## *MANY-PARTICLE DYNAMICS AND KINETIC EQUATIONS*

**Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations** – C. Cercignani, V.I. Gerasimenko and D. Ya. Petrina. Volume 420 de la série *Mathematics and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

Cet ouvrage a pour objet l'étude mathématique des fondements de la Mécanique statistique classique et, plus particulièrement, de l'évolution dynamique des systèmes hors d'équilibre à la limite des "grands systèmes". La nature même de ce sujet conduit à distinguer et à développer successivement deux types principaux de problèmes, auxquels les auteurs ont apporté des contributions majeures. Le premier se rapporte à l'analyse mathématique de la dynamique des systèmes à un nombre infini de particules, qui passe par la résolution du problème de Cauchy pour les équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. (un domaine où d'importants résultats ont été démontrés par D.Ya. Petrina et V.I. Gerasimenko). Le second concerne l'application des résultats ainsi obtenus à la déduction rigoureuse d'équations cinétiques, et notamment de l'équation de Boltzmann à la limite de Boltzmann-Grad (un problème où une avancée décisive est due à C. Cercignani avec l'introduction de la notion de hiérarchie de Boltzmann).

Il convient de souligner que ce dernier thème joue en fait un rôle central dans la motivation d'un tel programme, puisque ses développements doivent permettre d'apporter une réponse rigoureuse aux difficultés bien connues de la Mécanique statistique hors d'équilibre (M.S.H.E.), qui tiennent pour l'essentiel à l'existence d'un conflit potentiel entre la réversibilité des lois mécaniques à l'échelle microscopique et l'irréversibilité de fait des phénomènes macroscopiques (flèche du temps). On sait que ce sont ces difficultés et les paradoxes (Loschmidt, Zermelo) qui y sont liés, qui ont conduit Boltzmann à proposer, pour sa célèbre équation de la théorie cinétique des gaz, une interprétation statistique selon laquelle cette équation devait être conçue comme décrivant l'évolution de l'état le plus probable du système.

Dans ces conditions, le comportement au cours du temps d'un système macroscopique n'est plus déterminé par les seules lois de la mécanique, mais il dépend aussi de son état statistique initial et surtout de ses propriétés à la limite des "grands systèmes" (pour lesquels le nombre de degrés de liberté devient infiniment grand). C'est ainsi que l'on peut ramener l'étude des fondements de la Mécanique statistique à celle du comportement asymptotique des ensembles de systèmes mécaniques à certaines limites physiquement pertinentes.

Si la mise en œuvre de ces idées a trouvé assez naturellement une solution satisfaisante dans le cas des systèmes à l'équilibre, avec l'introduction de la notion de limite thermodynamique, il n'en fut pas de même pour les systèmes hors d'équilibre où il était plus difficile de concevoir quels types de processus limites devaient être utilisés afin de rendre compte de manière significative des conditions de l'évolution microscopique, et de surmonter les difficultés propres à la M.S.H.E.. C'est pourquoi il a fallu attendre les travaux de pionnier de H. Grad (1949, 1958) sur l'importance de la limite dite de "Boltzmann-Grad" dans l'interprétation de l'équation de Boltzmann, puis ceux de C. Cercignani (1972) relatifs à la hiérarchie de Boltzmann, avant que puisse être démontré par O.E. Lanford (1975) le premier résultat rigoureux concernant la déduction de cette même équation. Il apparut ainsi que les problèmes posés par l'étude du statut de la M.S.H.E. conduisaient à considérer des suites infinies de fonctions de distribution, satisfaisant à une hiérarchie B.B.G.K.Y. infinie, et à étudier leur comportement asymptotique pour certaines limites caractéristiques de l'état microscopique du système.

Ce sont précisément les aspects mathématiques de ce programme qui sont traités dans le présent ouvrage, pour des systèmes de particules interagissant par paires suivant un potentiel à "cœur dur". Mis à part le chapitre I consacré à la définition précise de la dynamique d'un tel système, il y a lieu de distinguer dans les autres chapitres deux grandes parties : l'une, qui porte sur l'étude du problème de Cauchy relatif à la hiérarchie B.B.G.K.Y, d'abord pour un système à un nombre fini de particules (chap. II), puis pour un système à un nombre infini de particules à la limite thermodynamique (chap. III) ; l'autre, où sont traités les problèmes concernant la déduction des équations cinétiques, celle de Boltzmann à la limite de Boltzmann-Grad (chap. IV), et celles regroupées sous le nom d'équations cinétiques "généralisées" (chap. V). Après ce bref exposé des motivations et du contenu de cet ouvrage, nous pouvons maintenant en venir à un examen plus détaillé.

Dans le chapitre I se trouve présenté l'essentiel de l'outillage mathématique qui est utilisé dans ce livre. Tout repose sur la dynamique hamiltonienne d'un système de N particules à "cœur dur", pour lequel la définition des trajectoires de phase n'est pas triviale en raison du caractère singulier de ce type d'interaction. Au terme d'une analyse rigoureuse, les auteurs montrent que ces trajectoires peuvent être construites de proche en proche à l'aide des seules "collisions" binaires entre les particules, qu'elles sont une solution unique et globale (dans le temps) des équations de Hamilton (Théor. 1.2.1) et qu'elles définissent ainsi un flot hamiltonien sur un espace de phases approprié que nous noterons $\Gamma^N (\equiv \mathbb{R}^{\nu N} \times (\mathbb{R}^{\nu N}/W^N)\ , \nu \geq 1)$.

Ceci étant acquis, le formalisme habituel de la Mécanique statistique peut alors se développer en introduisant successivement :

1) L'opérateur d'évolution $S^N(t)$ d'un système à N particules agissant sur l'espace de Banach $L^1(\Gamma^N)$ des fonctions de phase sommables et symétriques par rapport aux permutations entre les particules ; en vertu de ses propriétés de groupe isométrique et de continuité forte, cet opérateur admet un générateur infinitésimal (donné par le crochet de Poisson, cf. Appendices I et II) qui permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Liouville d'un tel système (Théor.1.3.2.).

2) Les ensembles définissant l'état statistique du système ; en vue de préparer le passage au cas limite des systèmes infinis, il est judicieux de considérer des systèmes à un nombre de particules fini mais non fixé, représentés par des "grands ensembles" dont l'état est décrit par une suite infinie $D(t)$ de fonctions de distribution ; d'où l'introduction d'un opérateur d'évolution généralisé S (t) (défini comme la somme directe d'opérateurs $S^n(t)$), qui agit sur l'espace de Banach $L^1(\equiv \oplus_{n=0}^{\infty} L^1(\Gamma^n))$ des suites infinies de fonctions sommables et symétriques, et qui jouit des mêmes propriétés que $S^N(t)$.

3) La hiérarchie des équations B.B.G.K.Y. relative à ces grands ensembles ; elle gouverne l'évolution de la suite infinie $F(t)$ des fonctions de distribution réduites qui sont déduites de $D(t)$ par l'application d'un certain opérateur, noté $\int dx$, borné et de norme unité, agissant dans $L^1$ (et dont la définition rappelle celle de l'opérateur d'annihilation de la théorie quantique des champs) ; la hiérarchie ainsi obtenue consiste en une chaîne infinie d'équations couplées qui peuvent se mettre sous la forme d'une seule équation opératorielle abstraite portant sur la suite $F(t)$, ou s'écrire en termes de ses composantes successives $F_s(t)$

suivant des expressions qui sont explicitées pour le cas d'un potentiel d'interaction à "cœur dur".

Enfin, l'application de ce formalisme général au cas particulier des systèmes à l'équilibre permet aux auteurs de montrer comment les états de Gibbs des systèmes à un nombre infini de particules peuvent être construits à partir de ceux relatifs à un système fini contenu dans un domaine borné $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$, en mettant en œuvre la méthode dite de la limite thermodynamique. A cet effet, on doit recourir à un nouvel outil mathématique : c'est l'espace de Banach linéaire $L^\infty$ des suites de fonctions continues, symétriques et bornées relativement à une certaine norme, sur lequel sont définies les fonctions de distribution réduites $F_s$ décrivant les états de Gibbs d'un système infini. Celles-ci sont des solutions de l'équation de Kirkwood-Salsburg et elles sont obtenues en prenant la limite thermodynamique des fonctions de distribution correspondantes pour un système fini, appartenant à l'espace $L^1(\Lambda) \cap L^\infty$. Ce chapitre s'achève avec la définition, pour un système infini, d'états proches de l'équilibre représentés par une certaine classe de fonctions de distribution d'équilibre localement perturbées ; nous verrons au chapitre III qu'il s'avère utile de prendre de telles fonctions comme conditions initiales dans le problème de Cauchy associé à la hiérarchie B.B.G.K.Y.. Notons encore que se trouve également présentée l'adaptation de l'ensemble de ces méthodes au cas de systèmes unidimensionnels de particules interagissant avec leurs plus proches voisines suivant le même type de potentiel (systèmes "non-symétriques", tel que celui constitué de particules "hardrod").

Ayant ainsi bien précisé le cadre conceptuel de cet ouvrage, les auteurs sont en mesure d'aborder le premier de leurs deux grands thèmes, à savoir la résolution du problème aux valeurs initiales (problème de Cauchy) pour les équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y.. Dans le chapitre II, ce problème est traité dans le cas des systèmes à un nombre moyen $\langle N \rangle$ fini de particules, pour lequel sont démontrés des résultats originaux (dus notamment à D.Ya. Petrina et V.I. Gerasimenko) concernant l'existence des solutions de la hiérarchie pour une large classe de potentiels d'interaction singuliers (à "cœur dur") et pour des conditions initiales appartenant à $L^1$. La méthode suivie est de nature fonctionnelle et repose sur la définition du groupe des opérateurs d'évolution $U(t)$ associés à la hiérarchie B.B.G.K.Y., bornés dans $L^1$ pour $t \in \mathbb{R}^1$ (Théor. 2.2.1.) ; ces opérateurs permettent d'écrire les équations de la hiérarchie sous la forme d'une équation d'évolution abstraite dont le second membre est

défini par la générateur infinitésimal du groupe. On en déduit directement l'existence et l'unicité de la solution $F(t) = U(t)F^0$ au problème de Cauchy relatif à la hiérarchie B.B.G.K.Y., pour des conditions initiales $F^0(\equiv F(0)) \in L^1_0$, où $L^1_0 \subset L^1$ est le sous-espace des fonctions continment différentiables introduit au chapitre I (Théor. 2.3.1.) ; d'après sa définition même, l'opérateur d'évolution peut alors s'exprimer au moyen de séries fonctionnelles dont les termes sont définis à partir des composantes successives $F^0_s$ de la condition initiale $F^0$. Notons également que des résultats analogues sont démontrés pour des systèmes unidimensionnels de particules interagissant avec leurs plus proches voisines (en particulier, cas du système de particules "hard rod").

Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, les auteurs présentent une autre méthode de construction de l'opérateur d'évolution $U(t)$, qui s'est révélée très utile pour l'étude des sytèmes infinis. Elle consiste à représenter formellement l'opérateur $U(t)$ par une série d'itérations qui sont obtenues en écrivant la hiérarchie sous la forme d'une équation intégrale ; on aboutit ainsi à une autre expression de la solution $F(t)$, dont on démontre l'équivalence formelle avec la précédente en s'appuyant sur la définition des opérateurs $S(t)$ et $\int dx$. Après avoir établi la forme explicite des termes successifs de ces séries pour le modèle des "sphères dures", et prouvé qu'ils sont bien définis sur l'espace des configurations admissibles (Théor. 2.5.1.), les auteurs montrent que les séries d'itérations ainsi obtenues convergent uniformément sur un certain sous-espace $X_{\xi,\beta}$ de $L^1$ pour $t \in \mathbb{R}^1$ (Proposition 2.5.1.), ce qui assure l'existence d'une solution globale au problème de Cauchy pour la hiérarchie B.B.G.K.Y.

Ce sont les problèmes posés par l'extension de ces résultats au cas des systèmes infinis qui font l'objet du chapitre III. Dans l'esprit de la démarche suivie au chapitre précédent, on doit dans ce cas chercher à construire les solutions au problème de Cauchy pour la hiérarchie B.B.G.K.Y. dans un espace fonctionnel différent de $L^1$, qui contienne les suites de fonctions de distribution décrivant les états des systèmes infinis. L'espace $L^\infty$ (défini au chapitre I dans le cas de l'équilibre) satisfait à de telles conditions ; on est ainsi conduit à établir l'existence des solutions en question dans l'espace $L^\infty$, ce qui implique d'étendre la définition de l'opérateur d'évolution $U(t)$ de l'espace $L^1$ à l'espace $L^\infty$ ou à ses sous-espaces. L'opérateur $U(t)$ n'ayant pas été défini sur $L^\infty$, on se trouve confronté au problème technique de donner un sens aux séries fonctionnelles ou aux séries itératives du chapitre précédent pour des

conditions initiales appartenant à $L^\infty$. Ici encore, les auteurs ont apporté d'importantes contributions originales ; ils commencent par traiter le cas où la solution $F(t) = U(t)F^0$ du problème de Cauchy pour la hiérarchie B.B.G.K.Y.est représentée par des séries d'itérations, pour lesquelles on dispose déjà des résultats du théorème 2.5.1. En démontrant, pour le modèle des "sphères dures", la convergence uniforme de ces séries sur un sous-espace $L^{\infty,0}$ de $L^\infty$ et pour un certain intervalle de temps fini, on obtient ainsi un premier théorème local établissant l'existence et l'unicité de $F(t)$, comme solution faible de la hiérarchie (Théor. 3.2.1.). On en déduit l'existence de la limite thermodynamique pour les solutions du problème de Cauchy relatif à la hiérarchie B.B.G.K.Y. d'un système fini, en prenant pour ce système des conditions initiales qui convergent uniformément (au sens de cette limite) vers une distribution limite $F^0 \in L^{\infty,0}$ (Théor. 3.2.3.). Les auteurs montrent ensuite comment l'on peut prolonger dans le temps ces résultats locaux et aboutir ainsi à des résultats globaux (valables pour $t \in \mathbb{R}^1$), si l'on se restreint à des conditions initiales appartenant à la classe des fonctions de distribution d'équilibre localement perturbées définie au chapitre I (Théor. 3.3.1.). De plus, en appliquant ces méthodes à la hiérarchie B.B.G.K.Y. d'un système unidimensionnel de "sphères dures", ils sont en mesure de prouver, dans ce cas particulier, des résultats globaux concernant les solutions au problème de Cauchy pour cette hiérarchie (Théor. 3.3.2.) et l'existence de la limite thermodynamique pour de tels systèmes (Théor. 3.3.3.), qui sont valables pour des conditions initiales arbitraires $F^0 \in L^{\infty,0}$.

Si l'on cherche ensuite à obtenir des résultats analogues dans le cas où les solutions $F(t)$ sont représentées par les séries fonctionnelles du chapitre II, on rencontre des difficultés techniques pour prouver l'existence de chacun des termes de ces séries. On les surmonte en remarquant que les intégrands qui figurent dans ces termes ne sont en fait différents de zéro que sur une certaine région bornée de l'espace de configuration, dite "région d'interaction". C'est ce qu'établissent les auteurs dans le cas d'un système unidimensionnel, au terme d'une analyse fine de la dynamique des particules pour une large classe de potentiels d'interaction. On obtient ainsi, pour toute condition initiale $F^0 \in L^{\infty,0}$, un théorème local de convergence uniforme des séries fonctionnelles (Théor. 3.4.1.), dont la somme $F(t)$ est une solution faible unique au problème de Cauchy pour la hiérarchie à une dimension (Théor. 3.4.2.). Après avoir signalé que ces résultats peuvent s'étendre à des systèmes à deux et trois dimensions pour une classe plus restreinte de conditions initiales, les auteurs

montrent en outre qu'ils permettent, comme précédemment, de prouver l'existence de la limite thermodynamique des solutions au problème de Cauchy pour la hiérarchie (Théor. 3.4.3.) et d'aboutir à un théorème global d'existence de ces solutions pour des états initiaux $F^0$ "proches" de l'équilibre (Théor. 3.4.4.).

Nous en venons maintenant au second grand thème de cet ouvrage, développé dans les deux derniers chapitres, qui porte sur la déduction rigoureuse d'équations cinétiques à partir du formalisme général de la hiérarchie B.B.G.K.Y.. Le chapitre IV, où sont traités les problèmes propres à l'équation cinétique de Boltzmann pour le modèle des "sphères dures", tient une place centrale dans cet exposé puisque la détermination du statut de cette équation apporte des éléments essentiels pour l'élaboration des fondements de la M.S.H.E. et pour la compréhension du problème de l'irréversibilité. Après avoir rappelé les points forts d'une démarche maintenant bien établie - nécessité du passage à la limite de Boltzmann-Grad (qui conduit à définir la limite $f(t)$ des suites de fonctions de distribution $F(t)$), rôle capital de la "hiérarchie de Boltzmann" pour $f(t)$ dont la propriété caractéristique est de conserver le "chaos moléculaire" - les auteurs montrent que le problème en question se ramène à l'étude du comportement asymptotique (à la limite considérée) des solutions au problème de Cauchy pour la hiérarchie B.B.G.K.Y.. Pour ce faire, il faut procéder en deux étapes : 1) Construire les solutions $f(t)$ au problème de Cauchy pour la hiérarchie de Boltzmann ; ce premier point ne présente pas de difficultés nouvelles et l'application des résultats obtenus au chapitre III par la méthode des séries d'itérations permet d'aboutir à un théorème local d'existence et d'unicité de ces solutions pour des conditions initiales $f^0 \in L^\infty$ (Théor. 4.3.1.). 2) Préciser en quel sens les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. d'un système fini convergent, à la limite de Boltzmann-Grad, vers celle de la hiérarchie de Boltzmann ; ce qui implique la démonstration de la convergence terme à terme des séries d'itérations définissant les solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. vers celles relatives à la solution $f(t)$ de la hiérarchie de Boltzmann. C'est l'objet du théorème central (4.3.2.), dont la démonstration rencontre des difficultées particulières liées au fait que les intégrands dans chacun des termes des séries d'itérations, ne convergent pas uniformément sur tout le domaine d'intégration. En remarquant que ce problème n'a pas reçu jusqu'à présent toute l'attention voulue, les auteurs en présentent une analyse complète, telle qu'elle résulte de leurs propres travaux. Celle-ci est fondée sur la mise en œuvre d'un procédé dit de "balayage" ("sweeping up") dans l'espace des phases, qui permet de déterminer pour quels

ensembles de conditions initiales l'opérateur d'évolution d'un système de sphères dures en interaction coïncide avec celui correspondant à un système de particules ponctuelles libres (Lemme 4.4.2.). Grâce à une estimation du volume de ces ensembles, et après une analyse fonctionnelle détaillée pour toutes les configurations d'interaction possibles, on peut alors prouver que les contributions associées aux ensembles "dangereux" (pour lesquels une telle coïncidence n'a pas lieu) tendent vers zéro à la limite de Boltzmann-Grad ; d'où résultent directement la propriété de convergence uniforme au sens faible pour les intégrands des séries d'itérations (Lemme 4.4.4.) et le théorème central (4.3.2.). Soulignons enfin que ce théorème local, valable pour tout $f^0 \in L^{\infty,0}$, peut être étendu à tout $t \in \mathbb{R}^1$ si l'on se restreint à des conditions initiales appartenant au sous-espace $X_{\xi,\beta} \subset L^1$ considéré dans la proposition (2.5.1.) du chapitre II.

Afin de donner un exemple significatif de solution explicite au problème de la construction des états d'un système à la limite de Boltzmann-Grad, les auteurs considèrent ce problème pour un système infini de "sphères dures" à l'équilibre. Dans ce cas, la définition des états d'équilibre résulte de l'étude du comportement asymptotique (à la limite considérée) des fonctions de distribution de Gibbs du système. Ce sujet est d'abord traité avec le formalisme de l'ensemble grand-canonique et de l'équation de Kirkwood-Salsburg (présenté au chapitre I) ; on établit ainsi que les fonctions de distribution de Gibbs d'un tel système tendent à la limite de Boltzmann-Grad vers la suite $F^0$ des fonctions de distribution maxwelliennes (Théor. 4.2.1.). Ce même problème est ensuite reconsidéré dans le cadre de l'ensemble canonique d'un système de N sphères dures, ce qui conduit à examiner le comportement asymptotique du système lorsque l'on passe simultanément à la limite thermodynamique et à celle de Boltzmann-Grad. On doit dans ce cas procéder à une analyse détaillée de l'action combinée de ces deux processus, pour différentes normalisations des fonctions de distribution, dont les conclusions tiennent, pour l'essentiel, dans le résultat suivant : pour obtenir des fonctions de distribution limites différentes de zéro, il faut nécessairement que la densité $n(= N/v(\lambda))$ croisse indéfiniment et que le diamètre des particules a tende simultanément vers zéro, de telle manière que le produit $na^2$ (qui est inversement proportionnel au libre parcours moyen) reste fini et constant (Théor. 4.5.4.).

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, les auteurs abordent le problème général de la déduction rigoureuse d'équations cinétiques

à partir de la hiérarchie B.B.G.K.Y.. On sait que la recherche de ces équations est fondée sur l'hypothèse qu'il existe des situations physiques telles que les états du système (représentés par l'ensemble des fonctions de distribution $F_s(t)$ à s particules) ne dépendent du temps que par l'intermédiaire de la fonction de distribution à une particule, $F_1(t)$, celle-ci satisfaisant elle-même à une certaine équation d'évolution dite "cinétique". Les analyses qualitatives des chapitres II et III permettent aux auteurs de préciser pour quelles caractéristiques du système (existence d'échelles de temps distinctes) et pour quelles propriétés des conditions initiales (atténuation des corrélations initiales et chaos moléculaire) une telle réduction de la description devient possible. Comme il est bien connu, ce programme a été réalisé par deux voies différentes, qui correspondent essentiellement aux deux méthodes élaborées au chapitre II pour la construction des solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y.. La première, qui repose sur la représentation de la solution par une série d'itérations, a été développée par Bogolioubov et fait jouer un rôle central à la distinction entre les diverses échelles de temps du système ; la seconde, dans laquelle la solution s'exprime au moyen d'une série fonctionnelle, a été mise en œuvre dans les travaux de Cohen, Green etc., et fait appel à des développements en "essaims" (clusters) des fonctions de distribution hors d'équilibre. En résumant, dans un bref exposé, les principes directeurs de ces deux méthodes, les auteurs montrent comment chacune d'entre elles conduit à une équation de Boltzmann "généralisée", qui est irréversible et prend la forme d'un développement en puissances de la densité du système ; il convient de rappeler à ce propos que l'irréversibilité est ici introduite par l'hypothèse de l'"atténuation des corrélations" qui est invoquée dans ces deux méthodes, mais à des stades différents de leur développement. Les auteurs établissent en outre l'identité formelle, terme à terme, des deux équations ainsi obtenues, par un raisonnement analogue en tous points à celui utilisé au chapitre II pour prouver l'équivalence des deux méthodes fonctionnelle et itérative. Ils soulignent aussi que ces méthodes n'ont pas reçu jusqu'à présent de justification rigoureuse, et qu'elles peuvent seulement aboutir à des résultats locaux (dans le temps) dans le cas de conditions initiales générales telles que $F_1(0) \in L^\infty$.

C'est pourquoi les auteurs proposent, dans la dernière section de ce chapitre, une méthode permettant de construire une équation cinétique généralisée, valable pour $t \in \mathbb{R}^1$, pour des conditions initiales satisfaisant à la propriété de chaos moléculaire (factorisation). Ils s'appuient à cet effet sur les résultats du chapitre II, d'après lesquels il existe une solution

globale $F_s(t)$ au problème de Cauchy pour la hiérarchie B.B.G.K.Y., pour des conditions initiales $F_s(0)$ convenables, appartenant à l'espace de Banach $L^1$ des fonctions sommables ; dans le cas où les $F_s(0)$ possèdent la propriété de factorisation, cette solution s'exprime au moyen d'une série fonctionnelle dont les termes dépendent des produits de $F_1(0)$, avec $F_1(0) \in L^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$. C'est ce dernier résultat qui permet d'aboutir à l'équation recherchée par un procédé usuel. On remarque d'abord que la solution ainsi obtenue fournit, pour s=1, une relation fonctionnelle entre $F_1(t)$ et $F_1(0)$ dont l'inversion permet d'exprimer $F_1(0)$ à partir de $F_1(t)$ au moyen d'une certaine équation non linéaire. On montre ensuite que cette équation admet, pour des densités suffisamment faibles, une solution unique sur un certain domaine de l'espace $L^1(R\nu x R\nu)$, et que cette solution est définie par une série fonctionnelle dont les termes dépendent des $F_1(t)$ (Théor. 5.4.1.). On en déduit alors que les solutions $F_s(t)$ au problème de Cauchy considéré deviennent des fonctionnelles, $F_s(F_1(t))$, de la fonction de distribution à une particule $F_1(t)$, et que ces fonctionnelles s'expriment au moyen de développements en puissances de la densité du système. On remarque enfin que ces fonctionnelles ne satisfont aux équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. que si $F_1(t)$ est elle-même solution d'une certaine équation cinétique "généralisée" dont la forme est déterminée par la fonctionnelle $F_2(F_1(t))$. Comme l'on est assuré de l'existence d'une solution unique dans $L^1$ au problème de Cauchy pour la hiérarchie, on est ainsi en mesure d'établir que cette équation cinétique admet une solution forte et unique, globale dans le temps, sous les conditions de validité du théorème 5.4.1. (Théor. 5.4.2.). Par sa construction même, cette équation représente la forme la plus générale de toutes les équations cinétiques possibles pour des conditions initiales du type "chaos moléculaire" ; comme elle est équivalente à la hiérarchie B.B.G.K.Y., elle est donc réversible. Pour en déduire une équation cinétique irréversible, il est alors nécessaire de se référer à l'existence d'échelles de temps (ou d'espace) caractéristiques du "niveau cinétique", ce dernier résultant du comportement asymptotique du système à certaines limites significatives.

En conclusion, on trouve dans le présent ouvrage un exposé complet et bien structuré des méthodes mathématiques qui doivent être mises en œuvre pour décrire l'évolution des systèmes mécaniques à un très grand nombre de particules ; comme nous l'avons déjà signalé, cet exposé bénéficie de plusieurs avancées décisives dues aux auteurs de ce livre, notamment à ceux de l'école russe. On dispose ainsi des outils nécessaires pour

traiter, dans un esprit de rigueur, tous les problèmes de Mécanique statistique qui mettent en jeu la construction formelle des solutions aux équations de la hiérarchie B.B.G.K.Y. et l'analyse de leur comportement asymptotique à certaines limites. Cette exigence de rigueur, qui est présente tout au long de ce livre, ne doit pas être perçue ici comme étant cultivée "pour elle-même", mais appréciée pour ce qu'elle apporte de constructif à l'élaboration des concepts et à l'approfondissement de leur contenu. Il en est ainsi dès le premier chapitre, où la définition méthodique de l'espace des phases et des trajectoires de phase pour des systèmes avec des potentiels à "cœur dur" permet de donner un sens précis à la notion de dynamique hamiltonienne pour cette interaction singulière. De même, dans le chapitre IV, l'analyse détaillée du processus de "balayage" dans l'espace des phases et de son rôle déterminant dans la démonstration du théorème central (4.3.2.), fournit un exemple type de la marche à suivre pour élucider les mécanismes qui président à l'émergence de l'irréversibilité dans des systèmes hamiltoniens. De fait, si le choix du "bon" passage à la limite pour décrire une certaine situation macroscopique est d'abord une affaire de physique, il ne peut cependant trouver sa justification qu'en se référant aux propriétés mathématiques des solutions de la hiérarchie B.B.G.K.Y. et à leur comportement asymptotique à des limites physiquement pertinentes. C'est pourquoi il me semble que cet ouvrage est et restera un outil et une référence indispensables pour les chercheurs qui travaillent à l'élaboration d'un statut rigoureux pour la M.S.H.E. et plus généralement à tous ceux qu'intéresse le fascinant problème de la compatibilité entre l'irréversibilité des phénomènes macroscopiques et la description atomistique, mécanique et réversible, des systèmes physiques.

R. Jancel

*Université Paris 7,*
*Place Jussieu,*
*75005 Paris, France*