamique quantique T_q^t.

Une fois qu'on a défini les dynamiques respectives, il faut découpler l'espace $\tilde{Q}$ de la façon suivante $\tilde{Q} = \tilde{Q}^+ \oplus \tilde{Q}^-$ où les éléments de $\tilde{Q}^+$ (resp. $\tilde{Q}^-$) sont des états quantiques qui à la limite ont une énergie cinétique positive (resp. négative); alors si on dénote par $\pi^{\pm}$ la projection, $\pi^{\pm} : \tilde{Q} \to \tilde{Q}^{\pm}$, et si on définit un certain type d'application $J : \tilde{Q} \to \tilde{C}$, on voit que $J\pi^{\pm}$ est une conjugaison entre T_q^t et $T_{c,\pm}^t$; i.e., à la limite la partie de l'état quantique avec énergie cinétique positive (resp. négative) est un état classique avec énergie cinétique positive (resp. négative). Finalement nous verrons qu'à la limite les deux dynamiques classiques sont découplées, i.e., formellement:

$$JT_q^t = T_{c,+}^t J\pi^+ + T_{c,-}^t J\pi^-.$$

Pour les espaces fonctionels on utilise les notations suivantes:

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$: espace des fonctions sur $\mathbb{R}^3$, de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}^4$.

$\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$: espace des fonctions sur $\mathbb{R}^3$, de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}$, avec norme 1.

$\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$: espace des mesures positives sur $\mathbb{R}^6$.

$\mathcal{C}^0(X;Y)$: espace des fonctions continues sur X à valeurs dans Y.

$\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^6)$: espace des fonctions, avec dérivées d'ordre k continues sur $\mathbb{R}^6$, à support compact.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^6) = \cap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^6)$.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^6, \mathbb{C})$: espace des distributions à valeurs complexes.

$Q = \mathcal{C}^0((0, \hbar_0], \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)) = \{\psi : \hbar \to \psi_\hbar\}$.

$C = \mathcal{C}^0((0, \hbar_0], \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)) = \{\phi : \hbar \to \phi_\hbar\}$.

2 Dynamique classique

Prenons pour simplifier $m = c = e = 1$. De la relation relativiste $(H_\pm(x,p) - V(x))^2 = (p - A(x))^2 + 1$, on obtient, (du point de vue mathématique), les deux hamiltoniens suivants, $H_\pm(x,p) = \pm\sqrt{(p - A(x))^2 + 1} + V(x)$; nous supposerons $(A, V) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Alors si on prend le signe $+$ (resp. $-$), on obtient des états classiques avec énergie cinétique positive (resp. négative). Soient $T_{c,\pm}^t$ les opérateurs qui donnent les deux dynamiques classiques sur l'espace des phases. Nous pouvons étendre $T_{c,\pm}^t$ sur $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6)$ par transport, i.e.,

$$T_{c,\pm}^t : \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6); f \to f \circ T_{c,\pm}^{-t}.$$

Par dualité, on peut étendre $T_{c,\pm}^t$ sur $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$ de la façon suivante:

$$T_{c,\pm}^t : \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6) \to \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6); \phi \to T_{c,\pm}^t \phi,$$

où $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6)$, $T_{c,\pm}^t\phi$ vérifie, $T_{c,\pm}^t\phi(f) = \phi(T_{c,\pm}^{-t} f)$.

Lemme 2.1. *Si $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$ alors $T_{c,\pm}^t\phi_n \to T_{c,\pm}^t\phi$ dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$. (Voir la preuve dans [5])*

Finalement nous allons étendre $T_{c,\pm}^t$ sur $\tilde{C}$,

$$T_{c,\pm}^t : \tilde{C} \to \tilde{C}; [\phi] \to T_{c,\pm}^t[\phi] = [T_{c,\pm}^t \phi],$$

où $T_{c,\pm}^t\phi : (0, \hbar_0] \to \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$; $\hbar \to T_{c,\pm}^t \phi_\hbar$.

Remarque. T_c^t est bien défini, effectivement, si $\phi \sim_c \bar{\phi}$, alors $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6)$, on a:

$$T_c^t\phi_\hbar(f) - T_c^t\bar{\phi}_\hbar(f) = \phi_\hbar(f \circ T_c^t) - \bar{\phi}_\hbar(f \circ T_c^t) \to 0$$

quand $\hbar \to 0$, c'est-à-dire, $T_c^t\phi \sim_c T_c^t\bar{\phi}$.

3 Dynamique quantique

Pour $\hbar \in (0, \hbar_0]$, nous allons considérer l'équation de Dirac:

$$i\hbar\partial_t\psi = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(-i\hbar\partial_j - A_j(x))\psi + \beta\psi + V(x)\psi,$$

où α_j et β sont les matrices de Dirac dans une représentations quelconque. Dénotons par $T_\hbar^t\psi_\hbar$ la solution avec condition initiale $\psi_\hbar$, et définissons,

$$T_q^t : \tilde{Q} \to \tilde{Q}; [\psi] \to T_q^t[\psi] = [T_q^t\psi],$$

où $T_q^t\psi : (0, \hbar_0] \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$; $\hbar \to T_\hbar^t\psi_\hbar$.

Remarque. T_q^t est bien défini, effectivement, si $\psi \sim_q \bar{\psi}$, alors:

$$||T_\hbar^t\psi_\hbar - T_\hbar^t\bar{\psi}_\hbar||_2 = ||\psi_\hbar - \bar{\psi}_\hbar||_2 \to 0 \text{ quand } \hbar \to 0,$$

c'est-à-dire, $T_q^t\psi \sim_q T_q^t\bar{\psi}$.

Définition. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ **compact**, nous allons définir l'espace des états quantiques qui à la limite ont position et impulsion à support dans Ω.

$$\tilde{Q}_\Omega = \{[\psi] \in \tilde{Q} : \lim_{\hbar\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - \Omega_1} |\psi_\hbar|^2 = \lim_{\hbar\to 0} \int_{\mathbb{R}^3 - \Omega_2} |\hat{\psi}_\hbar|^2 = 0; \\ \forall \Omega_1, \Omega_2 \text{avec } \pi_1(\Omega) \subset \Omega_1 \text{ et } \pi_2(\Omega) \subset \Omega_2\}.$$

Où, $\pi_1 : (x,p) \to x$, et $\pi_2 : (x,p) \to p$.

Lemme 3.1. *Soit $[\psi] \in \tilde{Q}_\Omega$, définissons*

$$\bar{\psi}_\hbar(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} a_\Omega(x) a_\Omega(p) \hat{\psi}_\hbar(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} dp$$

, où $a_\Omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$; $a_{\Omega|_{\pi_1\Omega}} = a_{\Omega|_{\pi_2\Omega}} = 1$. Alors, $[\psi] = [\bar{\psi}]$. (Voir la preuve dans [5])

Maintenant nous allons découpler $\tilde{Q}_\Omega$. Considerons la matrice $\sum_{j=1}^3 \alpha_j(p_j - A_j(x)) + \beta$, ses valeurs propres sont les fonctions $\lambda_\pm(x,p) = \pm\sqrt{(p - A(x))^2 + 1}$ avec pour multiplicité deux. Dénotons par $v_{j,p}^{\pm}(x)$ ses vecteurs propres, avec $j = 1, 2$. Alors on a:

Lemme 3.2. *Pour p et x fixées, $\{v_{j,p}^{\pm}(x)\}$ est une base de $\mathbb{C}^4$, et si on considère le produit scalaire hermitien $(,)_H$ sur $\mathbb{C}^4$ on a:*

$$(v_{j,p}^{\pm}(x), v_{k,p}^{\mp}(x))_H = 0, \quad \text{pour } j,k = 1,2.$$

(Voir la preuve dans [10])

Considérons maintenant $[\psi] \in \tilde{Q}_\Omega$ et $\bar{\psi}_\hbar(x)$; comme dans le lemme 3.1, nous savons que $[\psi] = [\bar{\psi}]$. D'un autre côté, à cause du lemme 3.2, on a la décomposition suivante:

$$\hat{\psi}_\hbar(p) = \sum_{j=1}^{2}(a^+_{j,\hbar}(x,p)v^+_{j,p}(x) + a^-_{j,\hbar}(x,p)v^-_{j,p}(x)),$$

alors on a:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_\hbar(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3}\bar{a}^+_{j,\hbar}(x,p)v^+_{j,p}(x)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3}\bar{a}^-_{j,\hbar}(x,p)v^-_{j,p}(x)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp \\ &\equiv \bar{\psi}^+_\hbar(x) + \bar{\psi}^-_\hbar(x),\end{aligned}$$

où, $\bar{a}^\pm_{j,\hbar}(x,p) = a^\pm_{j,\hbar}(x,p)a_\Omega(x)a_\Omega(p)$.
Nous pouvons alors écrire, $\bar{\psi} = \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-$, où, $\bar{\psi}^\pm : (0,\hbar_0] \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4); \hbar \to \bar{\psi}^\pm_\hbar$.

Définissons maintenant sur $\tilde{Q}_\Omega$ l'opération addition de la façon suivante:

$$+ : \tilde{Q}_\Omega \text{ x } \tilde{Q}_\Omega \to \tilde{Q}_\Omega; ([a],[b]) \to [a]+[b] \equiv [a+b].$$

Remarque. L'addition est une opération bien définie; effectivement, si $a \sim_q \bar{a}$ et $b \sim_q \bar{b}$, alors:

$$\begin{aligned}\lim_{\hbar\to 0}||\bar{a}_\hbar + \bar{b}_\hbar - (a_\hbar + b_\hbar)||_2 \leq\ & \lim_{\hbar\to 0}||\bar{a}_\hbar - a_\hbar||_2 + \\ & \lim_{\hbar\to 0}||\bar{b}_\hbar - b_\hbar||_2 = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $\bar{a} + \bar{b} \sim_q a + b$.

Si on considère $[\psi] \in \tilde{Q}_\Omega$ et $\bar{\psi}_\hbar$ comme dans le lemme 3.1, on aura:

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = [\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-] = [\bar{\psi}^+] + [\bar{\psi}^-],$$

et la décomposition suivante: $\tilde{Q}_\Omega = \tilde{Q}^+_\Omega \oplus \tilde{Q}^-_\Omega$.

Finalement définissons les projections, $\pi^\pm : \tilde{Q}_\Omega \to \tilde{Q}^\pm_\Omega$; $[\psi] \to [\bar{\psi}^\pm]$.

Lemme 3.3. *Si $[\psi] \in \tilde{Q}_\Omega$, alors:*

$$T^t_q \pi^\pm[\psi] = \pi^\pm T^t_q[\psi] \in \tilde{Q}_{T^t_{c,\pm}\Omega} \quad \forall t.$$

Considérons maintenant l'opérateur énergie cinétique, $H_c = \sum_{j=1}^{3}\alpha_j(-i\hbar\partial_j - A_j(x)) + \beta$; alors on a le résultat suivant:

Lemme 3.4. *Si $[\psi] \in \tilde{Q}^\pm_\Omega$, alors si la limite*

$$\lim_{\hbar\to 0} \pm \int_{\mathbb{R}^3}(\pi^\pm\psi_\hbar, H_c\pi^\pm\psi_\hbar)_H,$$

existe, elle est positive.

D'où la définition:

Définition. $\tilde{Q}^+_\Omega$ (resp. $\tilde{Q}^-_\Omega$) est l'espace des états quantiques qui à la limite ont une énergie cinétique positive (resp. négative), et leur position et leur impulsion dans Ω.

4 Correspondance entre états quantiques et classiques

Dans cette section nous allons contruire des applications de l'espace des états quantiques dans l'espace des états classiques pour pouvoir comparer, quand $\hbar \to 0$, leurs dynamiques.

Commençons par introduire les ondes élémentaires (voir [6], [7]).

Définition. Soit E l'espace des applications $c : (0,\hbar_0] \to \mathcal{L}^2_1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}); \hbar \to c_\hbar$. Alors:

Un paquet d'ondes de spectre (x_0,p_0) est un élément de l'espace $\tilde{E} \equiv \frac{E}{\sim_q}$ qui vérifie:

$$\lim_{\hbar\to 0}||(x-x_0)^\alpha c_\hbar||_2 = 0; \quad \forall\alpha > 0.$$

$$\lim_{\hbar\to 0}||(p-p_0)^\alpha \hat{c}_\hbar||_2 = 0; \quad \forall\alpha > 0.$$

Une onde élémentaire de spectre (x_0,p_0) est un élément $[\psi] \in \tilde{E}$ tel qu'il existe un paquet d'ondes $[c]$ de spectre (x_0,p_0), et que $\psi \sim_q c$.

Lemme 4.1. *Si $[\psi]$ est une onde élémentaire de spectre (x_0,p_0), alors:*

$$\lim_{\hbar\to 0}|\psi_\hbar|^2 = \delta_{x_0} \ \ et \ \lim_{\hbar\to 0}|\hat{\psi}_\hbar|^2 = \delta_{p_0},$$

dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^3)$.

Exemple.

$$c : (0,\hbar_0] \to \mathcal{L}^2_1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}); \hbar \to \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}.$$

A partir des ondes élémentaires, on peut définir différentes types de correspondances.

Définissons J_c:

$$J_c : \tilde{Q} \to \tilde{C}; [\psi] \to J_c[\psi] = [J_c\psi].$$

Où:

$$\begin{array}{rcl} J_c\psi : (0,\hbar_0] & \longrightarrow & \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6) \\ \hbar & \to & J_c\psi(\hbar) = J_{c_\hbar}\psi_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\hbar(y)c_\hbar(x-y)e^{-\frac{i}{\hbar}py}dy\right|^2, \end{array}$$

avec $[c]$ onde élémentaire de spectre $(0,0)$.

Lemme 4.2. *J_c est bien définie, i.e.: si $\psi\sim_q\bar{\psi}$, alors $J_c\psi\sim_c J_c\bar{\psi}$. (Voir la preuve dans [7])*

Lemme 4.3. *Soient $[c]$ et $[\bar{c}]$ deux ondes élémentaires de spectre $(0,0)$, alors $\forall[\psi]\in\tilde{Q}$ on a, $J_c\psi\sim_c J_{\bar{c}}\psi$. (Voir la preuve dans [7])*

En vertu du lemme 4.3 nous avons la définition suivante:

Définition. $\forall[c]$ onde élémentaire de spectre $(0,0)$, nous pouvons définir, $J=J_c$, et nous noterons $J_{c_\hbar}\psi_\hbar=J_\hbar\psi_\hbar$.

Lemme 4.4. *$\forall f\in\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6)$ on a, $|J_\hbar\psi_\hbar(f)|\le ||f||_\infty||\psi_\hbar||_2^2$ et $\int_{\mathbb{R}^6}J_\hbar\psi_\hbar(x,p)dxdp=||\psi_\hbar||_2^2$.*

Remarque. Si $||\psi_\hbar||_2=1$ alors $J_\hbar\psi_\hbar$ est une densité de probabilité sur l'espace des phases.

Nous allons maintenant voir différentes façons de comparer la mécanique quantique et la mécanique classique.

Considérons l'espace suivant $\mathcal{C}^0((0,\hbar_0];\mathcal{D}'(\mathbb{R}^6,\mathbb{C}))$, et définissons sur cet espace la relation d'équivalence suivante: $\phi\sim\bar{\phi}$ si et seulement si $\lim_{\hbar\to0}(\phi_\hbar-\bar{\phi}_\hbar)=0$, pour la topologie des distributions, i.e., $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$; $\lim_{\hbar\to0}(\phi_\hbar(\varphi)-\bar{\phi}_\hbar(\varphi))=0$. Maintenant on peut définir:

$$\bar{C}=\frac{\mathcal{C}^0((0,\hbar_0];\mathcal{D}'(\mathbb{R}^6,\mathbb{C}))}{\sim},$$

et nous pouvons définir les applications suivantes:

1.-

$$J^1:\tilde{Q}\to\bar{C};[\psi]\to J^1[\psi]=[J^1\psi].$$

Où:

$$\begin{array}{rcl} J^1\psi : (0,\hbar_0] & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^6,\mathbb{C}) \\ \hbar & \to & J_\hbar^1\psi_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\hbar(y)c_\hbar(x-y)e^{-\frac{i}{\hbar}py}dy\right|^2. \end{array}$$

Remarque. Si on appelle i l'inclusion :

$$i:\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)\longrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{R}^6,\mathbb{C}),$$

alors, $J_\hbar^1\psi_\hbar=i\circ J_\hbar\psi_\hbar$, $\forall\psi\in Q$ et $\hbar\in(0,\hbar_0]$.

2.-

$$J^2:\tilde{Q}\to\bar{C};[\psi]\to J^2[\psi]=[J^2\psi].$$

où:

$$\begin{array}{rcl} J^2\psi : (0,\hbar_0] & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^6,\mathbb{C}) \\ \hbar & \to & J_\hbar^2\psi_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}(\psi_\hbar(x),\hat{\psi}_\hbar(p))_H e^{\frac{i}{\hbar}px}. \end{array}$$

3.-

$$J^3:\tilde{Q}\to\bar{C};[\psi]\to J^3[\psi]=[J^3\psi].$$

où:

$$\begin{array}{rcl} J^3\psi : (0,\hbar_0] & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^6,\mathbb{C}) \\ \hbar & \to & J_\hbar^3\psi_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^3}(\psi_\hbar(x-\frac{y}{2}),\psi_\hbar(x+\frac{y}{2}))_H e^{-\frac{i}{\hbar}py}dy. \end{array}$$

On a:

Lemme 4.5. *$\forall[\psi] \in \tilde{Q}_\Omega$ on a, $J^1[\psi] = J^2[\psi] = J^3[\psi]$. (Voir la preuve dans [5], [7])*

Lemme 4.6. *Soit ϕ et $\bar{\phi} \in C$, avec $|\phi_\hbar(f)| \leq k_1||f||_\infty$ et $|\bar{\phi}_\hbar(f)| \leq k_2||f||_\infty$; $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^6)$ et $\forall\hbar \in (0,\hbar_0]$, où k_1 et k_2 sont des constantes, alors $\phi \sim_c \bar{\phi}$ si et seulement si $\phi \sim \bar{\phi}$.*

5 La limite classique de l'équation de Dirac

Théorème 5.1. *Soit $[\psi] \in \tilde{Q}_\Omega$, où Ω est un ensemble compact de $\mathbb{R}^6$, alors:*

$J\pi^\pm$ est une conjugaison entre T_q^t et $T_{c,\pm}^t$, i.e.:

$$J\pi^\pm T_q^t[\psi] = T_{c,\pm}^t J\pi^\pm[\psi].$$

Les deux dynamiques classiques sont découplées, i.e.:

$$JT_q^t[\psi] = T_{c,+}^t J\pi^+[\psi] + T_{c,-}^t J\pi^-[\psi].$$

Ce résultat peut être écrit de la façon suivante: si $\lim_{\hbar\to 0}||\psi_\hbar||_2 = 1$ et $\mu_0^\pm \equiv \lim_{\hbar\to 0} J_\hbar\pi^\pm\psi_\hbar$ existent pour la topologie vague des mesures, alors la mesure de probabilité classique sur l'espace des phases $\mu_t \equiv \lim_{\hbar\to 0} J_\hbar T_\hbar^t\psi_\hbar$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, et se découple en deux parties $T_{c,+}^t\mu_0^+$ et $T_{c,-}^t\mu_0^-$, i.e.:

$$\mu_t = T_{c,+}^t\mu_0^+ + T_{c,-}^t\mu_0^- \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela veut dire que la mesure μ_0^+ (resp. μ_0^-) qu'on obtient de la partie de l'état quantique qui a une énergie cinétique positive (resp. négative) a une évolution classique avec une énergie cinétique positive (resp. négative).

Démonstration (Nous ferrons la démonstration seulement pour le cas libre.)

Prenons par exemple la réprésentation suivante:

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

où les σ_j sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et I est la matrice identité.

Les valeurs propres de la matrice de l'énergie cinétique $\sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \beta$, sont $\lambda_\pm(p) = \pm\sqrt{p^2+1}$; prenons les vecteurs propres suivants:

$$v_{1,p}^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm(p) + p_3 \\ p_1 + ip_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{2,p}^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ p_1 - ip_2 \\ -(\lambda_\pm(p) + p_3) \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\hat{\psi}_\hbar(x) = \sum_{j=1}^2 \left(a_{j,\hbar}^+(p)v_{j,p}^+ + a_{j,\hbar}^-(p)v_{j,p}^-\right),$$

et

$$\bar{\psi}_\hbar(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}px} \left(\bar{a}_{j,\hbar}^+(p)v_{j,p}^+ + \bar{a}_{j,\hbar}^-(p)v_{j,p}^-\right) dp,$$

avec $\bar{a}_{j,\hbar}^\pm(p) = a_{j,\hbar}^-(p)a_\Omega(p)$, où $a_\Omega(p)$ est défini comme dans le lemme 3.1.

La solution de l'équation de Dirac à l'instant t avec condition initiale $\bar{\psi}_\hbar(x)$ est:

$$T_\hbar^t\bar{\psi}_\hbar(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}px} \Big(\bar{a}_{j,\hbar}^+(p)v_{j,p}^+ e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{p^2+1}t} + \bar{a}_{j,\hbar}^-(p)v_{j,p}^- e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{p^2+1}t}\Big) dp.$$

Comme $[\psi] = [\bar{\psi}]$ (lemme 3.1), il faut vérifier que, $JT_q^t\bar{\psi} \sim_c T_{c,+}^t J\pi^+\bar{\psi} + T_{c,-}^t J\pi^-\bar{\psi}$, à cause des lemmes 4.4 et 4.6, c'est équivalent à démontrer que $J^1T_q^t\bar{\psi} \sim T_{c,+}^t J^1\pi^+\bar{\psi} + T_{c,-}^t J^1\pi^-\bar{\psi}$, et en vertu du lemme 4.5 cela revient à voir que $J^2T_q^t\bar{\psi} \sim T_{c,+}^t J^2\pi^+\bar{\psi} + T_{c,-}^t J^2\pi^-\bar{\psi}$. C'est précisement cette relation celle que nous allons prouver.

Calculons premièrement $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$:

$$\int_{\mathbb{R}^6} J^2T_\hbar^t\bar{\psi}_\hbar f = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^6} (T_\hbar^t\bar{\psi}_\hbar(x), \widehat{T_\hbar^t \psi_\hbar}(p))_H f(x,p) e^{\frac{i}{\hbar}px} dxdp,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^9} \sum_{k,j=1}^2 (v_{k,q}^+, v_{j,p}^-)_H e^{\frac{i}{\hbar}(\sqrt{p^2+1}t + \sqrt{q^2+1}t)} \bar{a}_{j,\hbar}^-(p)\bar{a}_{k,\hbar}^{+*}(q) f(x,p) e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x} dxdpdq +$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^9} \sum_{k,j=1}^2 (v_{k,q}^-, v_{j,p}^+)_H e^{-\frac{i}{\hbar}(\sqrt{p^2+1}t + \sqrt{q^2+1}t)} \bar{a}_{j,\hbar}^+(p)\bar{a}_{k,\hbar}^{-*}(q) f(x,p) e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x} dxdpdq +$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^9}\sum_{k,j=1}^{2}(v^+_{k,q},v^+_{j,p})_H e^{\frac{i}{\hbar}(\sqrt{q^2+1}t-\sqrt{p^2+1}t)}\bar{a}^+_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{+*}_{k,\hbar}(q)f(x,p)e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x}dxdpdq+$$
$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^9}\sum_{k,j=1}^{2}(v^-_{k,q},v^-_{j,p})_H e^{-\frac{i}{\hbar}(\sqrt{q^2+1}t-\sqrt{p^2+1}t)}\bar{a}^-_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{-*}_{k,\hbar}(q)f(x,p)e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x}dxdpdq.$$

Nous allons maintenant borner les deux premières intégrales. Si nous faissons le changement de variable $p-q=\hbar y$, et nous posons, $\tilde{f}(y,p)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{iyx}f(x,p)dx$, on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}^6}\sum_{k,j=1}^{2}(v^\pm_{k,p-\hbar y},v^\mp_{j,p})_H e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\sqrt{p^2+1}t+\sqrt{(p-\hbar y)^2+1}t)}\bar{a}^\mp_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{\pm*}_{k,\hbar}(p-\hbar y)\tilde{f}(y,p)dydp.$$

Mais comme $|(v^\pm_{k,p-\hbar y},v^\mp_{j,p})_H|\leq K\hbar|y|$, ces intégrales sont plus petites ou égales à:

$$K\hbar\int_{\mathbb{R}^6}\sum_{k,j=1}^{2}|y||\tilde{f}(y,p)||\bar{a}^\mp_{j,\hbar}(p)||\bar{a}^\pm_{k,\hbar}(p-\hbar y)|dpdy,$$

et si on pose, $||\tilde{f}(y)||_\infty\equiv max_p|\tilde{f}(y,p)|$, alors ces intégrales sont plus petites ou égales à:

$$K\hbar\int_{\mathbb{R}^6}\sum_{k,j=1}^{2}|y|||\tilde{f}(y)||_\infty|\bar{a}^\mp_{j,\hbar}(p)||\bar{a}^\pm_{k,\hbar}(p-\hbar y)|dpdy,$$

; maintenant si on applique l'inégalité de Schwarz par rapport à la variable p, on arrive à la borne suivante:

$$K\hbar\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{k,j=1}^{2}|y|||\tilde{f}(y)||_\infty||\bar{a}^\mp_{j,\hbar}||_2||\bar{a}^\pm_{k,\hbar}||_2dy\leq\bar{K}\hbar\int_{\mathbb{R}^3}|y|||\tilde{f}(y)||_\infty dy.$$

On en déduit en que quand $\hbar\to 0$, ces deux intégrales convergent vers zéro. Nous venons donc de voir que:

$$J^2T^t_q\bar{\psi}\sim J^2\pi^+T^t_q\bar{\psi}+J^2\pi^-T^t_q\bar{\psi}.$$

Maintenant il reste seulement à vérifier que $J^2\pi^\pm T^t_q\bar{\psi}=T^t_{c,\pm}J^2\pi^\pm\bar{\psi}$. Calculons $\forall f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$:

$$\lim_{\hbar\to 0}[J^2_\hbar\pi^\pm T^t_\hbar\bar{\psi}_\hbar(f)-T^t_{c,\pm}J^2_\hbar\pi^\pm\bar{\psi}_\hbar(f)],$$

c'est-à-dire:

$$\lim_{\hbar\to 0}[\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^9}\sum_{k,j=1}^{2}(v^\pm_{k,q},v^\pm_{j,p})_H e^{\frac{i}{\hbar}(\sqrt{q^2+1}t-\sqrt{p^2+1}t)}\bar{a}^\pm_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{\pm*}_{k,\hbar}(q)$$
$$f(x,p)e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x}dxdpdq-T^t_{c,\pm}J^2_\hbar\pi^\pm\bar{\psi}_\hbar(f)],$$

si nous faisons le changement de variable $q=p-\hbar y$ et nous utilisons la limite de:

$$\int_{\mathbb{R}^9}(v^\pm_{k,p-\hbar y},v^\pm_{j,p})_H e^{\frac{i}{\hbar}(\sqrt{(p-\hbar y)^2+1}t-\sqrt{p^2+1}t)}\bar{a}^\pm_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{\pm*}_{k,\hbar}(p-\hbar y)f(x,p)e^{iyx}dxdpdy$$
$$-\int_{\mathbb{R}^9}(v^\pm_{k,p-\hbar y},v^\pm_{j,p})_H e^{\mp iy\frac{tp}{\sqrt{p^2+1}}}\bar{a}^\pm_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{\pm*}_{k,\hbar}(p-\hbar y)f(x,p)e^{iyx}dxdpdy,$$

est zéro, nous arrivons, après avoir fait le changement de variable, $z=x\mp\frac{tp}{\sqrt{p^2+1}}$ à:

$$\lim_{\hbar\to 0}[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^9}\sum_{k,j=1}^{2}(v^\pm_{k,p-\hbar y},v^\pm_{j,p})_H e^{iyz}\bar{a}^\pm_{j,\hbar}(p)\bar{a}^{\pm*}_{k,\hbar}(p-\hbar y)f\circ T^t_{c,\pm}(z,p)dzdpdy$$
$$-T^t_{c,\pm}J^2_\hbar\pi^\pm\bar{\psi}_\hbar(f)],$$

et si nous revenons à la variable $q=p-\hbar y$, nous arrivons à:

$$\lim_{\hbar\to 0}[J^2_\hbar\pi^\pm\bar{\psi}_\hbar(f\circ T^t_{c,\pm})-T^t_{c,\pm}J^2_\hbar\pi^\pm\bar{\psi}_\hbar(f)]=0.$$

6 Applications

Une première application est l'étude des états élémentaires (voir [7]).

Soit $[c]$ une onde élémentaire de spectre (x_0, p_0), un état élémentaire est un élément $[\psi_j^{\pm}] \in \tilde{Q}$ avec $j = 1, 2$, tel que:

$$\psi_j^{\pm} : (0, \hbar_0] \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4); \hbar \to \psi_{j,\hbar}^{\pm}(x),$$

$$\psi_{j,\hbar}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} v_{j,p}^{\pm}(x) \hat{c}_\hbar(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} dp,$$

où $\{v_{j,p}^{\pm}(x)\}$ est une base de vecteurs propres normalisés de la matrice $H(x,p) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(p_j - A_j(x)) + \beta$. Alors:

$$J[\psi_j^{\pm}] = [\delta_{(x_0,p_0)}].$$

A la limite, l'état élémentaire a comme mesure de probabilité sur l'espace des phases une mesure de Dirac centrée au point (x_0, p_0). Alors, à cause du théorème, nous avons:

$$JT_q^t[\psi_j^{\pm}] = T_{c,\pm}^t[\delta_{(x_0,p_0)}] = [\delta_{T_{c,\pm}^t(x_0,p_0)}].$$

Ce résultat nous dit qu'à la limite, l'état élémentaire a comme mesure de probabilitée une mesure de Dirac centrée au point $T_{c,\pm}^t(x_0, p_0)$, i.e., quand $\hbar \to 0$, leur évolution est classique.

La deuxième application qu'on présente est l'étude des états semi-classiques relativiste.

Soit $[\psi_j^{\pm}] \in \tilde{Q}$ avec $j = 1, 2$, tel que:

$$\psi_j^{\pm} : (0, \hbar_0] \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4); \hbar \to \psi_{j,\hbar}^{\pm}(x)$$

$$\psi_{j,\hbar}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^6} v_{j,p}^{\pm}(x) A(y) e^{\frac{i}{\hbar}S(y)} e^{\frac{i}{\hbar}p(x-y)} dy dp,$$

où $\{v_{j,p}^{\pm}(x)\}$ est une base de vecteurs propres normalisés de la matrice $H(x,p) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(p_j - A_j(x)) + \beta$. Alors:

$$J[\psi_j^{\pm}] = [A^2(x)\delta(p - \nabla S(x))].$$

L'état semi-classique à la limite a comme mesure de probabilité sur l'espace des phases une densité sur la varieté lagrangienne $p = \nabla S(x)$ (voir [4]). Alors, à cause du théorème, nous avons:

$$JT_q^t[\psi_j^{\pm}] = T_{c,\pm}^t J[\psi_j^{\pm}] = T_{c,\pm}^t[A^2(x)\delta(p - \nabla S(x))].$$

Le résultat nous dit qu'à la limite, l'état semi-classique a comme mesure de probabilité sur l'espace des phases, une densité classique sur la varieté lagrangienne qu'on obtient de l'équation d'Hamilton-Jacobi relativiste avec condition initiale $S(x)$.

Références

[1] S.ALBEVERIO and R.HOEGH-KROHN, Oscillatory Integrals and the Method of Stationary Phase in Infinitely Many Dimensions, with applications to the Classical Limit of Quantum Mechanics; Inv. Math., Vol. 40, pag. 59-106 (1977).

[2] J. CHAZARAIN et A.PIRIOU; Introduction à la théorie des equations aux derivées partielles linéaires; Gauthier-Villars, Paris (1981).

[3] J.CHAZARAIN, Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique; Comm. Partial Diff. Equat., 5, no. 6 (1980), pp. 595-644.

[4] J.J.DUISTERMAT, Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities; Comm. Pure and Appl. Math., Vol 27, pag. 207-281 (1974).

[5] J.HARO, El límit clàssic de la mecànica quàntica; Tesi Doctoral, U.A.B. (1997).

[6] J.HARTHONG, La propagation des ondes; I.R.M.A., Strasbourg (1978).

[7] J.HARTHONG, Études sur la mécanique quantique; Asterisque, 111, (1984).

[8] B.HELFFER et D.ROBERT, Comportement semiclassique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31,3 (1981), 169-223.

[9] V.P.MASLOV, Théorie des perturbations et méthodes assymptotiques; Dunod, Paris (1972).

[10] V.P.MASLOV and M.V.FEDORIUK, Semi-classical aproximation in quantum mechanics; D. Riedel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1981).

[11] V.P.MASLOV and V.E.NAZAIKINSKI, Assymptotics of operators and Pseudo-Differential Equations; Consultants Bureau, New York (1988).

[12] L.I.SCHIFF, Quantum Mechanics; MacGraw-Hill (1968).

[13] A.A.SOKOLOV, I.M.TERNOV, V.CH. ZHUKOVSKI, A.V. BORISOV, Electrodinámica cuántica; Ed. Mir (1991).

[14] A.TRUMAN, Feynman Path Integrals and Quantum Mechanics as $\hbar \to 0$; J. Math. Phys., Vol.17, nº 10, pag. 1852-1862 (1976).

[15] F.J.YNDURAIN, Mecánica Cuántica Relativista; Alianza Editorial, S.A., Madrid (1990).

(Manuscrit reçu le 28 août 1997)