

Sélection de la jauge électromagnétique comme condition d'intégration

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

Fondation Louis De Broglie, 23 Quai De Conti, 75006 Paris, France

A la mémoire de Louis de Broglie

RÉSUMÉ. On argue que, exprimée dans la jauge adhérente aux sources (celle de Coulomb en électrostatique) la 4-impulsion $-eA_i$ induite dans (disons) un électron exprime la 'réaction' à 'l'action' qu'il exerce sur les sources. Une preuve covariante se tire de l'électrodynamique de Wheeler-Feynman. Cette jauge exacte est sélectionnée comme condition d'intégration. On examine trois classes de phénomènes conduisant à cette conclusion : 1) Jauge de Coulomb sélectionnée par l'équivalence masse-énergie ; 2) Jauge magnétique sélectionnée par action-réaction linéaire via 'l'impulsion cachée dans un aimant' découverte en 1967; 3) Jauge de Coulomb sélectionnée par le 'spin $V\mathfrak{M}$ électriquement induit dans un aimant'. Dans les trois cas c'est la gravitation ou l'inertie qui sélectionne la jauge électromagnétique.

ABSTRACT. We argue that, as expressed in the source adhering gauge (Coulomb's in electrostatics) the 4-momentum $-eA_i$ induced in (say) an electron expresses the 'reaction' to the 'action' it exerts on the sources. A covariant proof is found in the Wheeler-Feynman electrodynamics. This exact gauge is selected as an integration condition. Three classes of phenomena yielding this conclusion are examined: 1) Coulomb gauge selected via mass-energy equivalence; 2) Magnetic gauge selected by linear action-reaction via the 'hidden momentum in magnets' discovered in 1967 ; 3) Coulomb gauge selected by the $V\mathfrak{M}$ 'electrically induced spin' in a magnet. In all three cases it is gravity or inertia that selects the electromagnetic gauge.

1 Sélection de la jauge de Coulomb par l'équivalence masse-énergie

Louis de Broglie arguait souvent que, tout à fait indépendamment de sa théorie du photon massif, la jauge électromagnétique est fixée, et que le 4-potentiel est donc une grandeur physique mesurable. Sur les exemples du 'défaut de masse électrique' d'un système de charges et du potentiel accélérateur d'un canon à électrons [1,2] il a montré que la jauge de Coulomb est sélectionnée par l'équivalence masse-énergie. Parmi les nombreux exemples pouvant appuyer cette conclusion l'un, fort simple, est celui du 'rayon de l'électron'. Si la masse de l'électron est postulée d'origine entièrement électromagnétique, de formule $-\frac{1}{2}c^{-2}eV$, le self-potentiel électrique doit impérativement être exprimé comme $V = -e/r$.

Deux remarques sont à noter : 1) *La jauge est sélectionnée comme condition d'intégration ; 2) L'étalon de référence est gravitationnel.*

Convenons pour faire bref d'appeler **exact** un potentiel exprimé dans la jauge adhérente aux sources.

2 Sélection de la jauge magnétique par "l'impulsion cachée dans un aimant"

En 1967 trois études indépendantes [3,4,5] ont prouvé l'existence d'une *impulsion électrostatiquement in-*

duite dans un aimant ou un circuit ampérien. Pour un dipole de moment magnétique \mathfrak{M} plongé dans un champ électrique $\mathbf{E} \equiv \partial V$ son expression a la forme de Poynting

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{E} \times \mathfrak{M}(\text{esu}). \tag{1}$$

Si l'on fait varier le vecteur joignant les deux pôles le moment \mathfrak{M} varie et *le dipôle recule*, parce que chaque pôle d'intensité $\pm\varpi$ sent la "force de Lorentz électrique" $\varpi\mathbf{E} \times \mathbf{v}$. C'est de cette façon que j'ai [3] déduit la formule (1).

L'argument de Penfield et Haus [4] s'apparente à celui de la théorie de l'atome de Sommerfeld. La masse relativiste m d'un électron de masse propre μ évoluant dans un potentiel électrostatique $V(\mathbf{r})$ a l'expression coulombienne 'exacte'

$$m = \mu - c^{-2}eV; \tag{2}$$

donc un circuit ampérien d'intensité i plongé dans un potentiel électrostatique $V(\mathbf{r})$ contient une impulsion potentielle induite

$$\mathbf{p}_m = i \int V d\mathbf{l} \equiv i \int \int \mathbf{E} \times d\mathbf{s}. \tag{3}$$

La seconde expression se déduit [3] de la première (qui est invariante de jauge) par la formule générale de transformation des intégrales multiples (donnée en Appendice 1). L'équivalence ampérienne des formules (1) et (3) est manifeste.

Si donc on varie l'intensité i le circuit recule sous l'action d'une force $d\mathbf{p}_m/dt$ où le potentiel est indépendant du temps – un trait qu'on retrouvera dans le problème du recul angulaire.

Montrons que le principe d'action-réaction sélectionne la jauge magnétique 'exacte' adhérente à la source, d'expression

$$\mathbf{A} = r^{-3}\mathfrak{M} \times \mathbf{r} \quad (4)$$

dans le cas du dipôle, ou

$$\mathbf{A} = i \int r^{-1} d\mathbf{l} \quad (5)$$

dans le cas du circuit. Si le champ $E \equiv \partial V$ est celui d'une charge ponctuelle Q , on vérifie en substituant (4) ou (5) dans $\mathbf{p}_c = -QA$ la formule d'action-réaction

$$\mathbf{p}_m = -\mathbf{p}_c \equiv QA, \quad (6)$$

les impulsions potentielles \mathbf{p}_c et \mathbf{p}_m étant indirectement opposées. La formule s'étend au cas d'une distribution de charges.

La jauge magnétique 'exacte' est ainsi sélectionnée comme condition d'intégration – et ce, par un argument de nature inertielle.

Coleman et van Vleck [6] ont appelé "moment caché dans un aimant" cette *impulsion électrostatiquement induite*, et le nom est resté. Le phénomène est aussi analysé dans un article de revue de Goldhaber et Trower [7].

3 Action-réaction angulaire entre un dipôle magnétique et une charge électrique ponctuelle

Ce problème mérite examen – ne serait-ce que pour analyser la réaction angulaire de la Terre défléchissant les électrons de Birkeland.

La mutuelle énergie du système formé par un dipôle magnétique de moment \mathfrak{M} et une charge ponctuelle d'intensité Q l'un et l'autre au repos dans un repère inertiel est évidemment nulle ; sa mutuelle impulsion l'est aussi comme on vient de le voir. Les deux impulsions potentielles indirectement opposées sont pour ainsi dire des fossiles laissés par les forces actives lors de l'assemblage du système.

Le *mutuel moment angulaire* a les expressions équivalentes

$$\mathbf{C} = QA \times \mathbf{r} \equiv Qr^{-3}[\mathfrak{M} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{r} = V\mathfrak{M} - (\mathbf{E} \cdot \mathfrak{M})\mathbf{r}. \quad (7)$$

Au dernier membre figurent le *spin potentiel* $(\mathbf{E} \cdot \mathfrak{M})\mathbf{r} \equiv V\mathfrak{M}$ et la précession $-(\mathbf{E} \cdot \mathfrak{M})\mathbf{r}$ de ce qu'on peut appeler une toupie gelée. *Le spin $V\mathfrak{M}$ doit être exprimé dans la jauge exacte.*

Ajoutant à \mathbf{C} moins le dernier membre nous énonçons: *Le système contient un moment angulaire*

potentiel total nul, somme vectorielle d'un moment orbital, d'un moment de précession, et d'un spin – en conformité avec l'analyse de la toupie par Euler.

Si le moment magnétique \mathfrak{M} est varié, charge et dipôle sont projetés par un effet de fronde. La charge, évoluant dans le champ \mathbf{B}_m de l'aimant, se met à orbiter; donc son champ \mathbf{B}_c applique un couple à l'aimant. Les deux corps se mettent à valser, partageant une 4-impulsion et un moment-angulaire-et-barycentrique à 6 composantes, l'un et l'autre conservés.

Ainsi, les électrons de Birkeland défléchis par le champ magnétique terrestre confèrent à la Terre un moment angulaire potentiel $V\mathfrak{M}$, V notant leur potentiel coulombien *exact*.

Remplaçons le dipôle par un petit circuit ampérien de moment $\mathfrak{M} = i\mathbf{S} = i\pi r^2$. Calculé à partir de la formule (3) de Penfield-Haus le moment angulaire engendré par l'impulsion potentielle locale $d\mathbf{p}_m = iVd\mathbf{l}$ vaut, comme il le fallait,

$$\mathbf{C} = c^{-2}iV\mathbf{S} \equiv V\mathfrak{M}. \quad (8)$$

Dans la formule (3) V a donc une signification locale et doit être exprimé dans la jauge de Coulomb – ce qui confirme les vues de Louis de Broglie.

Revenant à l'atome de Sommerfeld, l'avance du périastroon met en évidence le *moment angulaire effectif* de l'électron. Si l'orbite est circulaire, d'aire \mathbf{S} , le *rapport gyromagnétique anormal* $-2m/e$ associé à la masse effective (2) de l'électron est mesuré avec grande sensibilité par la spectroscopie.

Remarque. L'équation (7) est déductible du concept du dyon [8], défini comme l'association d'un pôle électrique et d'un pôle magnétique d'intensités e et ϖ . *Le dyon a un spin colinéaire au vecteur séparation* valant $e\varpi$ (Thomson [9] l'a exprimé comme le moment angulaire orbital du vecteur de Poynting dans l'espace ambiant). L'association d'un dipôle et d'une charge ponctuelle équivaut à celle de deux dyons faisant entre eux un angle infinitésimal.

4 Dipôle magnétique coaxial à un cercle uniformément chargé

Remplaçons la précédente charge Q par un cercle uniformément chargé de charge Q , coaxial et co-équatorial à l'aimant. Le terme de précession dans (7) étant alors intégralement nul, les moments angulaires induits l'un dans le dipôle par le champ \mathbf{E} du cercle, l'autre dans le cercle par le potentiel vecteur \mathbf{A} du dipôle, ont les expressions opposées $\pm V\mathfrak{M}$. Donc un effet Einstein-de Haas ou Barnett provoqué sur le dipôle exhibera un rapport gyromagnétique anormal, la *masse effective* de l'électron ayant l'expression (2).

Imposée par toute l'argumentation précédente cette affirmation s'oppose à la négation suggérée par Feynman [10] : inexistence d'un moment angulaire

–**C** induit dans l'aimant – ce qui laisse ouverte la question du recul angulaire de la Terre recevant les électrons de Birkeland – et autorise la construction d'un 'bootstrap carousel', un 'manège' dont la mise en route se ferait sans réaction sur la place du village.

Si enfin, coaxial à l'aimant, le cercle ne lui est plus co-équatorial mais situé à une latitude a , le terme de précession dans (7) donne par intégration $V\mathfrak{M}\cos^2 a$ qui, soustrait du spin $V\mathfrak{M}$, donne un 'spin corrigé' $V\mathfrak{M}\sin^2 a$ (zéro aux pôles nord ou sud).

5 Inerties linéaire et angulaire électriquement induites à l'intérieur d'une sphère creuse uniformément chargée

5.1. Prologue. Animée autour d'un de ses diamètres d'une vitesse angulaire constante Ω une sphère uniformément chargée au potentiel exact V contient un champ magnétique \mathbf{B} qui, calculé par Batagin et Toptygin [11], est uniforme, et vaut

$$B = \frac{2}{3}c^{-2}V\Omega. \quad (9)$$

Le facteur du second membre est identique au facteur du diamagnétisme de Larmor pour une charge ponctuelle Q dont la masse $m = c^{-2}QV$ serait entièrement électriquement induite ; le facteur $2/3 = 1 - 1/3$ met en évidence l'isotropie de l'espace d'Euclide.

D'autre part, si la sphère rigidement chargée est animée d'une accélération constante \mathbf{g} , ou si 'équivalamment' elle repose sur le sol dans un champ gravitationnel \mathbf{g} , elle contient un champ électrique uniforme d'expression phénoménologique

$$\mathbf{E} = c^{-2}V\mathbf{g}; \quad (10)$$

en effet, animée d'une vitesse uniforme \mathbf{v} elle contiendrait le potentiel vecteur $\mathbf{A} = V\mathbf{v}$ et donc, dotée d'une faible accélération \mathbf{g} , elle contient le *champ électrique induit* (10). Notons qu'en termes minkowskiens l'accélération uniforme du repère est une rotation hyperbolique des axes (x, ct) et que, dans une accélération de la sphère à la Born, le champ E est engendré comme composante (x, ct) du rotationnel du 4- potentiel.

Examinons quelques conséquences des équations (10) puis (9).

5.2. Extra-masse et extra-inertie induites d'une charge ponctuelle à l'intérieur d'une sphère rigidement chargée. Un électron par exemple, sentant à la fois le champ gravitationnel \mathbf{g} et le champ électrique induit (10), exhibera la masse effective (2). Au potentiel + 511 kV il flottera en équilibre indifférent ; à $V > 511$ kV il jouera les aérostats.

Assimilable à un dynamomètre connectant la charge au centre de la Terre, le *champ de gravitation g* l'accélère de l'extérieur. On peut donc peser

la mutuelle énergie de la particule et de la sphère en les connectant par un ressort dont les extrémités subissent action et réaction. Donc $\pm c^{-2}eV\mathbf{r}''$ note à la fois la force appliquée à la sphère par un électron accéléré (via le champ électrique induit) et l'extra-inertie induite dans l'électron par le potentiel sans champ V .

Remarque 1. Si la sphère n'est pas rigidement chargée mais est conductrice, le champ électrique total est nul en son intérieur parce que, étant pesants, les électrons de conduction se déplacent vers une nouvelle configuration d'équilibre, et que la charge superficielle cesse d'être uniforme.

Remarque 2 : Isomorphisme de cet argument et de celui de Mach touchant l'origine de l'inertie. Mach a proposé que la masse inerte m_i d'un point matériel soit induite à partir de sa masse grave m_g (sa 'charge gravitationnelle') par interaction avec le reste du cosmos. $U = GM/R$ notant le potentiel cosmologique exact m_i serait donc l'équivalent massique de l'énergie potentielle $c^{-2}Um_g$. Puisque par définition (ou choix) des unités on a l'égalité $m_i = m_g$ il vient $GM/c^2R = 1$, une formule généralement vraie à un facteur simple près dans les divers modèles cosmologiques. Le potentiel cosmologique joue dans cet argument le même rôle que le potentiel électrostatique dans le nôtre.

5.3. Dipôle magnétique au centre d'une sphère uniformément chargée. Imaginons qu'on aimante à la Barnett un barreau ferromagnétique en lui imprimant une vitesse angulaire au moyen d'un mécanisme programmé intérieur à la sphère. Un calcul simple [12] (voir Appendice 3) montre que, le potentiel vecteur de l'aimant étant exprimé dans la jauge exacte (4), la sphère acquiert un moment angulaire

$$\mathbf{C} = \frac{2}{3}c^{-2}V\mathfrak{M} \quad (11)$$

qui se trouve être exactement opposé à celui du vecteur de Poynting extérieur à la sphère. Sur un exemple légèrement différent Feynman [10] laisse entendre que 'c'est la fin de l'histoire', que l'aimant ne subit pas de réaction angulaire, le vecteur de Poynting prenant toute l'affaire à son compte.

Voici une raison de penser le contraire. Soit une charge ponctuelle Q parcourant à la vitesse \mathbf{v} l'axe d'un cylindre uniformément chargé enfermant un potentiel coulombien sans champ V . Extérieures au cylindre, et concentriques à la charge, existent des distributions d'énergie de Maxwell et d'impulsion de Poynting d'expressions intégrales QV et $Q\mathbf{A} = c^{-2}QV\mathbf{v} = \int \int \int \mathbf{E} \times \mathbf{B} du$. La *masse effective* de la particule est donc m d'expression (2) et son *impulsion effective* $m\mathbf{v}$. On peut dire *équivalamment* que la charge perçoit à distance le champ électrique extérieur ou qu'elle sent directement le potentiel

électrique qui la baigne. Si l'on accélère la charge le long de l'axe les distributions de Maxwell et de Poynting l'accompagnent 'comme son ombre', lui conférant une extra-masse $c^{-2}QV$ et une extra-impulsion $c^{-2}QV\mathbf{v}$. *Il y a action-réaction entre le cylindre et la charge*, ce qu'on peut formuler soit en termes d'action à distance, soit en termes de champ d'interaction.

Tout ceci se transpose au problème angulaire, et confirme la formule (11).

La connection entre les contenus des sections 5.2 et 5.3 se voit grâce au modèle ampérien du magnétisme. Le dipôle étant assimilé à un petit courant circulaire de moment $\mathfrak{M} = i\mathbf{S}$, variations \mathfrak{M} en accélérant les électrons le long du circuit. L'opposition action-réaction *linéaire*, discutée en section 5.2, entraîne l'opposition *angulaire* ici considérée.

Enfinement *la restriction que le dipôle soit au centre la sphère peut être levée*, car il n'y a pas de contribution orbitale au moment angulaire du système.

Conclusion : A l'intérieur d'une sphère uniformément chargée au potentiel de Coulomb $V = Q/R$ un aimant de moment \mathfrak{M} acquiert un spin potentiel (11). Il exhibera donc un rapport gyromagnétique anormal soit, dans le cas du ferromagnétisme,

$$-\frac{m}{e} = -\frac{\mu}{e}\left(1 - \frac{2}{3}c^{-2}V\right); \quad (12)$$

au potentiel $V = +(3/2)511 \text{ kV} = +766 \text{ kV}$ l'effet Barnett sera instable (de petites vitesses angulaires induisant l'aimantation) et l'effet Einstein-de Haas inhibé ; à $V > +766 \text{ kV}$ les signes des deux effets seront inversés [14,15].

Notons que dans l'expression du couple $Vd\mathfrak{M}/dt$ accélérant angulairement l'aimant le potentiel reste constant.

5.4. Sur la relation entre les formules (9) et (11). Quand le moment magnétique du dipôle passe de zéro à \mathfrak{M} la sphère acquiert, avec le moment angulaire (11), une vitesse angulaire \mathbb{E} qui engendre en son intérieur un champ magnétique uniforme \mathbf{B} de formule (9). De (9) et (11) on conclut que *l'énergie cinétique de la sphère est empruntée à l'énergie potentielle du dipôle* :

$$\mathbf{C}.\Omega = \mathbf{B}.\mathfrak{M}. \quad (13)$$

Ce champ \mathbf{B} modifie le moment magnétique \mathfrak{M} de l'aimant ; il induit par exemple une tension entre les pôles d'un dipôle coulombien, et une précession de Larmor dans un circuit ampérien. De là provient l'anomalie du rapport gyromagnétique qu'on a discutée.

6 Formules et énoncés covariants

6.1. L'extension minkowskienne de l'énoncé "Dans un potentiel coulombien $V(\mathbf{r})$ un électron acquiert une masse potentielle $-c^{-2}eV$ mesurable par pesée dans un champ de gravitation" est : *Dans un 4-potential donné $A^i(x^k)$ exact un électron acquiert une 4-impulsion potentielle $-eA^i$ mesurable comme réaction à son action sur les sources.*

Corollaire : L'action-réaction sera exprimée de manière covariante en insérant le 4-potential exact dans la 4-impulsion effective ou moment de Lagrange de l'électron

$$P_\mu^i x'^\mu + eA^i, \quad x'_i x'^i = -c^2, \quad (14)$$

et en écrivant l'équation du mouvement de Lorentz sous la forme

$$dP_i = e(\partial_i A_k) dx^k. \quad (15)$$

Ceci se vérifie en électrodynamique de Wheeler-Feynman [15], qui est dérivable des deux prémisses : 1) Le 4-potential exact d'une charge e_a est, avec $r^i \equiv a^i - b^i$,

$$A^i = e_a \int \delta(r^2) da^i, \quad (16)$$

2) Les équations du mouvement couplées de deux charges peuvent être écrites sous la forme action-réaction

$$d^2 P_a^i = -d^2 P_b^i = e_a e_b \delta'(r^2) r^i da_k db^k. \quad (17)$$

De (16) and (15) on déduit (14).

6.2. Expression minkowskienne d'un rapport gyromagnétique. L'extension minkowskienne de l'équation vectorielle

$$-e\mathbf{C} = m\mathfrak{M} \quad (18)$$

valable pour un électron est, avec $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ et $x^4 = ict$,

$$-eC^{jk} = P_i \mathfrak{M}^{ijk}. \quad (19)$$

P_i notant la 4-impulsion effective de l'électron, C^{jk} et \mathfrak{M}^{ijk} sont des tenseurs antisymétriques ; \mathfrak{M}^{ijk} est relié à la densité de polarisation $M^{ij} \equiv B^{ij} - H^{ij}$ par la formule

$$d\mathfrak{M}_{ijk} = \sum M^{ij} du^k \quad (20)$$

avec $icdu^i \equiv \frac{1}{6}\varepsilon^{ijkl}[dx_i dx_k dx_l]$. Le quadrivecteur $\mathfrak{M}^i \equiv \frac{1}{6}\varepsilon^{ijkl}\mathfrak{M}_{jkl}$ est du genre espace.

6.3. Expression minkowskienne du 'moment angulaire caché dans un aimant'. Substituant dans (18) la contribution potentielle eA_i à la 4-impulsion p_i d'un électron, on obtient l'expression covariante du *moment-angulaire-et-barycentrique induit dans un aimant par un 4-potential A_i donné*

$$C^{jk} = A_i \mathfrak{M}^{ijk}; \quad (21)$$

c'est la généralisation covariante de la formule (8).

7 Conclusions

La jauge **exacte** adhérente aux sources est sélectionnée comme **condition d'intégration** par la conservation soit de *l'énergie*, soit du *moment linéaire*, soit du *moment angulaire*.

Le premier énoncé, *sélection de la jauge de Coulomb par le 'défaut de masse électrique'*, est si indiscutable qu'on s'étonne de la réticence générale à l'encontre de l'affirmation de Louis de Broglie [1,2] que le potentiel électrique est une grandeur mesurable *-pesable*.

Le second énoncé s'appuie sur un phénomène discuté [6,7] découvert en 1967, celui dit du "moment linéaire caché dans un aimant". Les trois études [3,4,5] où il est décrit insistent sur ce qu'il implique *l'action-réaction entre les sources du champ*. On lit *directement* sur sa formule que la jauge magnétique **exacte** est ainsi sélectionnée.

Curieusement le troisième énoncé passe mal, de par l'autorité de Feynman [10] probablement, car il l'a récusé. D'abord *on se demande pourquoi le moment angulaire ferait bande à part*. Ensuite on remarque qu'une absence d'action-réaction angulaire entre les sources du champ surprendrait – *par exemple* dans la déflexion des électrons de Birkeland par le champ magnétique terrestre.

On argue ici que le moment angulaire ne fait *pas* bande à part, et que *lui aussi* sélectionne comme condition d'intégration le 4-potentiel **exact** adhérent à la source.

On argue *aussi* que *ces trois conservations* (masse, impulsion, moment angulaire) sont observables au sein du *potentiel électrique sans champ* enclos dans une sphère uniformément chargée. Cet "argument électrostatique" s'apparente étroitement à l'argument cosmologique de "l'origine de l'inertie selon Mach", d'après lequel la masse inerte d'un point matériel serait induite à partir de sa masse grave ou *charge gravitationnelle*, autrement dit, serait *équivalente* à l'énergie potentielle cosmologique. Le 'recul angulaire de notre aimant' est alors analogue à l'effet "seau tournant de Mach".

De tout cela deux interprétations sont possibles : 1) La particule d'épreuve perçoit directement le potentiel sans champ où elle baigne ; 2) Elle perçoit à distance le champ extérieur à la sphère. Le dernier type de discours est usuel pour l'effet Bohm-Aharonov – qui est invariant de jauge. Ici l'énoncé est plus fort : *le potentiel lui-même est mesurable*.

Notons enfin que *dans ces trois types d'effets l'étalon de mesure du potentiel électromagnétique est inertiel ou gravitationnel*. Ceci suggère l'existence d'un couplage électro-gravifique qu'il reste à mieux comprendre.

APPENDICE 1 : Transformation des intégrales multiples : Expression minkowskienne de la formule générale

T notant un tenseur quelconque, l'intégrale d'ordre $p+1$ est étendue au contour enfermant un hypervolume d'ordre p ($1 \leq p \leq 4$ dans l'espace-temps) :

$$\int_{p+1} \partial^i T [dx_i dx_j \dots dx_k] = \int_p T [dx_j \dots dx_k].$$

APPENDICE 2. Dipôle magnétique concentrique à une sphère uniformément chargée

Les coordonnées sphériques adaptées au problème sont le rayon r , la latitude a , la longitude b . Le moment angulaire $-C$ du vecteur de Poynting, qui est extérieur à la sphère et tangent à un parallèle, a pour longueur l'intégrale de l'expression

$$-dC = (4\pi)^{-1} (Q\mathfrak{M}r^{-5} \cos a) (r \cos a) (2\pi r^2 \cos a da dr);$$

la première parenthèse contient la longueur du vecteur de Poynting, produit vectoriel du champ électrique radial et du champ magnétique tangent au méridien ; la seconde 'prend le moment de ce vecteur' par rapport à l'axe polaire ; la troisième exprime le volume toroidal compris entre da et dr . Après simplifications

$$-dC = \frac{1}{2} Q\mathfrak{M}r^{-2} dr \cos^3 a da.$$

L'intégrale de r^{-2} de R à $+\infty$ donne $-1/R$; celle de $\cos^3 a$ de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ donne $4/3$. Finalement $-C = -\frac{2}{3} V\mathfrak{M}$, C.Q.F.D.

Cette expression égale 'moins' le moment angulaire induit dans la sphère chargée par le potentiel vecteur \mathbf{A} du dipole. A valant $R^{-2}\mathfrak{M} \cos a$ à la latitude a , son moment angulaire vaut $R^{-1}\mathfrak{M} \cos^2 a$. Multipliant par la charge superficielle comprise entre a et $a + da$, soit $(Q/4\pi R^2)(2\pi R^2 \cos a da) = \frac{1}{2} Q \cos a da$, et intégrant de $-\pi/2$ à $+\pi/2$, il vient $C = +(2/3)V\mathfrak{M}$.

Le calcul du champ magnétique $\mathbf{B} = (2/3)c^{-2}\Omega$ au centre d'une sphère creuse chargée en rotation est tout à fait analogue.

Références

- [1] L. de Broglie, C.R. Ac. Sci. 225 (1947) 163.
- [2] L. de Broglie, Optique Electronique et Corpusculaire (Hermann, Paris) pp. 45-49.
- [3] O. Costa de Beauregard, Phys. Lett. A 24 (1967) 177.
- [4] P. Penfield and H. Haus, Electrodynamics of Moving Media, (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1967) pp. 202 ff.
- [5] W. Shockley and R.P. James, Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 876.
- [6] S. Coleman and J.H. van Vleck, Phys. Rev. 17 (1968) 1370.

- [7] A.S. Goldhaber and W.P. Trower, Amer. J. Phys. 58 (1990) 429.
- [8] E. Witten, Phys. Lett. B 86 (1979) 283.
- [9] J.J. Thomson, Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism (Cambridge University Press, 1904).
- [10] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics Vol 2 (New York, 1963) pp. 17.5, 27.11.
- [11] V.V. Batagin and I.K. Toptygin, Problems in Electrodynamics (N.Y., 1964) p. 61.
- [12] O. Costa de Beauregard, Nuovo Cim. B 63 (1969) 611.
- [13] O. Costa de Beauregard, Physics Essays 10 (1997) 492 and 646.
- [14] O. Costa de Beauregard in Advanced Electrodynamics, T.W. Barrett and D.M. Grimes eds, (World Scientific Singapore 1995) p. 77.
- [15] J.A. Wheeler and R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 21 (1949) 425.
- [16] D.W. Sciama, Roy. Astron. Soc. Monthly Not. 113 (1953) 34.

(Manuscript reçu le 20 octobre 1998)