# Equations de Dirac et fermions fondamentaux (Première partie)

#### CLAUDE DAVIAU

La Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France email : cdaviau@worldnet.fr Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France

RÉSUMÉ. L'examen des tenseurs de la théorie de Dirac conduit à l'utilisation de matrices fixes, indépendantes du repère utilisé. L'emploi de l'algèbre de Clifford d'espace, ou de matrices à coefficients réels, permet de remplacer i par trois matrices distinctes de carré -1. On associe chacun de ces objets à une des trois générations de fermions fondamentaux. Dans le groupe orthogonal laissant invariant les tenseurs et l'équation d'onde, la condition de violation maximale de la parité permet d'obtenir un groupe contenant un sous-groupe ayant la structure  $U(1) \times SU(2)$  de la théorie électro-faible. On compare l'isotropie de l'espace physique usuel à la non-isotropie de l'espace matriciel.

ABSTRACT. A complete examination of the tensors of the Dirac theory leads to use fixed matrices, independent of the Lorentz frame. The use of space Clifford algebra, or of real matrices, allows to replace i by three different matrices with square -1. Each matrix is associated with one of the three generations of fundamental fermions. Into the orthogonal group where tensors and wave equation are invariant, the maximal parity violation gives a group containing a subgroup with the  $U(1) \times SU(2)$  structure of the electro-weak theory. We compare the usual isotropic space and the non isotropic matrix space.

### Introduction

L'équation de Dirac [1] a été obtenue à une époque où l'on n'avait isolé que l'électron, et où l'on ne connaissait ni les neutrinos, ni les muons, ni les quarks. L'équation de Dirac vient de considérations relativistes, mais elle a donné en prime le spin demi-entier de l'électron, les bons nombres quantiques et les bons niveaux pour l'atome d'hydrogène, entre autres. Aussi considère-t-on aujourd'hui en physique des particules que tous les fermions fondamentaux, électrons, muons, neutrinos, quarks, suivent une

équation de Dirac. Celle-ci joue donc un rôle essentiel dans la théorie physique. On l'écrira ici sous la forme usuelle :

$$[\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}) + im]\psi = 0 \quad ; \quad q = \frac{e}{\hbar c} \quad ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar}$$
 (1)

où e, négatif, est la charge de l'électron et les  $A_{\mu}$  sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. La signature utilisée ici pour la métrique d'espace-temps est + - -, donc les composantes contravariantes de A sont  $A^0 = A_0$  et  $A^j = -A_j$ , j = 1, 2, 3. On prendra ici la forme usuelle des matrices de Dirac :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} ; \quad \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$
(3)

$$I = \sigma_0 = \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Les  $\gamma^{\mu}$  ne sont pas définies de manière unique. S étant une matrice  $4\times 4$  inversible, tout système de matrices  $\gamma'^{\mu}$ ,  $\psi'$  tel que  $\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}$  et  $\psi' = S\psi$  convient pour l'équation de Dirac. En conséquence les grandeurs physiques de la théorie font intervenir des produits comme par exemple le courant  $J^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ ;  $\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma_{0}$ . Ce courant est inchangé si S est une matrice unitaire :

$$S^{-1} = S^{\dagger}$$

$$\overline{\psi}' = {\psi'}^{\dagger} \gamma_0' = {\psi}^{\dagger} S^{\dagger} S \gamma_0 S^{-1} = \overline{\psi} S^{-1}$$

$$\overline{\psi}' \gamma_{\mu}' \psi' = \overline{\psi}' S^{-1} S \gamma_{\mu} S^{-1} S \psi = \overline{\psi} \gamma_{\mu} \psi = J_{\mu}$$
(6)

Il en résulte qu'en théorie de Dirac les matrices  $\gamma_\mu$  et  $\psi$  ne sont définies qu'à une transformation unitaire près :

$$\psi' = S\psi \; ; \; {\gamma'}^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1} \; ; \; S^{-1} = S^{\dagger}$$
 (7)

Or ceci va être remis en question, suite à l'examen complet des tenseurs de la théorie de Dirac effectuée en [15]

## L'algèbre de Clifford d'espace

La théorie de Dirac peut en effet être réécrite de manière tout à fait différente en utilisant l'algèbre de Clifford d'espace-temps, à la suite d'Hestenes [2 à 8], Boudet [9 à 11] et autres. On peut aussi utiliser seulement l'algèbre de Clifford d'espace, avec Baylis [12], Daviau [13 à 16], de la manière suivante : à tout  $\psi$  de la formulation classique on associera un  $\phi = f(\psi)$ , fonction de l'espace-temps à valeur dans l'algèbre de Clifford de l'espace physique, défini par

$$f(\psi) = \phi = a_1 + a_2\sigma_3\sigma_2 + a_3\sigma_3\sigma_1 + a_4\sigma_1\sigma_2 + a_5i + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3$$
(8)

où les  $a_j$  sont les parties réelles et imaginaires des  $\psi_i$ :

$$\psi_1 = a_1 + ia_4 \; ; \quad \psi_2 = -a_3 - ia_2 
\psi_3 = a_8 + ia_5 \; ; \quad \psi_4 = a_6 + ia_7$$
(9)

L'algèbre de Clifford d'espace est isomorphe à l'algèbre de Pauli engendrée par les matrices  $\sigma_j$  et leurs produits, c'est-à-dire  $M_2(\mathbb{C})$ . Mais il est essentiel de voir que cet isomorphisme f est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur le corps des réels, et non pas sur le corps des complexes, car on a

$$f(i\psi) = \phi i\sigma_3 \tag{10}$$

Les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de la transformation f sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb C$  mais f n'est pas  $\mathbb C$ -linéaire car on n'a pas  $f(i\psi) = if(\psi)$ . C'est donc bien la structure d'espace vectoriel et d'algèbre sur  $\mathbb R$  que nous utiliserons, les fonctions  $a_k$  étant des fonctions de l'espace et du temps à valeur dans  $\mathbb R$ . Avec le formalisme de l'algèbre d'espace, on utilise les conjugaisons suivantes :

$$\phi^{\dagger} = a_1 - a_2 \sigma_3 \sigma_2 - a_3 \sigma_3 \sigma_1 - a_4 \sigma_1 \sigma_2 - a_5 i + a_6 \sigma_1 + a_7 \sigma_2 + a_8 \sigma_3 \quad (11)$$

$$\overline{\phi} = a_1 + a_2 \sigma_3 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 \sigma_1 + a_4 \sigma_1 \sigma_2 - a_5 i - a_6 \sigma_1 - a_7 \sigma_2 - a_8 \sigma_3 \quad (12)$$

$$\widehat{\phi} = a_1 - a_2 \sigma_3 \sigma_2 - a_3 \sigma_3 \sigma_1 - a_4 \sigma_1 \sigma_2 + a_5 i - a_6 \sigma_1 - a_7 \sigma_2 - a_8 \sigma_3 \quad (13)$$

Ces conjugaisons vérifient, pour tout élément A et B de l'algèbre d'espace

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger} \; ; \; \overline{AB} = \overline{A} \; \overline{B}$$
$$\widehat{A} = \overline{A}^{\dagger} \; ; \; \widehat{AB} = \widehat{B} \widehat{A}$$
(14)

On obtient aussi, pour tout  $\phi = f(\psi)$ :

$$f(\psi^*) = \sigma_2 \overline{\phi} \sigma_2 \; ; \; f(\gamma^{\mu} \psi) = \sigma^{\mu} \overline{\phi}$$
 (15)

On obtient l'équation d'onde pour  $\phi$  en appliquant f à l'équation de Dirac :

$$f\left(\left[\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}) + im\right]\psi\right) = 0$$

ce qui donne :

$$\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\overline{\phi} + q\sigma^{\mu}A_{\mu}\overline{\phi}i\sigma_{3} + m\phi i\sigma_{3} = 0$$
 (16)

On utilisera les notations suivantes :

$$\nabla = \partial_0 + \vec{\partial} \; ; \quad \vec{\partial} = \sigma_1 \partial_1 + \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3 \tag{17}$$

$$A = A^{0} - \vec{A}; \quad \vec{A} = A^{1}\sigma_{1} + A^{2}\sigma_{2} + A^{3}\sigma_{3}$$
 (18)

Et il en résulte :

$$\overline{\nabla} = \partial_0 - \vec{\partial} = \sigma^\mu \partial_\mu \tag{19}$$

$$\overline{A} = A^0 + \vec{A} = \sigma^{\mu} A_{\mu} \tag{20}$$

L'équation de Dirac prend donc la forme :

$$\overline{\nabla} \ \overline{\phi} + q \overline{A} \ \overline{\phi} i \sigma_3 + m \phi i \sigma_3 = 0 \tag{21}$$

et ceci équivaut à :

$$\nabla \phi i \sigma_3 = m \overline{\phi} + q A \phi \tag{22}$$

On trouvera exposé en [13] et [15] le détail de la transcription à ce formalisme de la théorie de Dirac. Ce formalisme permet de mieux voir l'existence de tenseurs inconnus de la théorie classique. Les tenseurs sans dérivée, construits à partir du spineur  $\psi$  sont : le scalaire  $\Omega_1$ , le vecteur courant J, le tenseur antisymétrique S, le pseudovecteur spin K et le pseudoscalaire  $\Omega_2$  tels que :

$$\Omega_{1} = \overline{\psi}\psi$$

$$J^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

$$S^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi$$

$$K^{\mu} = -\overline{\psi}\gamma_{5}\gamma^{\mu}\psi$$

$$\Omega_{2} = -i\overline{\psi}\gamma_{5}\psi \; ; \; i\gamma_{5} = \gamma_{0}\gamma_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}$$
(23)

L'invariance relativiste impose la forme que prennent les tenseurs sans dérivée, à savoir :

$$J = \overline{\phi}\widehat{\phi}$$

$$K_{(j)} = \overline{\phi}\sigma_{j}\widehat{\phi} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

$$R = \phi\widehat{\phi}$$

$$S_{(j)} = \phi\sigma_{j}\widehat{\phi} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$
(24)

Les indices entre parenthèses ne correspondent pas à une composante de vecteur, mais au numéro du vecteur d'espace-temps ou du bivecteur d'espace-temps considéré, qui correspond au numéro d'une matrice de Pauli. Les densités tensorielles (23) correspondent à  $J,\,K_{(3)},\,R$  et  $S_{(3)},\,$  car on a :

$$R = \Omega_{1} + i\Omega_{2}$$

$$J = J^{0} - \vec{J} \; ; \quad \vec{J} = J^{1}\sigma_{1} + J^{2}\sigma_{2} + J^{3}\sigma_{3}$$

$$K_{(3)} = K^{0} - \vec{K} \; ; \quad \vec{K} = K^{1}\sigma_{1} + K^{2}\sigma_{2} + K^{3}\sigma_{3}$$

$$S_{(3)} = S^{23}\sigma_{1} + S^{31}\sigma_{2} + S^{12}\sigma_{3}$$

$$+ S^{10}i\sigma_{1} + S^{20}i\sigma_{2} + S^{30}i\sigma_{3}$$
(25)

Apparaissent ici, outre les 16 densités tensorielles (23), 20 autres densités tensorielles qui sont les composantes des pseudovecteurs d'espace-temps  $K_{(1)}$  et  $K_{(2)}$  et des bivecteurs (tenseurs antisymétriques de rang 2)  $S_{(1)}$  et  $S_{(2)}$ . Ces pseudovecteurs et bivecteurs ne sont pas invariants de jauge électrique, mais ils satisfont les mêmes critères de tensorialité que les densités tensorielles classiques. On peut le voir en utilisant l'algèbre d'espace. On peut aussi le voir en revenant au formalisme usuel, et en posant :

$$\tilde{\psi} = \psi^t \gamma_0 \gamma_2 \quad ; \quad \check{\psi} = \psi^t \gamma_1 \gamma_3 \tag{26}$$

où  $\psi^t = \psi^{*\dagger}$  est le transposé de  $\psi$ . On obtient alors :

$$\tilde{\psi}\gamma^{\mu}\psi = K_{(2)}{}^{\mu} - iK_{(1)}{}^{\mu}$$

$$\tilde{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi = S_{(2)}{}^{\mu\nu} - iS_{(1)}{}^{\mu\nu}$$
(27)

Sous une transformation de Lorentz qui change  $\psi$  en  $\psi'=\Lambda\psi$  et telle

que  $\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda = a^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$  on a :  $\gamma_{0}\gamma_{2}\Lambda^{-1} = \Lambda^{t}\gamma_{0}\gamma_{2} \quad ; \quad \gamma_{1}\gamma_{3}\Lambda^{-1} = \Lambda^{t}\gamma_{1}\gamma_{3}$   $\tilde{\psi}' = \tilde{\psi}\Lambda^{-1} \quad ; \quad \check{\psi}' = \check{\psi}\Lambda^{-1}$   $\tilde{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' = \tilde{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda\psi = a^{\mu}{}_{\nu}\tilde{\psi}\gamma^{\nu}\psi$   $\tilde{\psi}'\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi' = \check{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Lambda\psi$   $= a^{\mu}{}_{0}a^{\nu}{}_{\tau}\check{\psi}\gamma^{\rho}\gamma^{\tau}\psi$ (28)

Le fait que ces autres tenseurs ne sont pas invariants de jauge électrique ne suffit pas à leur refuser le statut de grandeur physique, d'autant plus que l'ensemble de tous ces tenseurs est globalement invariant sous un groupe de jauge ayant justement la structure  $U(1) \times SU(2)$  qui est le groupe de jauge intervenant dans la théorie électro-faible [15].

La théorie de Dirac sous sa forme initiale ne pouvait pas avoir l'idée de ces tenseurs, parce qu'elle vient d'une théorie quantique dans laquelle les matrices hermitiques et unitaires jouent un rôle idéologiquement essentiel, d'où l'invocation des transformations unitaires (7), qui sont incompatibles avec l'algèbre de Clifford d'espace-temps ou d'espace. Si la transformation f de (8) vérifiait  $f(i\psi)=if(\psi)$ , le produit scalaire hermitien du formalisme quantique serait facilement transcrit dans l'algèbre d'espace. Mais il n'en est rien, et donc l'espace des  $\phi$  n'a aucune raison d'être doté d'un produit scalaire hermitien. Si l'on veut conserver l'interprétation probabiliste de la théorie, on peut par contre facilement doter cet espace d'un produit scalaire euclidien :

$$\phi \cdot \phi' = \iiint (\sum_{i=1}^{i=8} a_i a_i') dv$$
 (29)

Dans le seul cas où le produit scalaire hermitien est utilisé réellement dans les calculs, à savoir pour calculer précisément les solutions de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène, une coïncidence mathématiquement assez surprenante fait que le produit scalaire euclidien fournit exactement les mêmes résultats [14].

Par contre les égalités (28) sont liées à la représentation usuelle des matrices de Pauli et de Dirac, au fait que  $\sigma_2$  et  $\gamma_2$  contiennent i en facteur tandis que  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  sont des matrices réelles. (28) n'est invariant sous les transformations (7) que si :

$$S^* = S \; ; \; S^{-1} = S^{\dagger} = S^t$$
 (30)

Car on a alors

$$\tilde{\psi}' = (S\psi)^t (S\gamma_0\gamma_2 S^{-1}) = \psi^t S^t S\gamma_0\gamma_2 S^{-1}$$

$$= \psi^t \gamma_0 \gamma_2 S^{-1} = \tilde{\psi} S^{-1}$$

$$\tilde{\psi}' \gamma'^{\mu} \psi' = \tilde{\psi} S^{-1} S\gamma^{\mu} S^{-1} S\psi = \tilde{\psi} \gamma^{\mu} \psi$$
(31)

Donc prendre en considération les densités tensorielles supplémentaires amène à ne prendre pour les matrices S de (7) que des matrices réelles. Pourtant, même si l'on se restreint à ces matrices unitaires réelles, il y a toujours des difficultés. L'algèbre de Lie du groupe unitaire réel SO(4) est engendrée par les six matrices  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{013}$ ,  $\gamma_{50}$ ,  $\gamma_{3}$ ,  $\gamma_{1}$ ,  $i\gamma_{02}$ , avec  $\gamma_{jk} = \gamma_{j}\gamma_{k}$ . Prenons l'exemple d'une matrice du type

$$S = e^{a\gamma_3} \tag{32}$$

On a, avec les matrices (3) de la représentation standard :

$$f(i\psi) = \phi i \sigma_3$$
  
$$f(\gamma^{\mu}\psi) = \sigma^{\mu} \overline{\phi}$$
 (33)

C'est ce qui permet de passer de la forme habituelle (1) à la forme (18) de l'équation de Dirac. Il n'y a compatibilité entre les relations précédentes et les transformations unitaires (7) que si

$$f(i\psi') = \phi' i\sigma_3'$$

$$f(\gamma'^{\mu}\psi') = \sigma'^{\mu}\overline{\phi}'$$
(34)

Or avec (32) on obtient:

$$\phi' = f(\psi') = f(\cos a\psi + \sin a\gamma_3\psi)$$
  
=  $\cos a\phi + \sin a\sigma_3\overline{\phi}$  (35)

On a alors:

$$f(\gamma'^{\mu}\psi') = f(\cos a\gamma^{\mu}\psi + \sin a\gamma_{3}\gamma^{\mu}\psi)$$

$$= \cos a\overline{\phi} + \sin a\sigma_{3}\overline{\sigma^{\mu}\overline{\phi}}$$

$$= \cos a\sigma^{\mu}\overline{\phi} - \sin a\sigma_{3}\sigma^{\mu}\phi$$

$$\sigma'^{\mu}\overline{\phi}' = \sigma'^{\mu}(\cos a\overline{\phi} - \sin a\sigma_{3}\phi)$$
(36)

Et ces deux expressions ne peuvent pas être identifiées.

Les physiciens attachés au formalisme qu'ils connaissent bien risquent alors de vouloir garder le cadre familier des matrices hermitiques et unitaires. Mais il faut bien comprendre que le formalisme usuel de la mécanique quantique, élaboré à partir de l'équation d'onde non relativiste, est forcément remis en cause avec l'équation de Dirac, car les quatre matrices  $\gamma^{\mu}$  ne peuvent être toutes hermitiques par suite de la signature non euclidienne de la métrique d'espace-temps. De plus, les nouveaux tenseurs ne sont accessibles que si l'on renonce aux transformations unitaires. On doit encore noter que l'on se garde bien d'utiliser les transformations unitaires lorsque l'on étudie l'invariance relativiste de l'équation de Dirac, que l'on y impose au contraire arbitrairement aux  $\gamma^{\mu}$  d'être identiques dans tous les repères de Lorentz. Enfin le point de vue de Louis de Broglie, initialement et finalement, a été de considérer l'onde associée au mouvement d'une particule comme ayant une réalité physique, et non comme un objet mathématique fictif permettant seulement de calculer des probabilités. Aussi dans la suite de cet article on considérera que les matrices  $\gamma^{\mu}$  sont des matrices fixes, indépendantes du repère lorentzien utilisé, et données par (3).

# L'équation de Dirac avec des matrices réelles

Associons maintenant à  $\psi$  ou  $\phi$  la matrice colonne :

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix}$$
(37)

L'équation de Dirac sous la forme (1), ou sous la forme (18), s'écrit alors

$$[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}P) + mP]\Phi = 0 \tag{38}$$

où les matrices  $\Gamma^{\mu}$  et P sont des matrices réelles  $8 \times 8$ , à savoir :

$$\Gamma^{0} = \begin{pmatrix} I_{4} & 0 \\ 0 & -I_{4} \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{013} \\ \gamma_{013} & 0 \end{pmatrix} 
\Gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{03} \\ \gamma_{03} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{01} \\ \gamma_{01} & 0 \end{pmatrix} 
P = \begin{pmatrix} -\gamma_{135} & 0 \\ 0 & \gamma_{135} \end{pmatrix}$$
(39)

où  $\gamma_{03}=\gamma_0\gamma_3,\ \gamma_{013}=\gamma_0\gamma_1\gamma_3,$  et ainsi de suite. Les matrices  $\Gamma^\mu$  anticommutent et commutent avec P:

$$\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu} + \Gamma^{\nu}\Gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}I_{8}$$

$$\Gamma^{\mu}P = P\Gamma^{\mu}$$
(40)

La forme hamiltonienne de l'équation (38) s'obtient en multipliant à gauche (38) par  $\Gamma^0 P$ , ce qui donne :

$$P\partial_0 \Phi = H\Phi$$

$$H = qA_0 + \Gamma^{0j}(-P\partial_j + qA_j) + m\Gamma^0$$
(41)

Ce qui est remarquable avec cette forme de la théorie de Dirac, c'est que la matrice P de carré -1 qui remplace le i traditionnel de la mécanique quantique n'est pas unique. Une inspection soignée de l'algèbre  $M_8(\mathbb{R})$  montre qu'il existe, au signe près, deux autres matrices et deux seulement qui commutent avec les quatre  $\Gamma^{\mu}$  et ont pour carré -1, à savoir :

$$Q = \begin{pmatrix} \gamma_{013} & 0 \\ 0 & \gamma_{013} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -\gamma_{05} & 0 \\ 0 & \gamma_{05} \end{pmatrix}$$

$$(42)$$

En effet les combinaisons linéaires de toutes les matrices  $\Gamma^{\mu}$  et de leurs produits engendrent une sous-algèbre de dimension 16 de  $M_8(\mathbb{R})$ . Avec le formalisme classique utilisant des matrices complexes, cette sous-algèbre était identique à l'algèbre complète. Ce n'est plus le cas ici,  $M_8(\mathbb{R})$  étant de dimension 64. On peut vérifier que toute matrice de  $M_8(\mathbb{R})$  s'écrit de façon unique sous la forme  $M_1 + M_2P + M_3Q + M_4R$ , où les  $M_j$  sont des combinaisons linéaires de matrices  $\Gamma^{\mu}$  et de leurs produits.

Il y a donc deux autres équations du même type que (38) :

$$[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}Q) + mQ]\Phi = 0$$
  

$$[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}R) + mR]\Phi = 0$$
(43)

La forme hamiltonienne de ces équations sera :

$$Q\partial_0 \Phi = H\Phi$$

$$H = qA_0 + \Gamma^{0j}(-Q\partial_i + qA_j) + m\Gamma^0$$
(44)

$$R\partial_0 \Phi = H\Phi$$

$$H = qA_0 + \Gamma^{0j}(-R\partial_j + qA_j) + m\Gamma^0$$
(45)

L'hypothèse que nous ferons ici est que chacun des trois termes  $P,\,Q,\,R,\,$  correspond à l'un des trois types de leptons chargés, et plus généralement à l'une des trois générations de fermions fondamentaux. C'est l'utilisation en mécanique quantique d'un i indifférentié qui a rendu incompréhensible l'existence des trois générations de particules. Rappelons qu'à ce jour aucune explication raisonnable n'a pu être donnée de l'existence du muon, connue pourtant depuis plus d'un demi-siècle. Et comme les hamiltoniens (41), (45) et (46) sont algébriquement équivalents, on doit s'attendre à ce qu'ils donnent la même dynamique, ce qui rend compréhensible l'extrême similitude des dynamiques lorsque l'on passe d'une génération à l'autre..

Des 16 grandeurs tensorielles sans dérivée de la formulation classique, on passe avec les matrices réelles à 36 grandeurs, car les densités tensorielles prennent maintenant la forme  $\Phi^t M\Phi$ , et M doit vérifier  $M^t = M$ , car si  $M^t = -M$  on a  $\Phi^t M\Phi = 0$ . En particulier on aura pour le courant de densité de probabilité :

$$J^{\mu} = \overline{\Phi} \Gamma^{\mu} \Phi \quad ; \quad \overline{\Phi} = \Phi^{t} \Gamma_{0} \tag{46}$$

Les 36 densités tensorielles se décomposent ainsi : 1 densité pour le scalaire

$$\Omega_1 = \overline{\Phi}\Phi \tag{47}$$

4 densités pour le vecteur J tel que

$$J^{\mu} = \overline{\Phi}\Gamma^{\mu}\Phi \tag{48}$$

 $3 \times 6 = 18$  densités pour les trois bivecteurs  $S_{(j)}$  tels que

$$S_{(j)}^{\mu\nu} = \overline{\Phi} P_j \Gamma^{\mu\nu} \Phi \; ; \; P_3 = P \; ; \; P_1 = Q \; ; \; P_2 = R$$
 (49)

 $3\times 4=12$  densités pour les trois pseudovecteurs  $K_{(j)}$  tels que

$$K_{(j)}^{\ \mu\nu\tau} = \overline{\Phi}P_j\Gamma^{\mu\nu\tau}\Phi \tag{50}$$

1 densité pour le pseudoscalaire

$$\Omega_2 = -\overline{\Phi}\Gamma_{0123}\Phi\tag{51}$$

Ceci est tout à fait conforme à ce que l'on obtient avec l'algèbre d'espace [15]. L'invariance relativiste des trois équations a exactement la même forme. On pose  $\Phi' = S\Phi$ , on garde les mêmes matrices  $\Gamma^{\mu}$  et on écrit dans le second repère :

$$[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu}' + qA_{\mu}'P) + mP]\Phi' = 0 \tag{52}$$

On obtient alors

$$[a^{\nu}_{\mu}\Gamma^{\mu}(\partial_{\nu} + qA_{\nu}P) + mP]S\Phi = 0 \tag{53}$$

Puis on a

$$S[\Gamma^{\nu}(\partial_{\nu} + qA_{\nu}P) + mP]\Phi = 0 \tag{54}$$

si l'on peut trouver des matrices S telles que

$$S\Gamma^{\nu}S^{-1} = \Gamma^{\mu}a^{\nu}_{\ \mu} \tag{55}$$

Le calcul de ces matrices S est similaire au calcul classique. Ainsi pour une rotation propre de Lorentz telle que

$$\partial'_{0} = \cosh 2a\partial_{0} + \sinh 2a\partial_{3}$$
  

$$\partial'_{3} = \sinh 2a\partial_{0} + \cosh 2a\partial_{3}$$
  

$$x'_{1} = x_{1} ; x'_{2} = x_{2}$$
(56)

on obtient

$$\Phi' = e^{a\Gamma_{03}}\Phi\tag{57}$$

Pour une rotation telle que

$$\partial'_{1} = \cos 2a\partial_{1} - \sin 2a\partial_{2}$$

$$\partial'_{2} = \sin 2a\partial_{1} + \cos 2a\partial_{2}$$

$$x'_{0} = x_{0} ; x'_{3} = x_{3}$$

$$(58)$$

on obtient

$$\Phi' = e^{a\Gamma_{21}}\Phi\tag{59}$$

Les matrices S sont donc les matrices produit d'exponentielles du type  $\exp(a\Gamma_{ij})$ ;  $i \neq j$ . Elles vérifient :

$$\Gamma_0 S^{-1} = S^t \Gamma_0 \tag{60}$$

et donc on a

$$\overline{\Phi}' = {\Phi'}^t \Gamma_0 = {\Phi}^t S^t \Gamma_0$$

$$= {\Phi}^t \Gamma_0 S^{-1} = \overline{\Phi} S^{-1}$$
(61)

Ceci assure la tensorialité des  $\overline{\Phi}M\Phi$ , par exemple :

$$J^{\mu} = \overline{\Phi}\Gamma^{\mu}\Phi = \overline{\Phi}'S\Gamma^{\mu}S^{-1}\Phi'$$
$$= \overline{\Phi}'\Gamma^{\nu}a^{\mu}..\Phi' = a^{\mu}..J'^{\nu}$$
(62)

On notera que, ici aussi, les matrices  $\Gamma^{\mu}$  sont fixes, indépendantes du repère utilisé.

# Invariance sous le groupe orthogonal

Sous sa forme initiale, comme on l'a rappelé en introduction, les matrices  $\gamma_{\mu}$  ne sont définies qu'à une matrice unitaire près. Avec les matrices réelles, le produit scalaire hermitien doit logiquement être remplacé par le produit scalaire euclidien (29), qui s'écrit avec  $\Phi$ :

$$\Phi \cdot \Phi' = \iiint \Phi^t \Phi' dv \tag{63}$$

Ce produit scalaire, et toutes les densités tensorielles de type  $\Phi^t M \Phi$ , sont invariants sous les transformations orthogonales globales :

$$\Phi \mapsto \Phi' = A\Phi$$

$$M \mapsto M' = AMA^{t}$$

$$A^{t} = A^{-1}$$
(64)

car on a

$$\Phi'^t M' \Phi' = \Phi^t A^t A M A^t A \Phi = \Phi^t M \Phi \tag{65}$$

L'équation de Dirac (38) est invariante sous les transformations orthogonales :

$$\Phi \mapsto \Phi' = A\Phi$$

$$\Gamma^{\mu} \mapsto \Gamma'^{\mu} = A\Gamma^{\mu}A^{t}$$

$$P \mapsto P' = APA^{t}$$

$$A^{t} = A^{-1}$$
(66)

à condition de prendre des matrices orthogonales A fixes, car on a alors

$$[\Gamma'^{\mu}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}P') + mP']\Phi'$$

$$= [A\Gamma^{\mu}A^{t}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}APA^{t}) + mAPA^{t}]A\Phi$$

$$= A[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}P) + mP]\Phi$$
(67)

ce qui assure l'invariance de l'équation de Dirac sous la forme (38). Si l'on considère maintenant une transformation orthogonale pour laquelle  $\partial_{\mu}A$  n'est pas nul, l'équation de Dirac n'est plus invariante, mais il est aisé de rétablir l'invariance en modifiant le terme de potentiel de façon à avoir :

$$qA'_{\mu}P' = -A^{t}\partial_{\mu}A + qA_{\mu}P$$

$$[\Gamma'^{\mu}(\partial_{\mu} + qA'_{\mu}P') + mP']\Phi'$$

$$= A[\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + qA_{\mu}P) + mP]\Phi$$
(68)

On voit ainsi que les transformations orthogonales (66) vont jouer, dans toutes les théories de jauge locale au coeur de la physique actuelle, un rôle essentiel. On sait par exemple que les forces électro-faibles peuvent être reliées à une telle invariance de jauge locale. On sait aussi que les forces faibles violent de façon maximale la parité, ce qui, dans le modèle de Weinberg-Salam, amène à former un isodoublet avec la partie gauche de l'onde, tandis que la partie droite est un isosinglet, invariant sous le groupe SU(2). La partie droite et la partie gauche de l'onde sont, avec le formalisme des  $\gamma_{\mu}$ :

$$\psi_{L} = \frac{1}{2}(I_{4} - \gamma_{5})\psi 
\psi_{R} = \frac{1}{2}(I_{4} + \gamma_{5})\psi$$
(69)

Comme  $\gamma_5 = -i\gamma_{0123}$ , nous obtenons, avec les matrices réelles :

$$\Phi_L = \frac{1}{2} (I_8 + \Gamma_{0123} P) \Phi 
\Phi_R = \frac{1}{2} (I_8 - \Gamma_{0123} P) \Phi$$
(70)

Cherchons, parmi les matrices orthogonales  $8 \times 8$ , celles qui laissent invariante la partie droite  $\Phi_R$  de l'onde, et qui transforment la partie gauche en une autre partie gauche :

$$M\Phi_R = \Phi_R \tag{71}$$

$$M\Phi_L = \Phi'_L \tag{72}$$

La condition (71), pour une matrice M écrite par blocs avec des matrices  $4 \times 4$ , devient

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_4 & \gamma_{0135} \\ \gamma_{0135} & I_4 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} I_4 & \gamma_{0135} \\ \gamma_{0135} & I_4 \end{pmatrix} \Phi \tag{73}$$

Ceci est vérifié pour

$$A = I_4 - C\gamma_{0135} D = I_4 - B\gamma_{0135}$$
 (74)

c'est-à-dire pour

$$M = \begin{pmatrix} I_4 - C\gamma_{0135} & C \\ B & I_4 - B\gamma_{0135} \end{pmatrix}$$
 (75)

Pour ces matrices, la condition (72) devient, avec

$$\Phi = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi' = \begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$(I_4 - 2C\gamma_{0135})U + (-\gamma_{0135} + 2C)V = U' - \gamma_{0135}V'$$

$$(2B - \gamma_{0135})U + (I_4 - 2B\gamma_{0135})V = -\gamma_{0135}U' + V'$$
(77)

Ces équations ne sont compatibles que si

$$C = \gamma_{0135} B \gamma_{0135} \tag{78}$$

ce qui donne :

$$M = \begin{pmatrix} I_4 - \gamma_{0135}B & \gamma_{0135}B\gamma_{0135} \\ B & I_4 - B\gamma_{0135} \end{pmatrix}$$
 (79)

Cherchons maintenant, parmi les matrices de cette forme, celles qui sont orthogonales. Pour  $M=e^X$ , l'orthogonalité équivaut à  $X^t=-X$ , donc X doit être de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} U & -V^t \\ V & Z \end{pmatrix}$$

$$U^t = -U : Z^t = -Z$$
(80)

Considérons une matrice infinitésimale de ce type. On a :

$$M = e^{X} = I_{8} + X = \begin{pmatrix} I_{4} + U & -V^{t} \\ V & I_{4} + Z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{4} - \gamma_{0135}B & \gamma_{0135}B\gamma_{0135} \\ B & I_{4} - B\gamma_{0135} \end{pmatrix}$$
(81)

donc il faut prendre:

$$U = -\gamma_{0135}B$$

$$V = B$$

$$Z = -B\gamma_{0135}$$

$$B^{t}\gamma_{0135} = -\gamma_{0135}B$$

$$(82)$$

Une base de l'algèbre de Lie du groupe SO(8) des matrices orthogonales  $8\times 8$  est formée par les 28 matrices suivantes :  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ , P, Q, R,  $\Gamma_{23}$ ,  $\Gamma_{31}$ ,  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{023}$ ,  $\Gamma_{031}$ ,  $\Gamma_{012}$ ,  $\Gamma_{0123}$ ,  $\Gamma_0 P$ ,  $\Gamma_{01} P$ ,  $\Gamma_{02} P$ ,  $\Gamma_{03} P$ ,  $\Gamma_{123} P$ ,  $\Gamma_0 Q$ ,  $\Gamma_{01} Q$ ,  $\Gamma_{02} Q$ ,  $\Gamma_{03} Q$ ,  $\Gamma_{123} Q$ ,  $\Gamma_0 R$ ,  $\Gamma_{01} R$ ,  $\Gamma_{02} R$ ,  $\Gamma_{03} R$ ,  $\Gamma_{123} R$ . Notons  $G_1$ ,  $G_2$ , ...,  $G_{28}$  les matrices de la liste précédente, et cherchons X comme combinaison linéaire des 28 matrices de cette base :

$$X = \sum_{i=1}^{i=28} a_i G_i \tag{83}$$

où les  $a_i$ sont infinitésimaux. L'égalité  $U=-\gamma_{0135}V$  équivaut à :

$$0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_{18} = a_{20} = a_{21} = a_{22} = a_{25} = a_{26} = a_{27}$$

$$a_{13} = -(a_4 + a_{14}) \; ; \quad a_{15} = -(a_7 + a_{10}) \; ; \quad a_{16} = -(a_8 + a_{11})$$

$$a_{17} = -(a_9 + a_{12}) \; ; \quad a_{23} = a_6 + a_{24} \; ; \quad a_{28} = -(a_5 + a_{19})$$

$$(84)$$

Puis l'égalité  $Z=-V\gamma_{0135}$  équivaut à :

$$a_{13} = -a_4 + a_{14}$$
;  $a_{15} = -a_7 + a_{10}$   
 $a_{16} = -a_8 + a_{11}$ ;  $a_{17} = -a_9 + a_{12}$  (85)  
 $a_{23} = -a_6 + a_{24}$ ;  $a_{28} = a_5 - a_{19}$ 

On obtient donc

$$a_5 = a_6 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{14} = 0$$
  
 $a_{13} = -a_4$ ;  $a_{15} = -a_7$ ;  $a_{16} = -a_8$  (86)  
 $a_{24} = a_{23}$ ;  $a_{28} = -a_{19}$ ;  $a_{17} = -a_9$ 

Donc en posant:

$$a = 2a_7$$
;  $a' = 2a_8$ ;  $a'' = 2a_9$ ;  $b = 2a_4$ ;  $c = 2a_{19}$ ;  $d = 2a_{23}$  (87)

on obtient finalement

$$X = aA + a'A' + a''A'' + bB + cC + dD$$
(88)

avec

$$A = \frac{1}{2}(\Gamma_{23} - \Gamma_{01}P)$$

$$A' = \frac{1}{2}(\Gamma_{31} - \Gamma_{02}P)$$

$$A'' = \frac{1}{2}(\Gamma_{12} - \Gamma_{03}P)$$

$$B = \frac{1}{2}(P - \Gamma_{0123})$$

$$C = \frac{1}{2}(\Gamma_{0}Q - \Gamma_{123}R)$$

$$D = \frac{1}{2}(\Gamma_{123}Q + \Gamma_{0}R)$$
(89)

Ces six matrices vérifient exactement les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe  $SU(2) \times SU(2)$ , et le sous-groupe engendré par A, B, C, D engendre un groupe ayant l'algèbre de Lie du groupe  $U(1) \times SU(2)$  dont on sait depuis le modèle de Weinberg-Salam le lien étroit avec les interactions faibles. En effet soit

$$J = \frac{1}{2}(I_8 + \Gamma_{0123}P) \tag{90}$$

le projecteur sur la partie gauche de l'onde. On a :

$$A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = -J (91)$$

$$AB = BA \; ; \; AC = CA \; ; \; AD = DA$$
 (92)

$$BC = D = -CB$$

$$CD = B = -DC$$

$$DB = C = -BD$$
(93)

Les égalités (91) indiquent que le projecteur J joue le rôle d'unité. Les égalités (93) sont les relations des générateurs de l'algèbre de Lie de SU(2). Avec (92) A commute avec B, C, D, et est donc le générateur d'un groupe U(1), ce qui donne bien à l'algèbre engendrée par A, B, C, D exactement la structure d'algèbre de Lie de  $U(1) \times SU(2)$ . Notons qu'il n'y a pas unicité des générateurs, car on obtient aussi la structure  $U(1) \times SU(2)$  avec A, A', A'' et B, par exemple.

## Conclusion

Dans un article ultérieur sera étudié un autre sous-groupe du groupe orthogonal susceptible de correspondre aux interactions fortes. L'étude des états de couleur amènera à associer à chaque état de couleur d'un quark un lot particulier de matrices  $\Gamma_{\mu}$  vérifiant les relations d'anticommutation usuelles. Le fait que les leptons sont insensibles aux interactions fortes amènera à considérer pour ces particules une équation qui ne donne au second ordre l'équation de Klein-Gordon que si la partie droite de l'onde est identiquement nulle. On étudiera les conséquences de cette équation d'onde de fermion chiral et massif. On étudiera aussi le passage d'une génération à l'autre, et les conséquences d'une unification possible des interactions électro-faibles et fortes dans le groupe SO(8).

Un nouveau modèle physique ne s'impose que s'il permet de comprendre et d'expliquer des choses que les modèles anciens ne comprenaient pas. Le formalisme de la mécanique quantique, même s'il utilise un peu l'équation de Dirac, est essentiellement issu de l'équation de Schrödinger. Or la matière ordinaire est principalement composée d'électrons, de protons et de neutrons, donc des fermions de la seule première génération. Ils interagissent entre eux, aux faibles énergies, presqu'uniquement par l'électromagnétisme. Intervient donc dans ce cadre une seule des trois matrices P, Q, R. Si l'on n'utilise que cette unique matrice de carré −1, et si l'on tient compte des faibles vitesses, on tombe sur l'équation d'onde de Pauli qui elle-même redonne celle de Schrödinger pour une particule et un état propre du spin. Le grand avantage de l'équation de Schrödinger est qu'elle est généralisable à un système de particules ayant mis en commun leur phase électromagnétique. Il n'y a pas d'équivalent relativiste, aujourd'hui encore. Du point de vue mathématique, si l'on peut facilement multiplier deux nombres complexes, donc deux ondes de Schrödinger, on ne peut pas multiplier sans précaution deux ondes de Dirac. Ce type de difficulté, celles venant du signe de l'énergie, ont amené à la seconde quantification, dans laquelle on considère  $\psi$  comme

un opérateur. Le travail présenté ici ne se place pas dans ce cadre, et reste du domaine des ondes envisagées au départ par Louis de Broglie. Les techniques de la seconde quantification, utilisant des relations de commutation avec un i unique, ne peuvent pas être transposées sans précaution ici, puisque l'on a trois objets distincts jouant ce rôle.

Si l'on suit les idées exposées ici, et contrairement au modèle d'Hestenes dans lequel les  $\gamma_{\mu}$  sont les vecteurs d'une base variable de l'espace-temps, les  $\sigma_{j}$  ou les  $\gamma^{\mu}$  ou les  $\Gamma^{\mu}$  apparaissent comme des choses fixes, invariantes dans toute rotation de Lorentz. Face à l'espace physique isotrope des (x,y,z) jusqu'à présent à la base de toute notre représentation de l'espace, il existe un autre espace, celui des

$$x^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$
 (94)

Cet espace a autant de réalité physique que l'autre, et même plus si l'on veut bien se rappeler que ce n'est pas le groupe de Lorentz qui est représenté en mécanique quantique, mais son groupe de recouvrement universel. Or cet espace, qu'on appellera simplement l'espace matriciel, n'est pas isotrope. Cette non isotropie de l'espace matriciel a été remarquée dès le début par Louis de Broglie [17]. On peut la voir immédiatement sur l'équation de Dirac (18), qui contient  $\sigma_3$  et fait donc jouer un rôle particulier à la direction  $n^{\circ}3$ . On peut le voir dans l'étude du spin, où l'on utilise toujours les opérateurs  $J^2$  et  $J_3$ , et jamais  $J_1$  ou  $J_2$ . On peut le voir dans le calcul de l'effet Zeeman, qui ne marche que si le champ magnétique est pris dans la direction  $n^{\circ}3$ . Bien entendu il existe trois directions dans l'espace, donc il existe deux autres possibilités : on peut privilégier la direction  $n^{\circ}1$  ou la direction  $n^{\circ}2$  avec les équations (43), dont la transcription en algèbre d'espace est :

$$\nabla \phi i \sigma_1 = m \overline{\phi} + q A \phi \tag{95}$$

$$\nabla \phi i \sigma_2 = m \overline{\phi} + q A \phi \tag{96}$$

La résolution de (95) dans un potentiel coulombien utilisera  $J^2$  et  $J_1$ , celle de (96) utilisera  $J^2$  et  $J_2$ . Le calcul de l'effet Zeeman avec (95) nécessite un champ magnétique dirigé suivant l'axe  $n^{\circ}1$ , et avec (96) un champ magnétique dirigé suivant l'axe  $n^{\circ}2$ . Comme l'axe  $n^{\circ}1$ , 2 ou 3 peut, après rotation, être pointé dans n'importe quelle direction, les équations (18), (95) et (96) fournissent, dans un potentiel coulombien,

les mêmes nombres quantiques, les mêmes niveaux d'énergie, en sorte que l'on a jusqu'ici considéré ces équations comme équivalentes et non distinctes. On ne pourra pas en dire autant d'un système de particules dotées d'équations des types (18), (95) et (96), dans le même repère de coordonnées. Car alors toute rotation amenant l'axe  $n^{\circ}3$  dans la direction du champ magnétique amène les directions  $n^{\circ}1$  et  $n^{\circ}2$  dans une direction orthogonale. Une théorie relativiste des systèmes de particules reste à faire, mais on peut penser qu'elle justifiera alors et le principe de Pauli, et le fait que, dans un atome muonique, le muon ne respecte pas le principe de Pauli.

## Références

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) 117, 610 (1928)
- [2] D. Hestenes: Space-Time Algebra (Gordon & Breach, New York 1966, 1987, 1992).
- [3] D. Hestenes: Real Spinor Fields. J. Math. Phys., 8 n°4 1967
- [4] D. Hestenes: Local observables in the Dirac theory. J. Math. Phys, 14 n°7 1973)
- [5] D. Hestenes: Proper particle mechanics. J. Math. Phys., **15**  $n^{\circ}10$  1974)
- [6] D. Hestenes: Proper dynamics of a rigid point particle. J. Math. Phys., 15 n°10 1974)
- [7] D. Hestenes : Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory J. Math. Phys., **16**  $n^{\circ}3$  1975
- [8] D. Hestenes: A unified language for Mathematics and Physics & Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics JSR Chisholm & AK Common eds, (Reidel, Dordrecht, 1986)
- [9] R. Boudet : La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps. Ann. Fond. Louis de Broglie,  $13 \ n^{\circ}1$  1988.
- [10] R. Boudet: Le corpuscule de Louis de Broglie et la géométrie de l'espacetemps. (Courants, Amers, Ecueils en microphysique, Ann. Fond. Louis de Broglie, 1993)
- [11] R. Boudet: The Takabayasi moving Frame, from a Potential to the Z Boson, in "The Present Status of the Quantum Theory of the Light", S. Jeffers and J.P. Vigier eds., Kluwer Dordrecht 1995
- [12] W. E. Baylis: Eigenspinors and electron spin, in "The Theory of the Electron, Advances in Applied Clifford Algebras 7 (S), 1997
- [13] C. Daviau : Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli, Ann. Fond. Louis de Broglie,  ${\bf 22}~n^\circ$  1 1997.
- [14] C. Daviau: Dirac equation in the space Clifford algebra, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht, 1998

[15] C. Daviau : Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace, Ann. Fond. Louis de Broglie,  ${\bf 23}~n^\circ$  1 1998

- [16] C. Daviau : Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac, Ann. Fond. Louis de Broglie, 23  $n^{\circ}$  3 4, 1998
- $[17]\;$  Louis de Broglie : L'électron magnétique, Hermann, Paris 1934 page 138.

(Manuscrit reçu le 4 octobre 1999)