

Vérité scientifique et trous noirs (première partie) Les abus du formalisme

NIKIAS STAVROULAKIS

Solomou 35, 15233 Chalandri, Grèce

RÉSUMÉ. Le formalisme de la relativité générale comporte des notions mathématiques qui n'étaient pas clarifiées lors de la parution des premiers mémoires d'Einstein. Cette situation, conjointement avec le rôle exorbitant attribué à la covariance des équations de gravitation, a conduit à une pratique transgressant des principes fondamentaux : Formulation de problèmes sans indication des variétés sous-jacentes, introduction de changements de coordonnées locales à tout bout de champ sans préciser leurs domaines de validité, introduction de transformations avec singularités, utilisation de fonctions inconnues comme coordonnées. Les transgressions de principes traversent toute l'histoire de la relativité générale et se trouvent, en particulier, à la base de la théorie des trous noirs. Nous nous proposons de montrer que la notion de trou noir est vide de contenu scientifique et que l'on doit lui substituer une théorie cohérente faisant état des phénomènes gravitationnels engendrés par les déformations des distributions de matière.

ABSTRACT. When the general relativity was founded by Einstein, several mathematical notions involved in it were not yet clarified. Moreover the significance of the covariance, which simply expresses the tensor character of the equations of gravitation, was exaggerated. On account of these circumstances, several transgressions of fundamental principles have appeared from the beginnings of general relativity : Formulation of problems without indicating the underlying manifolds, frequent changes of local coordinates without defining their domains of validity, introduction of transformations with singularities, identifications of unknown functions with coordinates. The transgressions of principles continue always to persist and form, in particular, the background of the theory of black holes. Our purpose is to show that the notion of black hole is empty of scientific content and that we have to replace it by a coherent theory putting forward

the gravitational effects generated by the changes in the distribution of matter.

1. Introduction

Depuis 1916 la “célèbre solution de Schwarzschild” hante les esprits. Célèbre, en effet, à cause de l’ampleur des discussions qu’elle a déclenchées et de l’embrouillement qui en a résulté. Il est hors de doute maintenant que l’on ne saurait sortir de l’impasse des controverses ainsi accumulées sans mettre en cause la solution elle-même avec les idées sous-jacentes et la méthode qui y a conduit. Notre étude, bien que motivée par les faiblesse de la solution de Schwarzschild, s’étendra donc nécessairement à une critique circonstanciée des points de vue dogmatiques qui entravent la clarification de la relativité générale.

Pour bien situer notre sujet, il est tout d’abord nécessaire de dissiper une méprise concernant la vérité historique. Ce qu’on appelle solution de Schwarzschild est en fait la solution présentée par Droste quatre mois après la parution de la note de Schwarzschild. Toutes les deux sont conçues sur la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, mais présentent des caractéristiques différentes, de sorte que l’on devra en tenir compte séparément dans l’analyse qui sera développée plus loin.

Schwarzschild a présenté sa solution sous la forme [17]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2 d\omega^2 \quad (1.1)$$

avec

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}}, r \geq 0, \alpha = \frac{2km}{c^2},$$

k étant la constante gravitationnelle de Newton. (Dans l’écriture ci-dessus, nous avons amélioré les notations habituelles en introduisant la métrique $d\omega^2$ globalement conçue sur S^2 au moyen de deux systèmes de coordonnées géographiques).

En ce qui concerne la métrique de Droste [7], elle résulte formellement de (1.1) en y remplaçant $R = (r^3 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}}$ par r :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 d\omega^2, r > 0 \quad (1.2)$$

Sous l'influence d'une critique formulée dans un article ultérieur de Hilbert reproduisant la solution de Droste, la solution de Schwarzschild a été abandonnée. Mais le nom de Droste a aussi été oublié. Connue désormais sous le nom de Schwarzschild, la solution de Droste a fait couler beaucoup d'encre en raison de la discontinuité qu'elle présente pour $r = \alpha$. La plupart des relativistes et des astrophysiciens pensent actuellement que cette discontinuité nous révèle l'existence d'un objet mythique, appelé trou noir, caractérisé par une singularité ponctuelle entourée, dans le vide, d'une sphère mystérieuse, appelée "l'horizon", délimitant une région bornée dans laquelle le temps se transforme en espace et vice-versa. L'idée extravagante de trou noir est soutenue avec tant de bruit et tant d'insistance que le lecteur non informé est amené à croire qu'il s'agit d'une théorie bien établie théoriquement et confirmée par l'observation. En ce qui concerne ceux qui s'y opposent, la plupart d'entre eux pensent qu'il s'agit d'une prévision théorique malencontreuse entraînée inévitablement par les équations de gravitation. Cette position est surtout manifeste dans les écrits de J.L. Synge, N. Rosen, T.V. Narlikar, T. Padmanabhan. Mais il faut aussi signaler le point de vue tranché de L.S. Abrams qui propose le retour à la vraie solution de Schwarzschild (1.1) en remarquant que celle-ci est exempte de l'horizon $r = \alpha$.

J.L. Synge soutenait au début que la singularité de Schwarzschild (c'est-à-dire l'horizon $r = \alpha$ dans la solution de Droste) n'appartient pas au domaine de validité de la solution : "The Schwarzschild singularity exists as a formal singularity of the exterior form, but it does not exist in the domain of validity of that exterior form" [27]. Mais sous la pression générale, il a fini par adhérer à l'idéologie dominante. Ainsi, dans une lettre adressée à l'auteur du présent article, il écrivait :

"My views about spherical symmetry have changed since 1963. Then, like you, I thought that a spherically symmetric system must have a centre, and that the symmetry was concerned with orthogonal transformations in 3-space. But now I take a wider view. I define a V_4 with spherical symmetry to be the product of two 2-spaces in the following sense. Let S_2 be the surface of a unit sphere and U_2 a two-space with indefinite metric. Then I define spherically symmetric V_4 by demanding that its metric is the sum of the metric of U_2 and the metric of S_2 multiplied by a positive factor. In U_2 I prefer to use null coordinates because they are the least likely to involve singularities; I define these coordinates (u, v) in U_2 by the condition that the null lines are $u = \text{const.}$,

$v = \text{const.}$ Thus, the general metric form for the spherically symmetric space-time is

$$-2fdudv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

where f and r are functions of (u, v) ... In fact, all I have been doing is to reconstruct Kruskal in a different way. It all depends on how you define "spherical symmetry". Anyone may feel inclined to reject the above definition, but I feel happy at having got rid of a centre!"

En ce qui concerne N. Rosen, il essaie de surmonter la difficulté en substituant une théorie bimétrique à la relativité générale, dans l'espoir d'éliminer la "singularité de Schwarzschild". Il distingue alors deux cas suivant que la source est une masse ponctuelle ou une masse étendue en effondrement. Dans le premier cas la métrique principale présente des discontinuités sur la "sphère de Schwarzschild" et devient complexe à son intérieur de sorte que "one must conclude that the interior of the Schwarzschild sphere is an unphysical region... Neither particles nor light rays can enter the Schwarzschild sphere" [14]. Visiblement cette situation contredit l'hypothèse de départ suivant laquelle la métrique est censée définir le champ d'une masse ponctuelle. Dans le deuxième cas la métrique principale présente aussi des discontinuités sur la "sphère de Schwarzschild" qui délimite alors un espace fermé : "It is a closed space, so that particles and light rays cannot enter or leave... If the particle is falling, it will bounce back from the Schwarzschild sphere" [14]. La théorie bimétrique aboutit donc à des conclusions paradoxales sans pour autant éliminer la singularité en question. C'est probablement la raison pour laquelle N. Rosen réexamine le problème sur la base de la relativité générale. Dans un article [15] paru en 1982, il considère une famille de solutions dépendant d'un paramètre α et censée représenter le champ d'une source ponctuelle :

$$ds^2 = (v + \Delta)dt^2 - e^{2\alpha t} \left(\frac{dr^2}{v + \Delta} + r^2 d\omega^2 \right),$$

$$\left(v = \frac{1}{2} - \frac{m}{re^{\alpha t}}, \Delta = \sqrt{v^2 + \alpha^2 r^2 e^{2\alpha t}} \right),$$

famille qui présente des caractéristiques manifestement inadmissibles physiquement. En particulier, la mesure de chaque sphère $r = Cte > 0$ augmente indéfiniment ou tend vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$ suivant que $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$. Cependant N. Rosen pense que l'on peut en tirer

parti en y faisant $\alpha = 0$, ce qui devrait en principe redonner la solution de Droste (1.2). Or la condition $\alpha = 0$ entraîne $v + \Delta = v + |v|$, d'où $v + \Delta = 1 - \frac{2m}{r}$ pour $r \geq 2m$ et $v + \Delta = 0$ pour $0 < r < 2m$. La "singularité de Schwarzschild" réapparaît donc pour $r = 2m$ et en outre la métrique n'a plus de sens pour $r \leq 2m$: "What we have obtained is the Schwarzschild solution, but for a space in which the region $r < 2m$ is unphysical and is not a part of the space" [15]. Or la métrique n'ayant pas de sens pour $r \leq 2m$, elle ne peut représenter ni le champ d'une source ponctuelle ni le champ d'une source étendue.

La position de T.V. Narlikar et T. Padmanabhan vis-à-vis des idées traditionnelles est beaucoup plus claire. Bien qu'ils restent prisonniers de l'idée que la relativité générale est compatible avec la notion de source ponctuelle, ces deux auteurs ne manquent pas de signaler [12] les incohérences de la métrique (1.2). En ce qui concerne "l'existence de trous noirs" ils constatent : "No observers in the Schwarzschild metric (whether they stay outside $r = R_s$, or choose to fall inside) will never be able to observe either the formation or the physical effects of a singularity at $r = 0$. We leave it to the reader to decide whether a singularity that can never be observed and that can never affect any physical process "exists" in any sense of the word". J.V. Narlikar et T. Padmanabhan ne mettent pas en doute la structure mathématique de (1.2) : "Within the framework of general relativity, this situation has a real status". Mais ils en reconnaissent les incohérences physiques : "We have shown how inconsistencies arise concerning the nature of the source when we take into consideration all the consequences of Einstein's equations" Et ils ajoutent : "We have no solution to offer for this difficulty nor do we believe that one exists within the conventional classical framework". En résumé, J.V. Narlikar et T. Padmanabhan disent ceci : la solution (1.2) nous conduit dans une impasse à cause de la théorie elle-même. "The conventional framework" s'identifie, selon ces deux auteurs, à la structure mathématique de la relativité générale. En fait, le cadre classique évoqué contient des règles de calcul surajoutées à la théorie sans justification. La relativité générale s'est mêlée dès ses débuts à des points de vue dogmatiques qui ont entravé son développement et ses interprétations physiques. En particulier la solution (1.2) et la théorie des trous noirs découlent de transgressions de principes logiques et topologiques qui ont été mises en évidence [19], [21], bien avant la parution de l'article de J.V. Narlikar et T. Padmanabhan.

A l'opposé de tous les auteurs précités, qui prennent en considération la métrique de Droste (1.2), L. Abrams [1] propose le retour à

la solution de Schwarzschild (1.1.) qui présente des discontinuités uniquement pour $r = 0$, c'est-à-dire uniquement sur le bord $\mathbb{R} \times \{0\} \times S^2$ de la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, de sorte que "l'horizon $r = \alpha$ " n'y apparaît plus. De façon plus générale, L. Abrams associe à la forme statique

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)d\omega^2, r \geq 0,$$

la classe des solutions pour lesquelles $C(r)$ tend vers $\alpha^2 = \left(\frac{2km}{c^2}\right)^2$ lorsque $r \rightarrow 0$, la plus simple des métriques qui en résultent étant celle utilisée par M. Brillouin [4] :

$$ds^2 = \frac{r}{r + \alpha} dt^2 - \frac{r + \alpha}{r} dr^2 - (r + \alpha)^2 d\omega^2$$

Toutes ces métriques résultent l'une de l'autre par des difféomorphismes de la demi-droite $[0, +\infty[$ laissant son origine fixe. En ce qui concerne les fonctions $A(r)$ et $B(r)$, elles tendent respectivement vers 0 et $+\infty$ pour $r \rightarrow 0$ ce qui donne lieu à des singularités sur le bord $\mathbb{R} \times \{0\} \times S^2$. L. Abrams, en conformité avec les idées de Schwarzschild, pense que toutes les métriques ainsi introduites représentent le champ gravitationnel - sans trou noir, bien entendu - d'une source ponctuelle placée à "l'origine $r = 0$ ". Généralisant ses raisonnements, L. Abrams finit par exclure aussi la notion de trou noir lorsque la constante cosmologique est non nulle [2] et lorsque la source ponctuelle est chargée [3]. L'argumentation de L. Abrams est cohérente : dès que l'on admet l'existence d'une source ponctuelle, il est naturel de chercher à établir une solution présentant des singularités uniquement en un point isolé ou, plus précisément, sur la ligne d'univers d'un point isolé. Or nous avons affaire maintenant à une métrique spatio-temporelle sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ de sorte que la métrique spatiale associée est conçue sur la variété à bord $[0, +\infty[\times S^2$ dont le bord $\{0\} \times S^2$ comporte une infinité de points. Il y a là évidemment un problème conceptuel que l'on ne saurait surmonter en faisant appel à la théorie des singularités ponctuelles quasi-régulières (quasi-regular singularities) au sens de Ellis et Schmidt [8]. Il n'en reste pas moins que le travail de L. Abrams représente une contribution positive. En effet, L. Abrams a pu retourner contre les relativistes les armes qu'ils avaient eux-mêmes fabriquées (théorie des singularités, extensions maximales, rattachement de bords singuliers) pour défendre la théorie des trous noirs, en mettant en évidence le fait que celle-ci n'est pas une conséquence des équations de gravitation.

D'après les différents points de vue exposés précédemment, on constate que les solutions (1.1) et (1.2) continuent d'être l'objet de vives discussions. Leur simplicité contraste singulièrement avec l'étendue et les ambiguïtés du débat qu'elles ont alimenté. Mais en fait il s'agit d'un débat sans prémisses clairement formulées. La confusion qui y subsiste est liée à des raisons historiques que l'on peut classer comme suit.

a) A l'époque où Einstein établissait ses équations de gravitation, la notion de variété différentiable n'était pas encore clarifiée, et tout était conçu par rapport à des systèmes de coordonnées locales sans faire beaucoup d'attention à leurs domaines de validité. Cette pratique n'a pas été essentiellement modifiée dans la suite, comme en témoigne, en particulier, la monographie "Exact Solutions of Einstein's Field Equations" [9] où, après une introduction insistant sur le rôle de la notion de variété, sont exposées de nombreuses solutions exactes, toutes purement locales, sans aucune indication de variétés sous-jacentes. Selon un point de vue insolite, il ne faut même pas donner la variété dans la formulation d'un problème : "Having lived through the exciting period during which the Kruskal interpretation of the Schwarzschild solution was developed and black hole physics rose to prominence, I need hardly remind... that we do not start out with a fixed manifold topology, but solve the field equations on a generic patch. Once such a solution has been found, the problem of obtaining its maximal global extension is a major one" [18].

b) Puisque la variété n'est pas fixée d'avance, la présentation d'une solution dans divers systèmes de coordonnées locales dissimule souvent l'utilisation de variétés différentes. Mais alors il s'agit d'un problème sans objet, car l'introduction de variétés distinctes donne lieu nécessairement à des problèmes distincts. Ainsi, dans le passage précité, il est en fait question de deux variétés différentes, d'une part la variété qui intervient dans les solutions de Schwarzschild et Droste, d'autre part la variété de Kruskal.

c) Même si la variété est implicitement introduite, il s'agit souvent d'une variété à bord dont le bord n'a aucune signification physique. Les solutions de Schwarzschild et Droste, qui sont conçues sur la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ furent le point de départ de l'invasion des variétés à bord dans le formalisme de la relativité générale.

d) L'introduction des variétés à bord a entraîné l'idée bizarre d'extension maximale. Celle-ci est vide de sens par rapport à la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. En ce qui concerne l'extension de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ au sens

de Kruskal, elle nécessite des identifications au moyen d'applications discontinues qui ne sont pas mathématiquement autorisées.

e) Une autre pratique, inaugurée aussi par les solutions de Schwarzschild et Droste, est l'utilisation systématique de transformations implicites, c'est-à-dire de transformations définies par des équations contenant les composantes inconnues du tenseur métrique. Puisque les solutions de telles équations ne sont même pas envisageables, les transformations implicites sont complètement indéterminées et leur validité hypothétique conduit à des solutions avec singularités et aussi à des transgressions des conditions aux limites des problèmes.

Nous allons analyser en détail les abus d'utilisation des variétés à bord et des transformations implicites.

2. Sur les variétés à bord en relativité générale

Les relativistes utilisent couramment des variétés à bord dont les bords n'ont aucune signification physique. La variété étant toujours de dimension 4, son bord sera normalement de dimension 3, conformément à la définition donnée en topologie. Or, en relativité générale, il se peut que le bord soit de dimension inférieure à 3. Cependant nous n'entrerons pas dans l'examen de tous les cas qui se présentent dans les calculs. Nous nous bornerons à la prise en considération de la variété à bord la plus fréquemment utilisée, à savoir $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, ainsi que de son "extension maximale" au sens de Kruskal.

A) La variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ s'introduit à cause de l'utilisation des coordonnées polaires (ou sphériques) qui sont définies classiquement sur l'espace $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des x_3 :

$$\begin{aligned} r = \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x_3}{\|x\|} \\ (r > 0, \varphi &\text{ pris mod } 2\pi, 0 < \theta < \pi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

ce qui donne

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, x_3 = r \cos \theta \quad (2.2)$$

Puisque le système des coordonnées géographiques (φ, θ) ne couvre pas toute la sphère

$$S^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

il faut aussi introduire un deuxième système (r, φ', θ') défini sur l'espace $\mathbb{R}^3$ privé, par exemple, de l'axe des x_2 :

$$r = \|x\|, \cos \varphi' = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}, \sin \varphi' = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}}, \cos \theta' = \frac{x_2}{\|x\|} \quad (2.3)$$

$$(r > 0, \varphi' \text{ pris mod } 2\pi, 0 < \theta' < \pi),$$

ce qui donne

$$x_1 = r \sin \theta' \cos \varphi', x_2 = r \cos \theta', x_3 = r \sin \theta' \sin \varphi' \quad (2.4)$$

D'habitude on se sert uniquement des formules (2.2) en prenant aussi, abusivement, en considération la valeur $r = 0$. Normalement, on doit tenir compte des formules (2.2) et (2.4) à la fois avec $r > 0$, ce qui définit un difféomorphisme C^∞ de $]0, +\infty[\times S^2$ sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Si l'on tient compte de la valeur $r = 0$, la transformation définie par les formules (2.2) et (2.4) est une application surjective C^∞ de $[0, +\infty[\times S^2$ sur $\mathbb{R}^3$, mais sa réciproque n'est pas définissable à l'origine, comme il est visible sur les formules (2.1) et (2.3), conformément d'ailleurs au fait que les espaces $[0, +\infty[\times S^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes. Par conséquent, dès que l'on passe en coordonnées polaires, les voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^3$ sont supprimés. Or, à force d'utiliser les coordonnées polaires dans les calculs, on a fini par identifier $\mathbb{R}^3$ avec $[0, +\infty[\times S^2$, donc aussi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$. A cause de cette identification, on se sert souvent du terme "l'origine $r = 0$ ". Qu'est-ce que cela veut dire ? Bien entendu, si l'on reste dans $\mathbb{R}^3$, cela signifie que $\|x\| = 0$ entraîne $x = (0, 0, 0)$, ce qui est trivialement vrai. Or, si l'on substitue aux coordonnées x_1, x_2, x_3 les coordonnées polaires, le vocable "l'origine $r = 0$ " n'a absolument aucun sens. En effet, d'une part, le difféomorphisme considéré précédemment n'est pas défini à l'origine de $\mathbb{R}^3$, d'autre part, si l'on se rapporte à la variété à bord $[0, +\infty[\times S^2$, la valeur $r = 0$ définit le bord $\{0\} \times S^2$ qui n'est pas un point mais une sous-variété de dimension 2.

Conjointement avec l'idée que la valeur $r = 0$ représente l'origine en coordonnées polaires, les relativistes utilisent des transformations du type

$$r = h(\bar{r}) \quad , \quad \bar{r} \geq 0,$$

afin de "déplacer l'origine". Cette idée extravagante, contenue déjà implicitement dans la méthode de Schwarzschild, remonte à Droste, qui, en posant

$$r = \bar{r} + 2\mu \quad , \quad \mu = \frac{km}{c^2},$$

pense que l'on définit une nouvelle coordonnées radiale $\bar{r}$ telle que la sphère $r = 2\mu$ se réduise à "l'origine $\bar{r} = 0$ ". N. Rosen [14] pense aussi que la transformation $r = \bar{r} + 2\mu$ nous permet de concevoir un point matériel placé à l'origine $\bar{r} = 0$! On retrouve les mêmes idées dans l'introduction des soi-disant coordonnées harmoniques par K. Lanczos (1922) qui effectue d'abord la transformation

$$r = \bar{r} + \mu, \left(\bar{r} \geq 0, \mu = \frac{km}{c^2} \right),$$

afin de définir la "nouvelle coordonnée radiale $\bar{r}$ ", en pensant encore que la sphère $r = \mu$ se réduit ainsi à l'origine $\bar{r} = 0$. Ensuite il introduit les conditions d'harmonicité par rapport aux "coordonnées cartésiennes" associées aux coordonnées polaires $\bar{r}, \varphi, \theta$. Cependant on ne saurait parler de coordonnées cartésiennes dans ce contexte. En effet, si l'on applique formellement les relations (2.2) avec $\bar{r} = r - \mu \geq 0$ au lieu de r , on trouve

$$y_1 = (r - \mu) \sin \theta \cos \varphi, y_2 = (r - \mu) \sin \theta \sin \varphi, y_3 = (r - \mu) \cos \theta,$$

d'où la transformation

$$y_i = x_i \left(1 - \frac{\mu}{\|x\|} \right), (\|x\| \geq \mu; i = 1, 2, 3),$$

qui n'est pas bijective car elle applique toute la sphère $\|x\| = \mu$ au point $(0, 0, 0)$. D'ailleurs, comme on doit s'y attendre, la transformation réciproque

$$x_i = y_i \left(1 + \frac{\mu}{\|y\|} \right), (i = 1, 2, 3),$$

est discontinue pour $y = (0, 0, 0)$.

Cela dit, la confusion conceptuelle occasionnée par l'usage de la variété à bord $[0, +\infty[\times S^2$ se répercute naturellement dans l'introduction des coordonnées polaires dans les métriques. Classiquement, on transforme la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$:

$$dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

au moyen de (2.2), ce qui donne

$$ds^2 = dr^2 + r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

Normalement, il faut aussi tenir compte de (2.4) et écrire

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 \quad (2.5)$$

avec $d\omega^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$ ou $d\omega^2 = \sin^2 \theta' d\varphi'^2 + d\theta'^2$ suivant le système de coordonnées géographiques entrant en considération.

La forme (2.5), considérée sur $[0, +\infty[\times S^2$, s'appelle métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées polaires, mais en fait il s'agit d'une pseudo-métrique sur $[0, +\infty[\times S^2$. Certes, sa restriction à $]0, +\infty[\times S^2$ est définie positive, mais, par contre, sa restriction à $\{0\} \times S^2$ est nulle. *En d'autres termes, la forme (2.5), considérée sur $[0, +\infty[\times S^2$, dégénère sur le bord $\{0\} \times S^2$ en lui attribuant la mesure nulle. C'est à cause de cette dégénérescence que l'analyse classique utilise avec succès la forme (2.5) pour le calcul des longueurs, des aires et des volumes dans $\mathbb{R}^3$.* Cependant, malgré l'efficacité de (2.5) dans les calculs de mesures, on ne saurait l'identifier avec la métrique euclidienne, car le difféomorphisme qui fait passer de celle-ci à celle-là ne s'étend pas à l'origine de $\mathbb{R}^3$. C'est pourquoi d'ailleurs les coordonnées polaires introduisent, pour $r = 0$, des infinis dans divers calculs, qui ne sont pas, en conséquence, valables sur le bord $\{0\} \times S^2$. Par exemple, si l'on considère les composantes contravariantes non nulles du tenseur fondamental euclidien en coordonnées polaires :

$$1, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \frac{1}{r^2},$$

on voit que les deux dernières deviennent infinies pour $r = 0$. En conséquence, lorsqu'il s'agit de propriétés faisant intervenir les voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^3$, on doit se rapporter à la métrique de départ dx^2 .

La dégénérescence signalée sur le bord $\{0\} \times S^2$ ne concerne pas spécifiquement la pseudo-métrique (2.5). En fait, on a l'énoncé général ci-après :

PROPOSITION 2.1. *Etant donnée une métrique riemannienne (définie positive) C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, sa transformée en coordonnées polaires est une pseudo-métrique C^∞ sur $[0, +\infty[\times S^2$, définie positive sur $]0, +\infty[\times S^2$ et nulle sur $\{0\} \times S^2$.*

En effet, soit

$$ds^2 = \sum \alpha_{ij}(x_1, x_2, x_3) dx_i dx_j, (i, j = 1, 2, 3),$$

une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^3$. Les formules de transformation (2.2) et (2.4) sont de la forme

$$x_1 = rh_1, x_2 = rh_2, x_3 = rh_3,$$

en désignant par h_1, h_2, h_3 des fonction de (φ, θ) ou de (φ', θ') suivant le cas. Par conséquent, on trouve la métrique transformée

$$ds^2 = \sum \alpha_{ij}(rh_1, rh_2, rh_3)(h_i dr + r dh_i)(h_j dr + r dh_j)$$

dont la restriction à $\{0\} \times S^2$, obtenue en y mettant $r = 0$, est nulle.

La réciproque de la proposition 2.1 est inexacte. Une pseudo-métrique C^∞ sur $[0, +\infty[\times S^2$, définie positive sur $]0, +\infty[\times S^2$ et nulle sur $\{0\} \times S^2$, résulte d'une forme riemannienne sur $\mathbb{R}^3$ qui est, en général, discontinue pour $x = (0, 0, 0)$. Par exemple, à la pseudo-métrique

$$ds^2 = 2dr^2 + r^2 d\omega^2$$

considérée sur $[0, +\infty[\times S^2$, correspond la forme riemannienne

$$ds^2 = dx^2 + \frac{(xdx)^2}{\|x\|^2},$$

($\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, xdx = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$), qui est discontinue à l'origine.

Dans de telles situations la différentiabilité de la forme considérée sur $[0, +\infty[\times S^2$ est illusoire, car elle dissimule les singularités de la forme d'origine sur $\mathbb{R}^3$. La géométrie différentielle classique ne prend pas en considération les situations de ce genre qui nécessitent une étude à part afin d'élucider la nature des singularités. En ce qui concerne la relativité générale, on ne saurait introduire des métriques comportant des singularités génériques.

La continuité et, à plus forte raison, la différentiabilité à l'origine d'une forme riemannienne sur $\mathbb{R}^3$ associée à une pseudo-métrique donnée sur $[0, +\infty[\times S^2$ nécessite la validité de conditions spécifiques. Dans les problèmes de physique théorique, celles-ci doivent être toujours satisfaites pour pouvoir se rapporter à la métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^3$ lorsqu'il s'agit de propriétés se rattachant aux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^3$.

Voici un exemple où la continuité est satisfaite mais non pas la différentiabilité : la pseudo-métrique C^∞ :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r}{a}\right)(dr^2 + r^2 d\omega^2), (a = \text{Cte} > 0),$$

conçue sur $[0, +\infty[\times S^2$, provient de la forme riemannienne

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\|x\|}{a}\right) dx^2$$

qui est continue sur $\mathbb{R}^3$ et C^∞ sur $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, mais non différentiable à l'origine.

Les considérations précédentes s'étendent manifestement aux métriques spatio-temporelles. En particulier, le pendant de la proposition 2.1 est évident.

PROPOSITION 2.2. *Considérons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ une métrique spatio-temporelle C^∞*

$$ds^2 = g_{00}(x_0, x) dx_0^2 + 2 \sum_{i=1}^3 g_{0i}(x_0, x) dx_0 dx_i + \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(x_0, x) dx_i dx_j,$$

$$(x_0 \in \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

Alors en substituant aux coordonnées x_1, x_2, x_3 les coordonnées polaires au moyen de (2.2) et (2.4), on obtient, sur la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, une pseudo-métrique C^∞ dont la restriction à $\mathbb{R} \times]0, +\infty[\times S^2$ est une vraie métrique spatio-temporelle (c'est-à-dire une métrique avec la signature requise) et qui dégénère sur le bord $\mathbb{R} \times \{0\} \times S^2$ en se réduisant au terme $g_{00}(x_0, 0, 0, 0) dx_0^2$, de sorte que, pour toute valeur fixée x_0 , la forme induite sur $\{x_0\} \times \{0\} \times S^2$ est la forme nulle.

D'après ce qu'on a vu précédemment, la réciproque de la proposition 2.2 est manifestement inexacte : Une pseudo-métrique spatio-temporelle C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ satisfaisant aux conditions qui viennent d'être indiquées, provient d'une forme spatio-temporelle sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ qui est, en général, discontinue pour $x = (0, 0, 0)$. Par exemple, la métrique de Bondi (ou, mieux, la pseudo-métrique de Bondi)

$$ds^2 = e^{2A} dx_0^2 + 2e^{A+B} dx_0 dr - r^2 d\omega^2,$$

$$(A = A(t, r), B = B(t, r))$$

résulte de la forme spatio-temporelle

$$ds^2 = e^{2A} dx_0^2 + 2e^{A+B} dx_0 \frac{xdx}{\|x\|} - dx^2 + \frac{(xdx)^2}{\|x\|^2}$$

$$(A = A(t, \|x\|), B = B(t, \|x\|))$$

dont les composantes

$$e^{A+B} \frac{x_i}{\|x\|}, -1 + \frac{x_i^2}{\|x\|^2}, \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

sont discontinues à l'origine de $\mathbb{R}^3$.

En conclusion, on constate que la pratique, consacrée par la tradition, de concevoir les formes spatio-temporelles sur la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, donne lieu à des erreurs logiques et à des singularités imprévisibles. Par conséquent, toutes les fois où l'on se donne une pseudo-métrique C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, il faut être sûr que la forme spatio-temporelle qui lui correspond sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est partout C^∞ pour avoir la possibilité d'aborder correctement les problèmes relatifs aux voisinages de $\mathbb{R} \times \{(0, 0, 0)\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

B) Le remplacement abusif de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ a occasionné aussi l'idée "d'extension maximale de variété". Pourquoi faut-il chercher à définir une extension maximale? Tant que l'on reste sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, la question n'a évidemment pas de sens. Mais le remplacement de $\mathbb{R}^3$ par $[0, +\infty[\times S^2$ a conduit Kruskal à isoler la sphère dans le produit $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ et à considérer ainsi séparément le demi-plan fermé $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Cela l'a fait penser que, par une extension convenable de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, il serait possible d'étendre la solution de Schwarzschild (en fait de Droste) en une solution sans singularités. Nous savons maintenant que ce problème n'a pas de sens. D'ailleurs l'extension proposée par Kruskal conduit à des conclusions déraisonnables qui ont été déjà signalées [21]. La méthode de Kruskal elle-même comporte des incohérences qui transgressent les principes élémentaires des raisonnements mathématiques. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

Considérons la partition de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ constituée par les deux ouverts :

$$Y_1 = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\mid r > 2\mu\} \quad , \quad (\mu = \frac{km}{c^2}) \quad ,$$

$$Y_2 = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\mid 0 < r < 2\mu\}$$

et les deux droites :

$$D_1 = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\mid r = 2\mu\}$$

$$D_2 = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\mid r = 0\}$$

Alors la démarche de Kruskal est basée sur l'introduction de deux transformations. En premier lieu d'une transformation

$$T_1 : u = e^{\frac{r}{4\mu}} \left(\frac{r}{2\mu} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cosh \frac{t}{4\mu}, v = e^{\frac{r}{4\mu}} \left(\frac{r}{2\mu} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \sinh \frac{t}{4\mu}$$

appliquant Y_1 sur l'ouvert

$$U_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > |v|\}$$

et D_1 à l'origine $(0, 0)$.

En deuxième lieu d'une transformation

$$T_2 : u = e^{\frac{r}{4\mu}} \left(1 - \frac{r}{2\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \sinh \frac{t}{4\mu}, v = e^{\frac{r}{4\mu}} \left(1 - \frac{r}{2\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \cosh \frac{t}{4\mu}$$

appliquant Y_2 sur l'ouvert

$$U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > |u|, v^2 < 1 + u^2\}$$

ainsi que D_1 et D_2 respectivement à l'origine $(0, 0)$ et sur la branche d'hyperbole :

$$H_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v^2 - u^2 = 1, v > 0\}.$$

Puisque les restrictions

$$T_1|_{Y_1}, T_2|_{Y_2 \cup D_2}$$

sont des difféomorphismes, on obtient $U_1 \cup U_2 \cup H_2$ comme image difféomorphe de

$$Y_1 \cup Y_2 \cup D_2 = (\mathbb{R} \times [0, +\infty[) - D_1$$

Mais comme $T_1(D_1) = T_2(D_1) = (0, 0)$, le difféomorphisme ainsi défini ne s'étend pas à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Par conséquent les "coordonnées de Kruskal" sont d'abord définies sur l'ensemble

$$A = U_1 \cup U_2 \cup H_2 \cup \{(0, 0)\}$$

qui n'est pas une variété. Pour avoir la "variété de Kruskal", on introduit d'abord l'adhérence de A :

$$\bar{A} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \in \mathbb{R}, -u \leq v \leq \sqrt{u^2 + 1}\}$$

qui est une variété à bord dont le bord comporte deux composantes connexes, à savoir d'une part la deuxième bissectrice

$$B_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u + v = 0\}$$

d'autre part la branche d'hyperbole H_2 . Or le passage de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ à $\bar{A}$ s'obtient par une extension du difféomorphisme déjà défini sur $Y_1 \cup Y_2 \cup D_2$ en une surjection de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ sur $\bar{A}$ discontinue sur D_1 , les discontinuités étant telles que D_1 ne s'applique plus à l'origine mais sur la réunion de B_2 avec la demi-droite

$$B'_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \geq 0, u - v = 0\}.$$

De telles identifications au moyen d'applications discontinues sont inconcevables mathématiquement, de sorte que $\bar{A}$ ne représente plus le demi-plan $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. En aucun cas on ne peut représenter $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par $\bar{A}$: la frontière de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ est connexe, tandis que la frontière de $\bar{A}$ ne l'est pas.

La métrique de Kruskal

$$ds^2 = \frac{32\mu^3}{r} e^{-\frac{r}{2\mu}} (dv^2 - du^2) - r^2 d\omega^2, (r = h(u^2 - v^2)) \quad ,$$

conçue d'abord sur $\bar{A} \times S^2$, n'a, à proprement parler, aucun rapport avec le problème qu'elle prétend résoudre. En ce qui concerne la fonction $r = h(u^2 - v^2)$, elle s'obtient par la seule équation

$$\left(\frac{r}{2\mu} - 1 \right) e^{\frac{r}{2\mu}} = u^2 - v^2, r \geq 0,$$

qui dissimule les discontinuités introduites. Nous disons bien : dissimule, car les relativistes ont besoin de la transformation réciproque qui fait passer de $\bar{A}$ à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et alors, d'après l'équation ci-dessus, on a $r = 2\mu$ pour tout $(u, v) \in B_2$ et pour tout $(u, v) \in B'_1$, ce qui fait apparaître de nouveau les discontinuités.

Mais les transgressions de principes ne s'arrêtent pas là. Soit $\bar{A}'$ le symétrique de $\bar{A}$ par la symétrie

$$(u, v) \rightarrow (-u, -v).$$

Alors Kruskal considère comme extension maximale la réunion

$$(\bar{A} \times S^2) \cup (\bar{A}' \cup S^2) = (\bar{A} \cup \bar{A}') \cup S^2$$

qui est aussi une variété à bord dont le bord comporte encore deux composantes connexes.

Soit B_1 la première bissectrice :

$$B_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u = v\}.$$

Alors le passage de $\bar{A} \cup \bar{A}'$ à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ se réalise au moyen d'une surjection

$$\bar{A} \cup \bar{A}' \longrightarrow \mathbb{R} \times [0, +\infty[$$

dont l'image recouvre $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ deux fois avec des discontinuités sur $B_1 \cup B_2$. On ne saurait accepter une telle application. D'ailleurs la raison d'introduction de $\bar{A}'$ n'est pas claire. D'après N. Rosen [16], les transformations T_1 et T_2 permettent de couvrir "only part of the (u, v) plane. To cover the whole plane one adds the transformations obtained from these by replacing u and v by $-u$ and $-v$ ". Cet argument est tout à fait superficiel car $\bar{A} \cup \bar{A}'$ est aussi une partie de plan des (u, v) .

En définitive, l'introduction de la "variété maximale de Kruskal" donne lieu à une situation beaucoup plus confuse que celle relative à la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$.

3. Transformations explicites et transformations implicites

Chaque problème en relativité générale est formulé (ou doit être formulé) sur la base d'une variété différentiable dont le choix est suggéré par les conditions spécifiques envisagées et par notre intuition. On a

évidemment intérêt à définir la variété par le plus petit nombre possible de cartes. En particulier, lorsque la variété est l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, comme c'est souvent le cas, on utilisera évidemment une seule carte.

Chacune des cartes introduites nous place sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sur lequel nous avons à définir la métrique spatio-temporelle

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3) dx_\alpha dx_\beta \quad (3.1)$$

en se servant des équations de gravitation :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \frac{8\pi k}{c^4} T_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.2.)$$

et en tenant compte des conditions spécifiques du problème parmi lesquelles les conditions aux limites jouent un rôle prépondérant. La formulation du problème est donc inséparable des coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 définies sur U . Or, la présumée équivalence de tous les systèmes de coordonnées a conduit à une pratique sans principes qui consiste à effectuer des changements introduisant de nouvelles coordonnées sans se soucier des conditions aux limites et des autres conditions géométriques et physiques. En fait, ce qui est vrai c'est que les équations (3.2), en vertu de leur caractère tensoriel, gardent leur forme quand on passe d'un système de coordonnées à l'autre. Alors les relativistes pensent que cette propriété formelle de nature algébrique entraîne l'équivalence des solutions des équations (3.2) dans les différents systèmes, sans se préoccuper de la signification du terme "équivalence", qui est ainsi introduit à titre gratuit. Ils disent même que les diverses solutions ainsi conçues sont identiques. Afin de bien situer les conséquences de ce point de vue, il convient de classer les transformations de coordonnées en deux catégories, d'une part les transformations explicites, d'autre part les transformations implicites, et d'examiner séparément chacune d'elles.

3 A. Sur les transformations explicites

Les transformations explicites sont définies sur des ouverts donnés par des fonctions connues suffisamment différentiables. Une telle transformation est donc un difféomorphisme bien défini entre deux ouverts donnés. Par exemple, les coordonnées polaires donnent lieu à une transformation explicite, pourvu qu'elles soient conçues sur leur domaine de validité.

Se rapportant à la métrique (3.1) et au système (3.2), considérons une transformation explicite ψ définie sur l'ouvert U ou éventuellement sur un ouvert précis strictement contenu dans U . Alors chaque solution du système (3.2) se transforme par ψ en une solution du système transformé qui comporte les transformées des fonctions inconnues figurant dans (3.2). Réciproquement chaque solution du système transformé se transforme par ψ^{-1} en une solution de (3.2). Par conséquent, il est en principe légitime de rechercher d'abord la détermination des fonctions inconnues dans le nouveau système de coordonnées. Cependant dès que nos calculs dans ce système sont achevés, nous devons revenir aux coordonnées de départ, c'est-à-dire à l'ouvert U , car il se peut bien que les conditions du problème, en particulier les conditions aux limites, conçues par rapport à U , ne soient pas définissables par rapport aux nouvelles coordonnées, qui ont été utilisées à titre auxiliaire.

Pour bien illustrer cette situation, considérons la métrique spatio-temporelle statique $S\Theta(4)$ - invariante [19], [20]

$$ds^2 = \left(f(\rho)\right)^2 dt^2 - \left[\left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 dx^2 + \left(1 - \left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2\right) \frac{(x dx)^2}{\rho^2}\right] \quad (3.3)$$

qui assure le rapprochement entre le potentiel de Newton et la théorie d'Einstein. Pour être conforme aux notations de [19] et [20], on désigne par ρ la norme $\|x\|$ qui représente maintenant la distance riemannienne de x à l'origine.

La métrique (3.3) est conçue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, mais, comme il s'agit ici du champ extérieur d'une boule statique, elle est utilisée uniquement pour $\rho \geq \rho_1$, ρ_1 étant le rayon de la sphère limitant la source. La condition aux limites à l'infini s'exprime en disant que (3.3) doit tendre vers la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

lorsque $\rho \rightarrow +\infty$ ou, de façon plus précise, que les composantes du tenseur métrique (3.3) doivent tendre vers les composantes correspondantes du tenseur métrique de Minkowski lorsque $\rho \rightarrow +\infty$. Or, on sait que la solution obtenue entraîne

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(\rho) = c, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{g(\rho)}{\rho} = 1$$

de sorte que (3.3) satisfait effectivement à la condition en question.

Considérant maintenant la transformée de (3.3) en coordonnées polaires :

$$ds^2 = (f(\rho))^2 dt^2 - (d\rho^2 + (g(\rho))^2 d\omega^2) \quad (3.4)$$

il semble naturel de la comparer avec la soi-disant métrique de Minkowski en coordonnées polaires

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2) \quad (3.5)$$

Or les composantes du tenseur métrique (3.4) ne tendent pas vers les composantes correspondantes de (3.5). En effet, compte tenu de

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(\rho) = c$$

la condition aux limites à l'infini, par rapport à (3.4), équivaut à l'affirmation que $g(\rho) - \rho$ tend vers zéro lorsque $\rho \rightarrow +\infty$. Mais cela est faux, car la fonction $g(\rho)$ se comporte comme $\rho - \ln \rho$ pour les grandes valeurs de ρ , de sorte que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} (g(\rho) - \rho) = -\infty$$

Il est vrai que le tenseur de courbure relative à (3.4) tend vers zéro pour $\rho \rightarrow +\infty$, mais la métrique elle-même n'admet pas de forme limite lorsque $\rho \rightarrow +\infty$. On constate donc que déjà une transformation explicite très simple ne respecte pas les conditions aux limites du problème. Par conséquent quand on effectue une transformation explicite, il ne faut pas s'arrêter à la solution du système transformé. On doit toujours revenir à l'ouvert de départ par rapport auquel sont formulées les conditions du problème. Les transformations explicites ne peuvent jouer qu'un rôle auxiliaire.

3.B Sur les transformations implicites

Une transformation implicite est censée être définie par un système d'équations (équations ordinaires pour la définition de fonction implicites, équations différentielles, équations aux dérivées partielles) contenant les composantes inconnues du tenseur métrique (3.1). Or la solution effective d'un tel système ne pourrait être envisagée que si les composantes en question étaient connues. Par conséquent les transformations

implicites sont des transformations hypothétiques dont l'existence même sur U (ou éventuellement sur un ouvert contenu dans U) n'est pas assurée.

Une transformation implicite est autorisée uniquement lorsque sa validité est exigée par la formulation même du problème envisagé. Alors on retiendra exclusivement les solutions de (3.2), s'il en existe, qui sont compatibles avec le système d'équations en question. A part ce cas exceptionnel, les transformations implicites n'ont pas droit de cité dans les problèmes de relativité générale. Elles transgressent les données des problèmes et spécifiquement les conditions aux limites qui sont sensibles, comme on l'a vu tout à l'heure, même aux transformations explicites. En outre elles conduisent à des solutions singulières de (3.2) qui sont imputées à tort soit à une présumée "pathologie des coordonnées" dont la conception est vide de sens mathématique, soit aux équations de gravitation elles-mêmes.

Les relativistes utilisent très largement les transformations implicites en se fondant sur deux idées illusoire que nous allons analyser.

a) *On admet que chacune des fonctions inconnues intervenant dans le problème peut être choisie comme coordonnée.* Or les fonctions inconnues satisfont à certaines conditions géométriques et physiques et, en particulier, aux conditions aux limites, qui disparaissent lorsque ces fonctions sont prises pour coordonnées. En outre une telle opération est en général interdite pour des raisons purement mathématiques. Supposons, pour fixer les idées, qu'une certaine composante inconnue $g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ du tenseur métrique soit prise comme nouvelle coordonnée y_1 remplaçant x_1 , ce qui conduit à considérer d'abord la solution de l'équation

$$y_1 = g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

par rapport à x_1 . L'existence de cette solution présuppose que la dérivée

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \quad (3.6)$$

garde un signe constant sans s'annuler sur l'intervalle de variation considéré de x_1 . Mais la fonction $g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ étant inconnue, on ne peut pas savoir d'avance si la condition envisagée est satisfaite par la solution de (3.2). Il se peut d'ailleurs que la fonction $g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)$, obtenue en résolvant (3.2), soit monotone mais non pas strictement monotone, ce qui entraîne l'annulation de la dérivée partielle (3.6) pour

certaines valeurs de x_1 . Alors la dérivée partielle par rapport y_1 de la fonction réciproque

$$x_1 = h_{\alpha\beta}(x_0, y_1, x_2, x_3)$$

sera $\pm\infty$ pour les valeurs correspondantes de y_1 , ce qui fera apparaître des discontinuités dans la solution transformée. Les singularités ainsi introduites résultent donc exclusivement de la transformation implicite utilisée, qui est en fait une transformation inadmissible. C'est à cause de telles transformations que les "horizons" apparaissent dans les solutions classiques des équations de gravitation. Nous savons, en particulier, que "l'horizon" et le "trou noir" de la solution de Droste proviennent de l'introduction du paramètre de Levi-Civita par une transformation implicite inadmissible. De telles altérations de la signification des problèmes montrent de façon claire que la notion d'équivalence des solutions des équations d'Einstein relativement aux transformations implicites est dénuée de sens. Cependant cette notion d'équivalence domine toute la recherche sur la relativité générale depuis la publication des premiers mémoires d'Einstein.

b) *L'argument principal des relativistes pour l'utilisation des transformations implicites est basé sur la prétendue dépendance des équations de gravitation.*

Ainsi, d'après S. Weinberg [28] : "The symmetric tensor $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ has 10 independent components, so Einstein's field equations comprise 10 algebraically independent components, and at first sight one would think that the Einstein equations (with appropriate boundary conditions) would suffice to determine the $g_{\mu\nu}$ uniquely. However, this is not so. Although algebraically independent, the 10 $S_{\mu\nu}$ are related by four differential identities, the Bianchi identities

$$S^\mu_{\nu;\mu} = 0$$

Thus there are not 10 functionally independent equations, but only $10-4=6$, leaving us with four degrees of freedom in the 10 unknown $g_{\mu\nu}$. These degrees of freedom correspond to the fact that if $g_{\mu\nu}$ is a solution of Einstein's equation, then so is $g'_{\mu\nu}$, where $g'_{\mu\nu}$ is determined from $g_{\mu\nu}$ by a general coordinate transformation $x \rightarrow x'$. Such a coordinate transformation involves four arbitrary functions $x'^\mu(x)$, giving to the solution... just four degrees of freedom".

Les mêmes idées sont exprimées dans un ouvrage récent relativement aux équations d'Einstein dans le vide : "In view of the contracted Bianchi

identities... the Einstein-Vacuum equations... can be viewed as a system of $10-4=6$ equations for the 10 components of the metric tensor g . The remaining 4 degrees of freedom correspond to the general covariance of the equations : Indeed, if $\Phi : M \rightarrow M$ is a diffeomorphism, then the pairs (M, g) and (M, Φ^*g) represent the same solution of the field equations" [6].

Regardons de plus près ces assertions. Elles présupposent manifestement que les 10 composantes du tenseur métrique sont les inconnues du problème, ce qui n'est pas toujours le cas. Mais nous nous plaçons d'abord dans ce cas général.

Cela dit, les identités de Bianchi sont des identités véritables, c'est-à-dire satisfaites quelles que soient les composantes du tenseur métrique. Par conséquent elles n'imposent à celles-ci aucune condition, comme *T. Levi-Civita* l'avait bien signalé : "Der Tensor $T_{\alpha\beta}$ zufolge seiner physikalischen Definition... den vier Bedingungsgleichungen genügt, die das Verschwinden der Divergenz ausdrücken ; es müssten also auch die $R_{\alpha\beta}$ an entsprechende Gleichungen gebunden sein. Wir können jedoch die Annahme einer linearen Relation zwischen den beiden Tensoren beibehalten, *ohne dass dabei eine Beziehung zwischen den $g_{\alpha\beta}$ besteht* ; wir brauchen uns bloss daran zu erinnern, dass die Divergenz des Tensors

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$$

identisch Null ist ... Setzen wir also

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -KT_{\alpha\beta}$$

wo K une Konstante bedeutet..., *so folgt daraus keinerlei Bindung für die $g_{\alpha\beta}$* " [10].

Nous voyons donc que les identités de Bianchi n'ont absolument rien à voir avec les soi-disant degrés de liberté des équations d'Einstein. Par conséquent, celles-ci étant conçues sur un certain ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on ne peut rien dire d'avance sur leur dépendance ou sur leur indépendance. On ne sait même pas d'avance si elles sont compatibles, c'est-à-dire si elles possèdent des solutions.

En ce qui concerne l'assertion : "The 4 degrees of freedom correspond to the general covariance of the equations", on peut bien se demander quelle est sa signification. En fait, l'explication donnée : "If

$\Phi : M \rightarrow M$ is a diffeomorphism, then the pairs (M, g) and (M, Φ^*g) represent the same solution” n’établit aucun rapport avec les prétendus degrés de liberté. Le difféomorphisme $x \rightarrow x'$ permet d’exprimer la solution de départ dans le nouveau système de coordonnées, mais aucune conclusion n’en résulte concernant les degrés de liberté. Il y a une confusion manifeste entre ceux-ci et le nombre des fonctions définissant le difféomorphisme.

Le problème relatif aux degrés de liberté ne peut être élucidé que par l’étude du systèmes de départ lui-même. Alors ou bien on doit établir la compatibilité du système lorsque parmi les composantes $g_{\alpha\beta}$ il y en a quatre données arbitrairement, ou bien on doit indiquer une méthode réduisant le système, au moyen de transformations admissibles, à un système de 6 équations. Or, on ne connaît pas de telles méthodes.

Cependant l’idée que la covariance entraîne l’existence de quatre degrés de liberté est profondément enracinée. Considérons, par exemple, sa présentation d’après A. Lichnerowicz : “On comprend facilement pourquoi il est nécessaire qu’il existe entre les $S_{\alpha\beta}$ un système de quatre conditions identiques. Par un choix convenable d’un système de coordonnées locales on peut astreindre quatre des potentiels à prendre localement des valeurs données... S’il n’existait pas entre les $S_{\alpha\beta}$ un système de 4 relations, les 6 potentiels restants devraient vérifier dans le cas extérieur par exemple, 10 conditions indépendantes” [11].

Ce passage affirme d’abord que si $\{g_{\alpha\beta}(x_0, x_1, x_2, x_3)\}$ est la solution des équations de gravitation sur un ouvert U_1 , alors on peut trouver un ouvert $U \subset U_1$ et un difféomorphisme

$$\Phi : U \rightarrow W$$

tel que, dans la métrique transformée de (3.1), quatre composantes du tenseur métrique soient identiques à des fonctions données d’avance. Le difféomorphisme réciproque

$$\Psi = \Phi^{-1} : W \rightarrow U$$

sera explicité par quatre fonctions différentiables

$$x_\alpha = \Psi_\alpha(y_0, y_1, y_2, y_3) \quad , \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

de sorte que la transformée de (3.1) s’écrit :

$$ds^2 = \sum G_{\alpha\beta}(y_0, y_1, y_2, y_3) dy_\alpha dy_\beta$$

avec

$$G_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=0}^3 g_{ij}(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y^\beta}$$

où

$$\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(y_0, y_1, y_2, y_3), (\alpha = 0, 1, 2, 3) .$$

Supposons, pour fixer les idées, que les quatres composantes

$$G_{\alpha\alpha}(y_0, y_1, y_2, y_3), (\alpha = 0, 1, 2, 3) ,$$

soient données d'avance. Alors le difféomorphisme

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$$

sera défini par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\sum_{i,j=0}^3 g_{ij}(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y^\alpha} = G_{\alpha\alpha}(y_0, y_1, y_2, y_3), (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (3.7)$$

Les fonctions $G_{\alpha\alpha}(y_0, y_1, y_2, y_3)$ sont supposées données sur l'ouvert W , mais celui-ci n'est pas donné d'avance. Pour surmonter cette difficulté, on les supposera données sur l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ tout entier. Or, la solution effective du système de départ n'étant pas connue, on ne peut pas avancer dans la discussion du système (3.7). Nous nous contentons donc de l'affirmation générale suivante : Si le système (3.7) possède une solution différentiable $(\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ sur un certain ouvert $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et si cette solution définit un difféomorphisme $\Psi : W \rightarrow U$, alors le système transformé par Ψ^{-1} des équations de gravitation sera vérifié par le tenseur $\{G_{\alpha\beta}(y_0, y_1, y_2, y_3)\}$ dont les quatre composantes $G_{\alpha\alpha}(y_0, y_1, y_2, y_3), (\alpha = 0, 1, 2, 3)$, sont données d'avance.

Cet énoncé confirme-t-il l'assertion suivant laquelle le système d'équations d'Einstein (pourvu qu'il soit compatible) comporte quatre degrés de liberté ?

Certainement pas.

Tout d'abord il ne tient pas compte du comportement du système de départ. Même si les équations de celui-ci ne sont pas dépendantes, il semble prouver que les équations transformées le seront. Or, le difféomorphisme ne peut pas modifier les degrés de liberté du système. En

fait, la dépendance en question serait prouvée si, le difféomorphisme Ψ étant *fixé*, le système correspondant des équations de gravitation transformées était compatible avec des choix arbitraires des fonctions $G_{\alpha\alpha}(y_0, y_1, y_2, y_3)$. Mais si l'on modifie les fonctions initialement choisies $G_{\alpha\alpha}(y_0, y_1, y_2, y_3)$, ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), les équations (3.7) définissent un *autre* difféomorphisme Ψ , ce qui donne lieu à un *autre* système d'équations de gravitation transformées.¹

Le raisonnement des relativistes est non seulement illusoire dans son principe, mais il est aussi basé sur l'usage de transformations implicites. Rien ne prouve que le difféomorphisme Ψ est définissable sur un certain ouvert ni d'ailleurs qu'il est susceptible d'une certaine interprétation physique. Or, l'idée que les changements de coordonnées introduisent quatre degrés de liberté domine toute la pensée relativiste. Elle donne lieu, en particulier, au soi-disant problème des coordonnées :

"It must be possible to choose coordinates relative to which the Einstein-Vacuum equations can be written as a system of nonlinear wave equations. One well-known such choice is that of "wave coordinates"

¹ Un exemple simple illustre bien cette situation. Considérons le système d'équations indépendantes

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

qui possède la solution $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3$. Alors l'isomorphisme

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3 + 3 - \alpha$$

conduit au nouveau système

$$-y_1 + y_2 + y_3 = \alpha - 1$$

$$y_1 - y_2 + y_3 = \alpha + 1$$

$$y_1 + y_2 - y_3 = -\alpha + 9$$

qui possède la solution

$$y_1 = 5, y_2 = 4, y_3 = \alpha$$

La valeur α de y_3 peut être arbitrairement choisie d'avance, mais l'isomorphisme utilisé et le nouveau système dépendent aussi de α .

(inappropriately called harmonic coordinates in the literature), namely coordinates x^μ which satisfy the wave equation

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta x^\mu = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

... The well-posedness of the local Cauchy problem was proved by Y. Choquet-Bruhat... in wave coordinates, yet as she pointed out later, these coordinates are unstable... in the large. The problem of finding globally stable, well-posed coordinate conditions is the first major difficulty one has to overcome in the construction of global solutions of the Einstein equations" [6].

D'après ces idées, on a besoin de quatre conditions complémentaires afin de bien définir les coordonnées. En fait le terme *coordinate conditions* est trompeur. Il ne s'agit pas de la définition d'un système de coordonnées, mais de quatre équations, plus ou moins arbitrairement choisies, surajoutées au système des équations d'Einstein. Alors le problème qui se pose d'abord est de savoir si les 10+4=14 équations qui s'introduisent ainsi sont compatibles.

En ce qui concerne, en particulier, les soi-disant coordonnées harmoniques, elles ont été largement utilisées avant la preuve de leur "instabilité globale". Nous avons déjà vu que leur utilisation dans le cas du champ gravitationnel d'une boule est liée à la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ et à l'idée extravagante de changement d'origine par la transformation $r = \bar{r} + \mu$.

Nous avons supposé, dans la discussion précédente, que les 10 composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique soient les inconnues du problème. Or, dans diverses situations et surtout lorsque le tenseur métrique présente des symétries, le nombre des fonctions inconnues, qui figurent dans les composantes du tenseur métrique et du tenseur d'impulsion-énergie, est inférieur à 10, de sorte que, si le système des équations d'Einstein est compatible, il se peut bien que l'on ait affaire à certains degrés de liberté. Cela est confirmé par les solutions classiques, bien que celles-ci ne soient pas aptes à clarifier tout à fait le problème à cause de l'usage systématique de transformations implicites qui réduisent au rôle des coordonnées ou éliminent complètement des fonctions mathématiquement et physiquement significatives. Bien entendu, le nombre des degrés de liberté dépend du problème envisagé. Nous savons, par exemple, que la métrique générale $S\Theta(4)$ -invariante, qui représente le champ gravitationnel d'une boule de matière en mouvement radial, comporte 4 fonctions inconnues et puisque le système des 10 équations de gravitation se réduit

alors à un système de 2 équations, nous avons $4-2=2$ degrés de liberté. Pour une métrique statique $S\Theta(4)$ -invariante, qui comporte 3 fonctions inconnues, nous avons $3-2=1$ degré de liberté. Ces exemples simples infirment encore une fois l'assertion des relativistes suivant laquelle le nombre des degrés de liberté est toujours égal à 4, c'est-à-dire égal au nombre des fonctions définissant les difféomorphismes locaux. Nous répétons que ceux-ci n'ont aucun rapport avec les questions concernant les degrés de liberté.

3C. Sur la notion d'unicité de solution

Cette notion n'est pas claire en relativité générale et donne lieu à des difficultés conceptuelles à cause de l'usage abusif des changements de coordonnées locales, et c'est pourquoi nous en parlerons brièvement en terminant l'examen critique des transformations explicites et implicites.

La notion d'unicité de solution concerne en principe aussi bien les solutions exactes des équations de gravitation que les problèmes formulés en termes de conditions initiales (ou problèmes de Cauchy).

Considérons d'abord la situation relative aux solutions exactes. Alors la notion même de solution est vague pour diverses raisons :

Premièrement les relativistes ne cherchent pas à résoudre des problèmes bien posés sur la base de variétés différentiables précises et de conditions données, mais ils se contentent de l'obtention de solutions locales sans liaison avec des situations physiques. Il s'agit là d'une pratique bien signalée par les spécialistes eux-mêmes :

"Unfortunately, one cannot say that the study of exact solutions has always maintained good contact with work on more directly physical problems. Kinnersley (1975) wrote : Most of the known exact solutions describe situations which are frankly unphysical...We toss in null currents, macroscopic neutrino fields and tachyons for the sake of greater 'generality' ; we seem to take delight at the invention of confusing anti-intuitive notation ; and when all is done we leave our newborn metric wobbling on its vierbein without any visible means of interpretations" [9].

Deuxièmement une solution est présentée dans plusieurs systèmes de coordonnées locales moyennant des transformations, aussi bien explicites qu'implicites, plus ou moins arbitraires, ne respectant pas les conditions des problèmes envisagés et comportant souvent des discontinuités. En

fait, le terme “variété” n’apparaît pas dans la recherche de solutions exactes. On n’y voit qu’une multitude de coordonnées :

Coordonnées harmoniques, coordonnées isotropes, coordonnées de Schwarzschild, coordonnées d’Eddington-Finkelstein, coordonnées de Kruskal-Szekeres, coordonnées canoniques de Weyl, coordonnées sphéroïdes prolates, coordonnées de Boyer-Lindquist, etc.

qui obscurcissent la conception des problèmes.

Troisièmement, le vocable “coordonnées locales” n’est pas accompagné d’explications sur la signification des coordonnées, de sorte qu’une solution, présentée dans divers systèmes, est rapportée souvent à des variétés distinctes. Il ne s’agit donc pas d’une solution, mais d’un ensemble de solutions distinctes.

Dans ces conditions on ne saurait définir la notion d’unicité de solution dans le cadre du formalisme actuel de la relativité générale. Ce n’est donc pas par hasard que les relativistes n’utilisent pas ce terme relativement aux solutions exactes des équations de gravitation. Si l’on regarde, par exemple, la monographie [9] qui comporte de nombreuses solutions locales, on constate que la notion d’unicité de solution n’y figure qu’une seule fois à propos de la solution de Schwarzschild (c’est-à-dire de Droste) et le théorème de Birkhoff :

“Birkhoff’s theorem (Birkhoff, 1923) : The only vacuum solution with spherical symmetry is the Schwarzschild solution... The original formulation of Birkhoff’s theorem (the only vacuum solution with spherical symmetry is static) was criticized by Petrov”.

Curieusement quelques lignes après ce passage, l’“unicité” de la solution est démentie :

“We give the Schwarzschild solution in various other coordinate systems which are frequently used”.

En fait, il ne s’agit pas de la même solution à des changements de coordonnées près. Il s’agit de solutions différentes résultant de transformations comportant des discontinuités et donnant lieu à de nouvelles variétés. En particulier la forme de Kruskal-Szekeres est non stationnaire et est conçue sur une variété à bord qui n’a rien à voir avec la variété de départ. Cependant “l’unicité” ne devrait pas donner droit d’existence à ces autres formes.

D’après une analyse déjà faite [22] et qui sera approfondie plus loin, le théorème de Birkhoff est un pseudo-théorème, de sorte que le champ extérieur d’une masse sphérique en déformation radiale est

nécessairement non stationnaire. Or, ce que nous voulons souligner ici c'est que la notion d'unicité de solution dans la conception de Birkhoff est indéfinissable et illusoire. Dans le problème concerné, nous avons à établir, sur la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, la solution générale $S\Theta(4)$ -invariante avec toutes les fonctions qui y interviennent en tenant compte des conditions générales caractérisant la situation mathématique et physique envisagée. C'est cette solution générale qui est en fait la solution unique. A partir de celle-ci on est alors en mesure d'obtenir toute autre solution spécifique moyennant des conditions particulières. Le théorème de Birkhoff affirme à tort que la plus pauvre de toutes les solutions possibles, à savoir la solution de Droste, est la solution unique.

Cela dit, contrairement au cas des solutions exactes, la notion d'unicité de solution semble en principe plus claire quand il s'agit de problèmes de Cauchy en relativité générale. Considérons de plus près la situation. S'inspirant des problèmes classiques de la physique mathématique, on suppose données, sur un morceau d'hypersurface S , défini dans un système de coordonnées locales, des conditions initiales (ou données de Cauchy) convenablement choisies, et l'on démontre ensuite l'existence d'une solution locale unique au voisinage de S satisfaisante à ces conditions. Mais il y a des cas exceptionnels où la solution n'est pas définissable et alors l'investigation du problème présente des complications considérables [11]. Si l'on laisse de côté les cas exceptionnels, on démontre l'unicité de la solution à un difféomorphisme près laissant fixes les points de S et conservant les conditions initiales. Mais le résultat est foncièrement local, de sorte que son utilité à l'étude de phénomènes physiques est discutable. En ce qui concerne la méthode de démonstration, elle présente des points faibles à cause de l'utilisation des identités de Bianchi et nécessite en conséquence un examen critique qui sort du cadre du présent article. D'autre part, on peut se demander si la méthode de Cauchy convient à l'étude des phénomènes gravitationnels. Du moins en ce qui concerne le champ gravitationnel à l'extérieur des sources, il ne semble pas que l'on puisse le concevoir en termes de données de Cauchy. En effet, le champ gravitationnel extérieur résulte de la propagation des ébranlements gravitationnels engendrés par les déformations des sources, de sorte que ceux-ci, conçus en tant que conditions aux limites à distance finie, constituent l'élément de base pour la conception et la détermination du champ.

Un autre problème où les conditions initiales jouent un rôle prépondérant est celui traité dans la monographie de D. Christodoulou et

S. Clainerman [6]. Ces deux auteurs se proposent d'établir l'existence d'une solution globale non triviale voisine de la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ en supposant que le tenseur d'impulsion-énergie soit partout nul. Une telle approche n'est pas susceptible d'applications à des situations physiques. En outre, du point de vue mathématique, il s'agit d'un long travail dont les principes ne sont pas à l'abri de toute critique.

4. Critique de la solution de Schwarzschild

Une critique circonstanciée de la métrique de Droste (sous le nom de Schwarzschild) se trouve dans [21] et [22]. C'est pourquoi nous allons nous borner ici à l'examen de l'article de Schwarzschild [17].

a) Le titre de l'article : "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie" montre d'abord que Schwarzschild ne se pose pas du tout le problème de savoir si les équations de gravitation sont compatibles avec la notion de source ponctuelle. Il postule d'avance cette compatibilité. D'ailleurs dans l'introduction de son article où la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ intervient implicitement, il clarifie sa position en considérant "das Gravitationsfeld einer im Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ befindlichen Masse, wenn die Komponenten des Gravitationsfeldes... überall, mit Ausnahme des Punktes $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ den Feldgleichungen ... genügen". En termes plus précis, Schwarzschild postule l'existence d'une solution statique différentiable sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\})$ et singulière sur $\mathbb{R} \times \{(0, 0, 0)\}$, étant sous-entendu que la singularité de la métrique doit être telle que le caractère ponctuelle soit préservé. Ce postulat est contredit par la solution de Schwarzschild elle-même - nous allons le voir - comme d'ailleurs par toutes les tentatives ultérieures pour obtenir une telle solution. Cependant il s'agit d'une idée qui continue de persister obstinément chez les relativistes.

b) Bien que Schwarzschild utilise le terme "rechtwinklige Koordinaten" (coordonnées rectangulaires) qui n'a de sens que par rapport à la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$, il écrit quand même intuitivement de façon correcte la métrique spatio-temporelle statique avec la symétrie requise relativement à l'action du groupe $SO(3)$: "Nennt man die Zeit t , die rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 , so ist das allgemeinste Linienelement, welches die Forderungen... erfüllt, offenbar das folgende :

$$ds^2 = Fdt^2 - Gdx^2 - H(dx)^2 \quad (4.1)$$

wobei F, G, H Funktionen von $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ sind".

(Nous avons modifié légèrement les notations de Schwarzschild en écrivant x_1, x_2, x_3 , au lieu de x, y, z et en posant, comme d'habitude

$$dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, xdx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 \text{).}$$

Cependant ce passage très substantiel ne joue presque aucun rôle par la suite. Schwarzschild n'en tire pas parti, car il passe tout de suite en coordonnées polaires, ce qui donne la métrique transformée

$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2d\omega^2 \quad (4.2)$$

où l'on a encore amélioré les notations en écrivant, au lieu de $\sin^2\theta\varphi^2 + d\theta^2$ la forme $d\omega^2$ globalement définie sur S^2 .

De plus Schwarzschild ne fait pas attention à la forme spécifique de (4.2), qui garantit la continuité de la forme de départ (4.1) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ pour $x = (0, 0, 0)$ et raisonne ensuite comme si (4.2) était une métrique spatio-temporelle quelconque de la forme

$$ds^2 = F(r)dt^2 - A(r)dr^2 - B(r)d\omega^2 \quad (4.3)$$

sans imposer d'ailleurs la condition de dégénérescence $B(0) = 0$ qui est nécessaire pour la validité de (4.3). De cette façon la méthode de Schwarzschild reste intégralement dans le cadre de la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ sans aucune possibilité de retour à la variété de départ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. En fait la méthode de Schwarzschild marque, entre autres, le début de l'invasion des variétés à bord dans le formalisme de la relativité générale. La métrique statique (4.1) n'est plus prise en considération par les relativistes ni non plus par les mathématiciens (à l'exception de H. Weyl) qui semblent embarrassés par cette expression extrêmement simple dont l'unicité est évidente mais non pas établie.

c) Schwarzschild ne se limite pas à la prise en considération des équations de gravitation, mais tient aussi compte d'une condition malencontreuse proposée par Einstein dans ses premiers articles sur la relativité générale :

$$\det(g_{ij}) = -1$$

(En fait Einstein prenait $c = 1$, de sorte qu'il vaut mieux écrire

$$\det(g_{ij}) = -c^2 \text{).}$$

Cette condition entre les composantes g_{ij} du tenseur métrique n'est pas susceptible de vérification pour n'importe quelle forme spatio-temporelle. Si l'on l'écrit, par exemple, pour la forme (4.2) et les coordonnées φ, θ , on trouve la relation absurde

$$FG^2(G + Hr^2)r^4 \sin^2 \theta = 1$$

D'autre part, elle n'est pas invariante par rapport aux changements de coordonnées (sauf pour les changements dont le déterminant jacobien est $+1$ ou -1). Si l'on a donc affaire à diverses formes de la même métrique, il faut préciser la forme par rapport à laquelle on l'écrit. Dans le cas actuel, Schwarzschild se rapporte implicitement à la forme de départ (4.1), ce qui entraînerait la condition

$$FG^2(G + Hr^2) = 1 \quad (4.4)$$

Quant aux équations de gravitation, qui sont covariantes, on peut les établir soit par rapport à (4.1) soit par rapport à (4.2) sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[\times S^2$. Or, Schwarzschild ne raisonne pas de cette façon évidente. Tout d'abord il avait déjà abandonné la métrique (4.1), et c'est pourquoi il ne pense même pas à écrire la relation (4.4). Ensuite il rattache curieusement la covariance des équations de gravitation aux changements de coordonnées de déterminant jacobien $+1$:

“Indessen ist das Volumenelement in Polarkoordinaten gleich $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, die Funktionaldeterminante der alten nach den neuen Koordinaten $r^2 \sin \theta$ ist von 1 verschieden ; es würden also die Feldgleichungen nicht in unveränderten Form bestehen, wenn man mit diesen Polarkoordinaten rechnete, und man würde eine umständliche Transformation ausführen müssen”.

C'est la raison pour laquelle il effectue un deuxième changement de coordonnées locales tel que le déterminant jacobien du changement composé soit égal à 1. Les fonctions inconnues dans la forme qui en résulte sont notées $f_4, f_1, f_2 = f_3$, mais leurs expressions au moyen des fonctions de départ F, G, H dans (4.1) ne sont pas données. Il convient quand même de les écrire afin de faire la comparaison avec la condition (4.4) :

$$f_4 = F, f_1 = \frac{G + Hr^2}{r^4}, f_2 = f_3 = Gr^2$$

Finalement Schwarzschild trouve la solution

$$f_4 = 1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \beta)^{\frac{1}{3}}}, f_1 = \frac{(r^3 + \beta)^{-\frac{4}{3}}}{1 - \frac{\alpha}{(r^3 + \beta)^{\frac{1}{3}}}}, f_2 = f_3 = (r^3 + \beta)^{\frac{2}{3}} \quad (4.5)$$

qui comporte deux constantes arbitraires, α et β , et choisit ensuite $\beta = \alpha^3$ afin que la discontinuité soit reléguée à la soi-disant origine $r = 0$. En posant alors

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}}$$

il écrit la métrique sous la forme (1.1) sans préciser d'ailleurs la constante α identifiée plus tard à la valeur $2km/c^2$.

La condition (4.4), qui intervient implicitement dans la méthode de Schwarzschild, a été abandonnée. Mais elle a laissé des traces en inaugurant une technique toujours en vigueur, à savoir l'usage de transformations implicites, comme nous l'avons déjà expliqué.

d) Schwarzschild s'est proposé de déterminer le champ gravitationnel d'une source ponctuelle placée à l'origine de $\mathbb{R}^3$. Sa solution devrait donc être différentiable sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\})$ et singulière sur $\mathbb{R} \times \{(0, 0, 0)\}$ sans transgresser la notion de point mathématique ou, plus précisément, la notion de ligne d'univers d'un point. Mais en fait Schwarzschild a abouti à un résultat différent. La métrique (1.1) est conçue sur la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ et présente des singularités sur le bord $\mathbb{R} \times \{0\} \times S^2$ à cause de l'annulation de $1 - \alpha/R$ pour $r = 0$. Considérons en particulier la métrique spatiale associée

$$\frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} + R^2 d\omega^2, \quad (R = (r^3 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}}, r \geq 0),$$

qui est conçue sur la variété à bord $[0, +\infty[\times S^2$. Elle est différentiable sur $]0, +\infty[\times S^2$ mais sur le bord présente une discontinuité. Cependant l'intégrale

$$\int_{\alpha}^R \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{u}}} = \sqrt{R(R - \alpha)} + \alpha \ln \left(\sqrt{\frac{R}{\alpha}} + \sqrt{\frac{R}{\alpha} - 1} \right)$$

a un sens de sorte que la longueur des géodésiques ($\varphi = Cte, \theta = Cte$) ou ($\varphi' = Cte, \theta' = Cte$) à partir du bord est bien définie. De plus la métrique $\alpha^2 d\omega^2$, induite sur le bord, restitue manifestement la topologie de S^2 . Par conséquent la métrique spatiale restitue la topologie de $[0, +\infty[\times S^2$. L'espace de l'observateur s'identifie donc à un vrai demi-cylindre à trois dimensions, c'est-à-dire à un espace différent de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui figure dans la formulation du problème. La masse ponctuelle était supposée placée à l'origine de $\mathbb{R}^3$ qui serait par hypothèse un point singulier pour la métrique. Maintenant on n'a plus un point singulier, mais une infinité

de points singuliers constituant le bord $\{0\} \times S^2$ qui a la puissance du continu. Le contenu même du problème se trouve profondément modifié. Toutefois on continue à parler de “l’origine $r = 0$ ” comme s’il s’agissait d’un point.

En définitive la méthode de Schwarzschild préfigure les techniques futures qui en ont conservé les mêmes défauts, à savoir :

- a) l’idée de compatibilité des équations de gravitation avec une source ponctuelle,
- b) la liberté de remplacer les variétés par des variétés à bord dont les bords n’ont aucune signification physique,
- c) l’utilisation abusive de transformations implicites.

Cela dit, si l’on regarde maintenant la solution de Droste (1.2), on constate qu’elle résulte formellement de la solution générale (4.5) de Schwarzschild en y faisant $\beta = 0$. D’habitude on l’établit directement, mais de toute façon les calculs qui y interviennent présentent les trois défauts signalés ci-dessus. La solution de Droste se distingue de la solution de Schwarzschild (1.1) en raison de la discontinuité $r = \alpha$ qui a occasionné un débat sans fin sur un faux problème. Les questions qui s’y rattachent ont été déjà élucidées [21] et c’est pourquoi nous n’y reviendrons pas. Toutefois nous mentionnons un commentaire de Louis de Broglie [5] qui est assez significatif parce qu’il concerne la position d’Einstein vis-à-vis de cette solution :

“Le problème que se posait Einstein devait être formulé comme suit : trouver une solution du type souhaité pour la représentation d’un corpuscule de l’équation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

débarassée des termes de sources en $T_{\mu\nu}$ qui se réduit d’ailleurs à $R_{\mu\nu} = 0$. On sait depuis un travail de Schwarzschild (lire : de Droste) ... que cette équation admet pour solution des $g_{\mu\nu}$ à singularité ponctuelle correspondant au ds^2

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \alpha = \frac{2km}{c^2},$$

et l’on considère cette solution comme définissant la métrique de l’espace-temps autour d’un corpuscule matériel ponctuel. Naturellement cette

célèbre solution... ne pouvait pas donner satisfaction à Einstein puisqu'elle comporte une singularité en $r = \alpha$. Il a longtemps, semble-t-il, cherché une solution sans singularité des équations $R_{\mu\nu} = 0$ susceptible de représenter un corpuscule. N'ayant pu en trouver, il s'était résigné dans son mémoire avec Grommer à envisager des solutions à singularités, mais comme je l'ai dit, il préférerait les solutions sans singularité et il n'a pas cessé d'en chercher".

5. Sur les champs gravitationnels $S\Theta(4)$ -invariants et le théorème de Birkhoff

Le problème relatif au champ gravitationnel d'une boule de matière se présente de façon très simple en mécanique classique, qui est conçue par rapport à une métrique préexistante, à savoir par rapport à la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$: on considère une distribution bornée de matière dont la densité, notée $\varepsilon(\rho)$, dépend uniquement de la distance ρ à un point fixé que l'on choisit comme origine d'un système orthonormé. Si l'on désigne alors par ρ_1 le rayon de la distribution de matière en question, le potentiel gravitationnel de Newton est défini, pour tout $\rho \geq \rho_1$, par l'expression

$$-\frac{km}{\rho} \quad (5.1)$$

k étant la constante gravitationnelle et m étant la masse totale :

$$m = 4\pi \int_0^{\rho_1} u^2 \varepsilon(u) du$$

Puisque le rayon ρ_1 ne figure pas dans l'expression (5.1), celle-ci garde formellement sa validité mathématique pour tout $\rho > 0$. En réalité cela présuppose que l'on fait tendre ρ_1 vers zéro et $\varepsilon(\rho)$ vers $+\infty$, de façon que l'intégrale ne se modifie pas. On arrive ainsi à la notion de source ponctuelle : une masse concentrée en un point avec une densité $+\infty$. Bien que cette notion ne soit pas physiquement concevable, elle est utilisée couramment en mécanique classique et aussi en mécanique quantique. Du point de vue mathématique la pratique ainsi consacrée ne pose pas de problèmes pour deux raisons :

Premièrement la forme spécifique de (5.1) est valable pour tout $\rho > 0$

Deuxièmement la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ est partout régulière et préserve en conséquence la notion de point héritée de la topologie de $\mathbb{R}^3$.

En relativité générale, on considère aussi le champ gravitationnel engendré par une distribution sphérique de matière, mais le problème ne se pose pas comme en mécanique classique.

En premier lieu la métrique spatio-temporelle n'est pas donnée d'avance et l'on cherche à la déterminer sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de façon à satisfaire certaines conditions traduisant nos idées intuitives sur la symétrie sphérique. En fait nous savons déjà [22] que l'on doit partir d'une métrique $S\Theta(4)$ -invariante (donc aussi $\Theta(4)$ -invariante), c'est-à-dire de la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = & \alpha_{00}(x_0, \|x\|)dx_0^2 + 2\alpha_{01}(x_0, \|x\|)(xdx)dx_0 \\ & - \alpha_{11}(x_0, \|x\|)dx^2 - \alpha_{22}(x_0, \|x\|)(xdx)^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

les fonctions qui y figurent devant être suffisamment différentiables ou mieux C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

En deuxième lieu, pour la détermination du champ extérieur, nous avons à préciser les conditions aux limites aussi bien sur le bord de la source qu'à l'infini. Le bord de la matière est maintenant une sphère non euclidienne, de sorte qu'il est caractérisé non seulement par son rayon $\sigma(t)$, mais aussi par son rayon de courbure $\zeta(t)$ qui intervient dans le calcul de son aire : $4\pi(\zeta(t))^2$. Les deux fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ dépendent effectivement du temps t lorsque la matière effectue des mouvements radiaux, et constituent les conditions aux limites sur le bord (ces conditions sont appelées, dans [22], conditions initiales). La masse totale y intervient aussi comme constante d'intégration dont la valeur s'obtient par comparaison avec le potentiel de Newton. En ce qui concerne les conditions aux limites à l'infini, elles se résument à ceci : la métrique spatio-temporelle doit tendre uniformément vers une forme stationnaire pseudo-euclidienne et le tenseur de courbure doit tendre, uniformément aussi, vers zéro lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.

En troisième lieu, on ne saurait obtenir la détermination du champ non stationnaire extérieur en soumettant machinalement au calcul la métrique (5.2). On doit d'abord comprendre le mécanisme du phénomène en tant que propagation d'ébranlements gravitationnels à partir du bord de la source en déformation. Cela nous amène à commencer par la définition de la fonction de propagation correspondante au moyen des fonctions qui figurent dans la métrique (5.2).

En quatrième lieu, la question de savoir si la notion de source ponctuelle est compatible ou incompatible avec la relativité générale ne peut être abordée que sur la base de la solution elle-même des équations

de gravitation (la réponse nous est déjà connue : la solution en question est incompatible avec la notion de source ponctuelle).

Le programme que nous venons d'esquisser garantit l'étude du champ gravitationnel dans un cadre conceptuel et mathématique cohérent à l'abri de tout malentendu. En ce qui concerne la méthode traditionnelle, elle est caractérisée par le manque de formulation précise du problème et l'usage abusif de transformations implicites. Nous allons maintenant en indiquer les points faibles qui sont en même temps les points faibles du raisonnement qui intervient dans le théorème de Birkhoff.

a) La variété du problème, c'est-à-dire l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, n'est pas prise en considération, et la métrique spatio-temporelle (ou, mieux, la forme spatio-temporelle) est conçue directement sur la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$:

$$ds^2 = A(u, \rho) du^2 - 2B(u, \rho) du d\rho - C(u, \rho) d\rho^2 - D(u, \rho) d\omega^2 \quad (5.3)$$

la fonction $D(u, \rho)$ devant s'annuler pour $\rho = 0$ en raison de la condition de dégénérescence sur le bord. Bien entendu, la forme (5.3) est supposée C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, mais la forme qui lui correspond sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, à savoir

$$\begin{aligned} ds^2 = & A(u, \|x\|) du^2 - 2B(u, \|x\|) \frac{xdx}{\|x\|} du - \frac{D(u, \|x\|)}{\|x\|^2} dx^2 \\ & - \left(C(u, \|x\|) - \frac{D(u, \|x\|)}{\|x\|^2} \right) \frac{(xdx)^2}{\|x\|^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

est en général discontinue pour $x = (0, 0, 0)$. La continuité de (5.4) nécessite la validité de conditions spécifiques. Mais celle-ci ne suffisent pas pour assurer la différentiabilité pour $x = (0, 0, 0)$ qui exige la validité de conditions supplémentaires.

b) Les relativistes pensent que, quelles que soient les fonctions différentiables

$$A(u, \rho), B(u, \rho), C(u, \rho), D(u, \rho),$$

il existe une transformation implicite (un difféomorphisme implicite) de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ sur lui-même réduisant la forme générale (5.3) à la forme spécifique

$$ds^2 = (\alpha(t, r))^2 dt^2 - ((\beta(t, r))^2 dr^2 + r^2 d\omega^2) \quad (5.5)$$

En d'autres termes, ils prétendent que l'on peut toujours définir sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ deux fonctions différentiables :

$$u = f_1(t, r), \rho = f_2(t, r),$$

définissant un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ sur lui-même et telles que les deux équations :

$$A(f_1, f_2) \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial r} - B(f_1, f_2) \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{\partial f_1}{\partial r} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) - C(f_1, f_2) \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0,$$

$$D(f_1, f_2) = r^2$$

soient satisfaites.

Cette assertion est manifestement erronée. En ce qui concerne la forme réduite (5.5), elle résulte d'une forme définie de façon unique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, à savoir

$$ds^2 = (\alpha(t, \|x\|))^2 dt^2 - dx^2 - ((\beta(t, \|x\|))^2 - 1) \frac{(xdx)^2}{\|x\|^2}$$

qui, à part le cas spécifique où $\beta(t, o) = 1$, est discontinue pour $x = (0, 0, 0)$.

c) Le paramètre r , qui figure dans la forme (5.5), est à l'origine d'une confusion conceptuelle sans précédent. Il semble que son introduction remonte à un article de Levi-Civita, d'après une référence donnée par Levi-Civita lui-même [10], et c'est pourquoi nous l'avons déjà appelé [21] paramètre de Levi-Civita. Les relativistes commencent par considérer ce paramètre comme coordonnée radiale et l'identifient souvent à une vraie distance, quitte à lui attribuer ensuite d'autres significations. Mais en fait, le paramètre de Levi-Civita n'a rien à voir avec la notion de coordonnée, comme on le constate en considérant la métrique spatiale associée à (5.5) :

$$(\beta(t, r))^2 dr^2 + r^2 d\omega^2 \quad (5.6)$$

qui, d'après les hypothèses admises, est partout C^∞ . Pour $r = Cte > 0$, on trouve la métrique $r^2 d\omega^2$ d'une sphère statique $S^2(r)$ à courbure constante égale à $\frac{1}{r^2}$. Le paramètre r sert surtout au calcul des longueurs $2\pi r$ des grands cercles de $S^2(r)$, mais ne nous donne aucun renseignement concernant le rayon de $S^2(r)$. En fait, la sphère $S^2(r)$ n'a ni centre ni rayon par rapport à (5.6) : autrement dit, elle est inexistante pour la

métrique. Pour y remédier, on pourrait envisager de définir le rayon par l'intégrale

$$\int_0^r \beta(t, u) du,$$

mais une telle définition est inacceptable, car $\beta(t, r)$ est une fonction inconnue dont on cherche la détermination au moyen des équations de gravitation. D'ailleurs, même si l'on suppose connue la fonction $\beta(t, r)$, la détermination en question donne lieu à des difficultés : d'abord le calcul de l'intégrale présuppose la connaissance de r , c'est-à-dire la connaissance des aires des sphères $S^2(r)$. Ensuite, si $\beta(t, r)$ dépend effectivement de t , on trouve un rayon variable avec le temps, tandis que nous avons affaire à une sphère statique.

En défendant obstinément l'usage du paramètre de Levi-Civita, les relativistes nous proposent, en fait, de renoncer à nos idées géométriques de base. Ainsi, d'après I.D. Novikov :

“En géométrie ordinaire, il y a deux façons de détermination du rayon : premièrement comme distance du centre à la circonférence, et deuxièmement comme résultat de la division par 2π de la longueur de circonférence. Ces deux quantités ne coïncident pas en géométrie non euclidienne... La deuxième façon est plus facile... Nous allons considérer toujours comme rayon la longueur de circonférence divisée par 2π ” [13].

Novikov se rapporte implicitement au cas d'un champ stationnaire, et nous propose de définir le rayon en mesurant la longueur d'une courbe fermée. Mais il oublie de dire que l'on doit savoir d'avance que la courbe en question est la circonférence d'un cercle. Or, le cercle est un objet géométrique défini, dans le cadre de toute métrique riemannienne, par la donnée de son centre et de son rayon.

Cela dit, il est maintenant clair que les conditions aux limites sur le bord de la source ne sont pas définissables à cause du paramètre de Levi-Civita. Une autre conséquence de l'introduction du paramètre de Levi-Civita dans la métrique est l'incompatibilité de (5.5) avec les états dynamiques du champ qui sont engendrés par les mouvements radiaux de la matière. En particulier, les états dynamiques du champ extérieur sont assujettis au mouvement radial du bord sphérique, c'est-à-dire au mouvement défini par les deux fonctions $\sigma(t)$ et $\zeta(t)$ qui sont inconcevables par rapport à la forme (5.5). Par conséquent, malgré la présence formelle du temps t dans les fonctions $\alpha(t, r)$ et $\beta(t, r)$, la forme (5.5) est incompatible avec les états dynamiques du champ

gravitationnel. On en déduit que les équations de gravitation relatives à (5.5) donneront forcément une solution extérieure statique.

d) L'analyse précédente nous permet de porter un jugement définitif sur le raisonnement de Birkhoff. En effet, celui-ci est basé sur les deux assertions ci-après :

Premièrement, les métriques (5.3) et (5.5) sont équivalentes.

Deuxièmement, la solution extérieure des équations d'Einstein relatives à (5.5) est statique.

En ce qui concerne la première, l'équivalence est conçue aussi bien du point de vue mathématique que du point de vue physique. Or, déjà l'équivalence formelle (mathématique) est infirmée par le point b). En ce qui concerne la deuxième, nous venons de voir qu'il s'agit d'un cercle vicieux à peine dissimulé.

e) Comme prévu, la solution extérieure des équations d'Einstein associées à (5.5) est statique :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{r}} - r^2 d\omega^2 \quad , \quad (\mu = \frac{km}{c^2}) \quad .$$

En fait, il s'agit de la solution de Droste, appelée abusivement solution de Schwarzschild dans la littérature.

Comme nous l'avons déjà vu, le difféomorphisme implicite considéré au point b) est en général inexistant. Maintenant la discontinuité de la solution de Droste pour $r = 2\mu$ montre qu'il est incompatible avec les solutions différentiables des équations d'Einstein. Par conséquent le raisonnement de Birkhoff contient une contradiction flagrante : il pré-suppose une différentiabilité infirmée par ses propres conclusions.

En définitive, le théorème de Birkhoff est un pseudo-théorème qui n'a pas droit de cité en relativité générale. On doit donc le rejeter conjointement avec les solutions de Schwarzschild et de Droste qui lui sont étroitement liées, afin de pouvoir examiner les problèmes relatifs aux champs gravitationnels $S\Theta(4)$ -invariants sur une base solide mathématiquement et physiquement.

Références

- [1] L.S. Abrams, Alternative space-time for the point mass, Phys. Rev., vol. 20, N° 10, 15/11/1979, pp. 2474-2479

- [2] L.S. Abrams, The total space-time of a point mass when $\Lambda \neq 0$ and its consequences for the Lake-Roeder black hole, *Physica A*, 1996, 131-140.
- [3] L.S. Abrams, The Total Space-time of a Point Charge and Its Consequences for Black Holes, *Inter. Journal of Theor. Physics*, Vol. 35, N° 12, 1996, 2661-2677.
- [4] M. Brillouin, *C.R.A.S., Série A*, 175, 1009-1012, 1922.
- [5] L. de Broglie, Divers problèmes concernant les ondes et les corpuscules, cours professé en 1956-1957, *Annales Fond. L. de Broglie*, Vol. 22, N° 3, 1997, pp. 221-236.
- [6] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski space*, Princeton University Press, 1993.
- [7] J. Droste, Het van een enkel centrum in Einstein's theorie der zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld, *Versl. gewone Vergad. Akad. Amst.*, 25, 1916, 163-180.
- [8] G.F.R. Ellis and B.G. Schmidt, Singular Space-Times, *General Relativity and Gravitation*, Vol. 8, n° 11, 1977, pp. 915-953.
- [9] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, VEB Deutscher Verlag von Wissenschaften, Berlin, 1980.
- [10] T. Levi-Civita, *Der absolute Differentialkalkül*, Verlag von J. Springer, Berlin, 1928, (traduction allemande de la monographie : *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*).
- [11] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson et Cie, Paris, 1955.
- [12] J.V. Narlikar and T. Padmanabhan, The Schwarzschild Solution : Some Conceptual Difficulties, *Found. of Physics*, Vol. 18, N° 6, 1988, pp. 659-668.
- [13] I.D. Novikov, *Les trous noirs et l'univers (Chernye dyry i vseleennaia)*, VAAP, Moscou.
- [14] N. Rosen, General Relativity with a Background Metric, *Found. of Phys.* 10, Nos 9/10, 1980, pp. 673-784.
- [15] N. Rosen, The Field of a particle in General Relativity Theory, *Il Nuovo Cimento*, Vol. 72B, n° 1, 11/11/1982, pp. 51-67.
- [16] N. Rosen, Some Schwarzschild's Solutions and Their Singularities, *Found. of Phys.*, Vol. 15, n° 4, 1985, pp. 517-529.
- [17] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. Kl.*, 1916, pp. 189-196.
- [18] J. Stachel, How Einstein discovered General Relativity : a historical tale with some contemporary morals, *Général Relativity and Gravitation*, Proceedings of the 11th International Conference on GRG, Stockholm, 1986, Cambridge University Press, 1987, pp. 200-208.
- [19] N. Stavroulakis, A Statical Smooth Extension of Schwarzschild's Metric, *Lettere al Nuovo Cimento, Serie 2*, Vol. 11, N. 8, 26/10/1974 pag. 427-430.
- [20] N. Stavroulakis, Paramètres cachés dans les potentiels des champs statiques, *Annales Fond. L. De Broglie*, Vol. 6, n° 4, 1981, pp. 287-327.
- [21] N. Stavroulakis, *Mathématiques et trous noirs*, *Gazette des mathématiques*

- ciens, n° 31, Juillet 1986, pp. 119-132.
- [22] N. Stavroulakis, Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale, première partie, Annales Fond. L. de Broglie, Vol. 12, N° 4, 1987, pp. 443-473.
 - [23] N. Stavroulakis, Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale, deuxième partie, Annales Fond. L. de Broglie, Vol. 13, N° 1, 1988, pp. 7-42.
 - [24] N. Stavroulakis, Continuous $S0(n)$ - invariant tensor fields on $\mathbb{R}^n - \{0\}$, Geometry and Topology of Submanifolds II, Editors M. Boyom, J.M. Morvan, L. Verstraelen, World Scientific Publ. Comp., 1990, pp. 301-343.
 - [25] N. Stavroulakis, Particules et particules test en relativité générale, Annales Fond. L. de Broglie, Vol. 16, n° 2, 1991, PP. 129-175.
 - [26] N. Stavroulakis, Sur la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels, Annales Fond. L. de Broglie, Vol. 20, N° 1, 1995, pp. 1-31.
 - [27] J.L. Synge, Introduction to General Relativity, p. 60, dans : Relativité, groupes et topologies, Université de Grenoble - Ecole d'été de Physique Théorique, les Houches, 1963, Gordon and Breach, London, New York, Paris.
 - [28] S. Weinberg, Gravitation and cosmology, John Wiley, New York, 1972.
 - [29] H. Weyl, Space-Time-Matter, Dover Publications, Inc., 1922.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1998)