

## L'état quantique et les doublets

XAVIER OUDET

Laboratoire de Magnétisme et d'Optique de l'Université de Versailles, C.N.R.S.,  
45 Avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles, France.

*C'est la dissymétrie qui crée le phénomène.  
Pierre Curie [1]*

RÉSUMÉ. L'étude de l'état quantique est réexaminée pour montrer la possibilité d'interpréter l'ensemble des états quantiques dans le cadre du modèle de Sommerfeld. En s'appuyant sur la relativité du mouvement qui impose que les causes qui l'engendrent soient les mêmes dans l'espace de l'électron que celui du proton, les variations de la masse de l'électron sont supposées entraîner les variations de sa vitesse. Il en résulte des variations de la vitesse radiale mais également de la vitesse angulaire indépendamment de la quantification angulaire. C'est la possibilité de vitesse angulaire variable ou constante qui est à l'origine des doublets relativistes. L'interaction est attribuée à des échanges de matière entre l'électron et le potentiel. Cette conception du mouvement conduit à considérer la rotation comme le résultat de deux mouvements de rotation orthogonaux. De ce fait, seule la moitié de l'action associée à la rotation conduit à un moment magnétique observable. Cette propriété permet de comprendre la quantification spatiale pour l'ensemble des états quantique. Il apparaît que la notion de spin échappe à la théorie de Sommerfeld tout comme à celle de Dirac.

*ABSTRACT. The study of the quantum state is revisited to put in view the possibility to interpret all the quantum state in the framework of Sommerfeld model. Taking support of the relativity of the motion which impose to have the same causes responsible of it in the space of the electron than in that of the proton, the variations of the mass of the electron are supposed to be responsible of the variations of the speed. As a result there are variations of the radial but also of the angular speed independently of the angular quantification. It is the possibility of constant or variable angular speed which originates the relativist doublets. The interaction*

*is attributed to exchanges of matter between the electron and the potential. This approach of the motion leads to regard the rotation as the result of two orthogonal motions of rotation. As a result only half of the action associated with rotation leads to an observable magnetic moment. This property allows to understand the spatial quantification for all the quantum states. It Appears that the spin notion escapes to Sommerfeld's theory as well to Dirac's theory. (An English translation is available on request.)*

## 1 INTRODUCTION

L'étude expérimentale des raies spectrales émises par un atome révèle qu'elles se classent en séries et que les raies de certaines de ces séries sont doubles, appelées les doublets réguliers. La séparation des raies doubles est très faible. L'exemple classique est celui de la raie D du sodium qui est double, les longueurs d'onde respectives étant  $\lambda_1 = 5890\text{\AA}$  et  $\lambda_2 = 5896\text{\AA}$ . L'ensemble des raies ainsi observées pour différents atomes forme la base expérimentale de l'état quantique. Pour interpréter les raies spectrales Sommerfeld a été amené à quantifier dans l'étude du mouvement de l'électron autour du proton l'action angulaire et l'action radiale [2]. Cette manière de faire aboutie à un grand nombre de résultats remarquables mais laisse sans réponse l'origine des doublets réguliers et l'existence des nombres quantiques demi-entiers [3]. Seule jusqu'ici l'introduction des fonctions d'onde et le modèle théorique de Dirac ont permis de retrouver l'ensemble des états quantiques avec leurs nombres demi-entiers et les niveaux d'énergie associés aux doublets réguliers. Toutefois, il reste dans l'état actuel des recherches un fait très surprenant : ces deux théories aboutissent à la même expression de l'énergie des niveaux des différents états quantiques alors que l'interprétation des doublets réguliers échappe à l'approche corpusculaire de Sommerfeld.

Mis à part ces difficultés, le modèle de Sommerfeld avec la notion de trajectoire possède une force explicative remarquable que ne possède pas celui de Dirac. Par exemple il permet de comprendre l'attraction entre atomes dont les électrons les plus externes sont dans un état "s" [4]. La trajectoire donne en effet un caractère dipolaire électrique aux atomes et permet par là de comprendre par exemple l'attraction entre atomes alcalins. Rappelons également que la trajectoire de l'électron nous a permis de proposer une interprétation du mécanisme de la conductibilité et de la supraconductivité dans les oxydes supraconducteurs [5]. Par ailleurs l'hypothèse d'une trajectoire est suggérée par les propriétés

magnétiques de la matière : en effet le magnétisme est avant tout le reflet du mouvement des charges. Ces différents aspects suggèrent qu'il existe un rapprochement entre les modèles de Sommerfeld et de Dirac et qu'il est possible de considérer la trajectoire de l'électron dans ses différents états quantiques. Nous nous plaçons donc dans le cadre de cette hypothèse.

Pour rapprocher la théorie de Sommerfeld de celle Dirac il y a lieu de remarquer que dans l'approche de Dirac les doublets sont liés à deux groupes d'états très proches qui diffèrent par des corrections relativistes de la masse de l'électron. Or ce qui est remarquable c'est que ces deux groupes d'états ont des fonctions d'onde radiales très proches [6], ce qui dans l'approche de Sommerfeld signifie qu'ils gravitent sur des ellipses d'excentricité très voisine. En particulier sur des cercles de rayons pratiquement identiques pour les états circulaires. Comme les variations de masse sont liées à des variations de vitesses, cela signifie qu'il peut exister des variations de masse autres que celles liées aux variations de vitesse radiale. Ce résultat conduit à reconsidérer l'origine du mouvement orbital. Dans l'étude des phénomènes les causes des lois physiques doivent être indépendantes du lieu de l'observation. Plaçons-nous alors dans l'espace de l'électron supposé très petit, et demandons-nous qu'elles sont les variables susceptibles de déterminer la quantification du système électron-proton. Lorsque la vitesse radiale de l'électron varie, dans l'espace de l'électron, seule des variations d'énergie donc de sa masse peuvent lui être associée. Il y a donc lieu de considérer que ce sont les variations de la masse de l'électron qui sont à l'origine des variations de sa vitesse radiale. Il en résulte que l'interaction entre le potentiel et l'électron est liée à des échanges de masse entre eux qui conduisent à un mouvement à masse fixe ou variable. Cette conception de l'interaction nous conduit à considérer le potentiel et l'électron lui-même comme de la matière fluide. Supposons alors que la densité de masse qui décrit l'interaction est inversement proportionnelle à la distance qui sépare les centres de gravité de l'électron et du proton et proportionnel à la charge du proton. Les caractéristiques classiques du potentiel sont conservées mais se trouvent élargies. En effet les mouvements à masse variables ne sont pas liés aux seules variations de la distance radiale. Nous verrons que cette conception éclaire la compréhension de l'état quantique.

En étudiant la notion de spin nous avons déjà utilisé des échanges de matière entre le potentiel et l'électron pour interpréter la fonction

d'onde. Celle-ci est supposée déterminer par échange de matière, l'action mécanique qui pilote l'électron le long sa trajectoire sur un élément de longueur et de temps  $d\ell$ ,  $dt$  [6,7]. Les échanges de matière déterminent donc la quantité d'énergie, de masse et de mouvement qui sont échangées entre le potentiel électrique et l'électron, considéré comme une masse fluide [6,7]. Ce sont ces échanges de matière qui déterminent les déplacements de l'électron par rapport au proton et par suite la trajectoire. Cette approche du mouvement fait apparaître une autre difficulté dans la description classique de la rotation orbitale. En effet si le mouvement de rotation orbitale n'a que deux degrés de liberté il n'en reste pas moins que les échanges qui le génèrent ont lieu dans les trois directions de l'espace. C'est cet aspect des phénomènes qui permet de comprendre les moments cinétiques demi entiers.

Cette conception du mouvement revient à donner à l'action mécanique un rôle fondamental. Ce rôle est naturel puisque toute quantité de mouvement et toute quantité d'énergie cinétique sont toujours liées à un déplacement spatial et un intervalle de temps. Ce fut en fait l'idée de Sommerfeld [2] pour étendre l'hypothèse de Bohr sur le moment cinétique [8] à des orbites elliptiques. Chez Louis de Broglie l'action joue également un rôle fondamental : c'est guidé par l'idée d'une identité profonde entre le principe de moindre action et celui de Fermat qu'il a été conduit à proposer l'hypothèse d'une longueur d'onde associée à la quantité de mouvement de l'électron par le quantum d'action "h" [9]. Ce fut également l'idée de Schrödinger qui construit l'équation différentielle dont la fonction d'onde est solution en introduisant une vitesse de propagation des surfaces d'action constante [10]. Nous nous proposons dans ce travail de montrer comment cette conception de l'action par échange de matière entre le potentiel et l'électron permet de comprendre l'existence de moments cinétiques demi-entiers et de retrouver l'ensemble des niveaux d'énergie dans l'approche de Sommerfeld.

## 2 L'ACTION DE ROTATION ET LA QUANTIFICATION SPATIALE

Nous souhaitons montrer comment l'action mécanique permet de proposer un lien entre la mécanique corpusculaire quantique et celle introduite avec les opérateurs agissants sur la fonction d'onde. En mécanique classique l'action est le produit sur un élément de temps et d'espace  $dt, d\ell$ , soit de la quantité de mouvement par l'élément de longueur  $d\ell$ , soit de l'énergie par l'élément de temps. Dans la théorie

de Dirac les opérateurs agissent sur la fonction d'onde par dérivation du premier ordre par rapport aux variables d'espace et de temps. Si ces opérateurs agissent sur une fonction représentative de l'action ils donnent accès aux différentes composantes de la quantité de mouvement et de l'énergie. Prenons alors une position différente de l'interprétation classique et supposons que la fonction représentative de l'action soit justement la fonction d'onde. Nous supposons de plus que l'action engendrée par la fonction d'onde prend place par échanges de matière entre le potentiel électrique et l'électron. La quantification de la fonction d'onde est alors celle de l'action associée sur une période aux différents degrés de liberté. Cette hypothèse conduit à supposer que la charge de l'électron et le potentiel sont constitués d'éléments extrêmement petit comparés aux dimensions de l'électron, ayant une masse et que nous appelons grains. Nous supposons ainsi que les échanges de matières sont dus à des échanges de grains entre l'électron et le potentiel électrique.

Pour décrire le mouvement de l'électron autour du proton nous considérons un référentiel atomique  $Ra$  considéré comme fixe, formé d'un système d'axes orthogonaux, le centre de gravité  $P$  du proton étant à l'origine. Ce centre  $P$  est également le centre du potentiel qui agit sur l'électron. L'intensité du potentiel en un point  $A$  est inversement proportionnelle à la distance  $PA$  qui le sépare du centre  $P$ . La densité de matière qui permet de décrire le potentiel est par suite elle-même inversement proportionnelle à cette distance. Soit alors  $\gamma$  le centre de gravité de l'électron. Comme pour le potentiel nous supposons que dans l'espace de l'électron, la densité de matière qui permet de décrire la charge de l'électron est inversement proportionnelle à la distance au centre  $\gamma$  de gravité de l'électron. La surface qui délimite dans l'espace du proton le volume de l'électron est par suite celle qui correspond au minimum de densité. C'est au travers de cette surface que les échanges de matière déterminent l'action et la trajectoire.

## 2.1 L'action de rotation

Considérons alors le mouvement de l'électron dans le référentiel atomique. Pour décrire le mouvement le choix du système de coordonnées est arbitraire. Tant que nous considérons uniquement le potentiel central comme source des interactions il n'y a aucune dissymétrie qui permette de privilégier un système de coordonnées plus qu'un autre. Considérons les états "1s" qui sont les plus profonds et correspondent à un seul quantum d'action  $h$ . Dans le modèle de Sommerfeld le mouvement des états

“1s” est circulaire et il y a seulement deux degrés de liberté qui soient indépendants. Par contre les échanges de matière qui déterminent les quantités de mouvement de l’électron et qui engendrent la rotation sont distribuées dans un volume. Ils n’ont aucune raison d’être distribuées sur les deux seuls degrés de liberté de la trajectoire. Par suite l’action associée à la rotation ne peut pas être correctement décrite par le produit de deux vecteurs la quantité de mouvement et le déplacement  $d\ell$  tous les deux contenus dans le plan de la trajectoire. Ces deux vecteurs doivent nécessairement posséder deux composantes dans des plans orthogonaux pour que l’action résulte d’échanges en volume. En d’autres termes la rotation plane est le résultat de deux rotations orthogonales. Nous allons voir comment cette propriété permet de mettre en évidence les nombres quantiques demi- entiers.

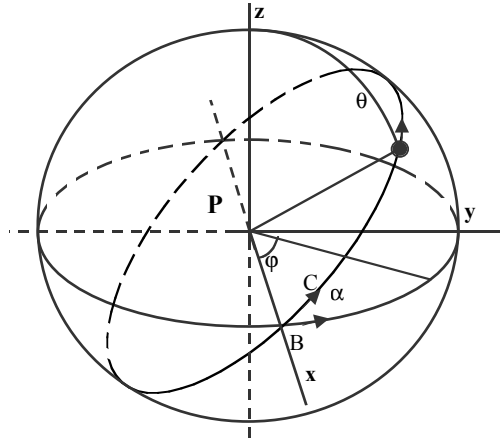
Nous avons donc à considérer deux aspects du mouvement : la rotation qui seule permet à l’électron de tourner au tour du proton et un supplément éventuel de quantité de mouvement qui sans la rotation ne permettrait pas à l’électron de tourner autour du proton. Ce supplément de quantité de mouvement a pour effet de diminuer l’énergie de liaison de l’électron par rapport au proton. Les niveaux les plus profonds sont ceux des états “1s” qui possèdent les caractéristiques de la rotation. Nous commençons donc par les étudier.

Considérons alors le système de coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\phi$  avec  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  et  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Ce choix de coordonnées résulte de l’hypothèse que le mouvement plan est lié à une action contenue dans ce plan. L’hypothèse des échanges de matière conduit à considérer que l’action mécanique résulte d’échanges dans toutes les directions de l’espace. Pour respecter cette hypothèse nous supposons que l’action de rotation, qui est la seule action présente dans les états “1s”, est le résultat, pour tout élément d’action  $p d\ell$  et quelle que soit l’époque considérée, de deux composantes d’action agissant parallèlement à des plans orthogonaux. En d’autres termes on peut considérer que le mouvement est composé de deux mouvements projetés sur ces deux plans orthogonaux avec chacun une variable  $\phi$  tel que  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Par ailleurs pour respecter la symétrie du phénomène, il n’y a pas lieu de privilégier une variable plus qu’une autre. Par suite les actions correspondantes doivent être égales.

## 2.2 Les deux composantes de l’action de rotation

Pour étudier cette propriété déterminons comment l’action de rotation peut se décomposer suivant des composantes orthogonales. Considérons dans ce but un élément différentiel  $dA$  d’action. Il est le produit

d'une quantité de mouvement  $p$  par un élément différentiel de longueur  $d\ell$ . La projection de l'action est donc le produit des projections de  $p$  et de  $d\ell$ . Pour que les composantes soient équivalentes à l'action de départ nous décomposerons  $dA$  en deux composantes égales dans le plan tangent à la sphère sur laquelle gravite l'électron au point où il se trouve.



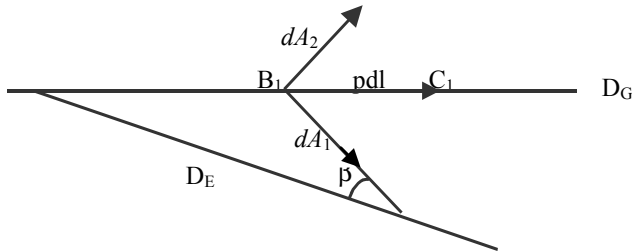
**Figure 1.** Le mouvement de l'électron

Soit  $G$  le plan de gravitation de l'électron qui contient l'axe  $Px$ . Considérons le plan équatorial  $E$  qui passe par le centre  $P$  du potentiel et qui contient les axes  $Px$  et  $Py$  (figure 1) et le plan  $N$  contenant les axes  $Px$ ,  $Pz$  qui lui est normal. Ce sont ces deux plans que nous choisissons pour décomposer l'action associée à la rotation. Le plan de gravitation coupe ces deux plans suivant l'axe  $Px$ . Soit  $B$  l'un des points communs à la trajectoire et à ces trois plans. Considérons d'abord l'électron à l'époque où il passe en  $B$  (figure 1). Les droites d'intersection du plan tangent en  $B$  avec les deux plans de projection sont les normales en  $B$  à chacun de ces plans. Pour un intervalle de temps et de longueur  $dt$ ,  $d\ell$ , qui amène l'électron de  $B$  en  $C$ , si  $p$  est la quantité de mouvement, l'action correspondante est  $p d\ell$ . Pour décomposer l'action du mouvement de rotation en deux actions orthogonales il faut que les actions correspondantes soient le produit des projections de la quantité de mouvement  $p$  et de l'élément de longueur  $d\ell$ . Soit  $\alpha$  l'angle entre les plans  $G$  et  $E$ , la projection de  $p d\ell$  sur  $E$  est  $dA_E = \cos^2 \alpha p d\ell$  et

la projection de  $pdl$  sur  $N$  est  $dA_N = \sin^2\alpha pdl$ . La somme de ces projections redonne bien l'action totale. Pour l'action de rotation qui est celle de l'état "1s" nous avons vu que ces actions sont égales, ce qui implique que  $\alpha = 45^\circ$ .

Supposons maintenant que l'électron se soit déplacé de  $B$  en  $B_1$ , et considérons encore un intervalle de temps et de longueur  $dt, dl$  qui amène  $B_1$  en  $C_1$  (figure 2). Soit  $D_E$  la droite d'intersection du plan tangent en  $B_1$  avec le plan équatorial et  $D_G$  la droite d'intersection du plan de gravitation avec le plan tangent en  $B_1$ . Soit par ailleurs  $D_N$  la droite d'intersection des plans  $G$  et  $N$ . Dans le plan tangent en  $B_1$  nous pouvons encore considérer la décomposition en  $dA_1$  et  $dA_2$  à  $45^\circ$  de part et d'autre de  $D_G$ . Nous avons :

$$dA_1 = dA_2 = \frac{1}{2} pdl \quad (2.1)$$



**Figure 2.** Étude de la projection de l'action de rotation

Ces composantes d'action ne sont pas parallèles aux plans  $E$  et  $N$ . Pour déterminer les projections sur ces plans il suffit de projeter les deux composantes  $dA_1$  et  $dA_2$  sur  $D_E$  et  $D_N$ . Considérons les projections  $P_E(dA_1)$  de  $dA_1$  et  $P_E(dA_2)$  de  $dA_2$  sur  $D_E$ . Soit  $\beta$  l'angle entre la droite portant la composante  $dA_1$  et la droite  $D_E$ . Nous avons :

$$P_E(dA_1) = dA_1 \cos^2\beta \quad \text{et} \quad P_E(dA_2) = dA_2 \sin^2\beta \quad (2.2)$$

Compte tenu de (2.1) nous avons :

$$dA_E = P_E(dA_1) + P_E(dA_2) = \frac{1}{2} pdl \quad (2.3)$$



Considérons maintenant  $D_N$  la droite d'intersection des plans  $G$  et  $N$ . Le même raisonnement montre que nous avons également :

$$dA_N = P_N(dA_1) + P_N(dA_2) = \frac{1}{2} p dl \quad (2.4)$$

### 2.3 Les moments demi-entiers

Considérons alors un champ magnétique homogène  $H$ . Il est généré par un solénoïde. Il en résulte que les modifications de densité de grains qu'il entraîne sont décrites avec une seule variable angulaire, celle des plans orthogonaux au champ  $H$ . Par suite le champ  $H$  modifie l'action uniquement dans cette direction de plans. Ces modifications agissent donc uniquement sur les projections des deux composantes d'action de la rotation sur la direction de plans perpendiculaires à  $H$ . Soit  $S_E$  et  $S_N$  ces composantes toutes deux égales à  $\frac{1}{2} p dl$  pour l'élément de longueur  $dl$  et soit  $\delta$  l'angle entre les plans perpendiculaires à  $H$  et le plan  $E$ . Les projections des composantes de l'action de rotation sont  $S_E \cos^2 \delta$  et  $S_N \sin^2 \delta$ . Nous avons :

$$S_E \cos^2 \delta + S_N \sin^2 \delta = \frac{1}{2} p dl \quad (2.5)$$

Considérons les états "1s". Ces états correspondent à un seul quantum  $h$ . Pour ces états comme pour les autres il y a rotation. L'action de la rotation est donc  $h$ . Pour un état "1s" la trajectoire est un cercle. Soit  $r$  son rayon, sur une période la longueur parcourue est  $2\pi r$ . L'action  $\frac{1}{2} p dl$  correspondante au segment  $dl$  est donc :

$$\frac{1}{2} p dl = \frac{1}{2} h \frac{dl}{2\pi r} \quad (2.6)$$

Par suite pour le moment cinétique observable  $M$  sur un élément de longueur  $dl$  nous avons :

$$\frac{1}{2} r p dl = M dl = \frac{1}{2} h dl \quad (2.7)$$

Nous avons donc :

$$M = \frac{1}{2} h \quad (2.8)$$

Ainsi pour les états “ 1s ” quelle que soit l’orientation du champ magnétique  $H$  on ne peut observer que le moment magnétique qui correspond au moment cinétique  $\frac{1}{2}\hbar$ . Il est intéressant de remarquer que les relations (2.6), (2.7) et (2.8) nous montrent que la conservation du moment cinétique résulte de la quantification de l’action.

Si maintenant en plus du quantum de rotation, l’état quantique considéré possède plusieurs quanta supplémentaires d’action associés à une quantité de mouvement supplémentaire, ces quanta se répartissent entre les deux composantes de la rotation et ceux associés aux variations de masse comme l’étude des doublets nous le montrera.

*Ainsi la propriété remarquable des différents états quantiques de manifester, au travers du moment magnétique associé, un moment cinétique observable demi-entier, vient de ce que la rotation a nécessairement deux composantes d’action orthogonales équivalentes tandis que le champ magnétique n’en possède qu’une.*

Il y lieu d’ajouter que cette propriété est celle de la rotation orbitale puisque l’étude qui vient d’être faite concerne uniquement le mouvement du centre de gravité. Il est possible que la rotation orbitale soit liée à celle de la rotation propre mais c’est une question ouverte qui sort du cadre de ce travail. Enfin il est intéressant de souligner que dans tout état quantique il y a lieu de distinguer le quantum de rotation qui a des propriétés différentes des autres quanta.

### 3 LE MODELE DE SOMMERFELD

Dans l’étude de Sommerfeld qui prend en compte les variations relativistes de la masse, l’électron est assimilé à un point. Il y a donc deux degrés de liberté indépendants. Considérons la trajectoire de l’électron et soit dans le plan de la trajectoire  $r$  et  $\psi$  les coordonnées radiale et angulaire prise par rapport au centre P du potentiel. Soit alors une trajectoire elliptique par exemple l’état 2s. Les quantités de mouvement qui sont supposées quantifiées, sont  $p_\psi$  et  $p_r$ . Le calcul de l’énergie d’un niveau part de la définition de l’énergie cinétique T et de la vitesse v de l’électron en relativité. Si  $m_0$  est la masse au repos de l’électron, c est la vitesse de la lumière, nous avons :

$$T = m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right] \quad (3.1)$$

La vitesse  $v$  de l'électron à l'instant considéré est contenue dans l'expression de  $\beta$  :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2}}{c} \quad (3.2)$$

Dans cette expression  $\dot{r}$  et  $\dot{\psi}$  représentent la dérivée par rapport au temps des variables  $r$  et  $\psi$ . Si  $e^2/r$  est l'énergie potentielle, un état quantique est défini par son énergie totale  $W$  qui est une constante du mouvement. On a :

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e^2}{r} \quad (3.3)$$

La recherche des états quantiques stables consiste à déterminer les différentes valeurs possibles de  $W$ . Pour effectuer cette quantification Sommerfeld utilise la fonction de Lagrange relativiste :

$$L = m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} - U \quad (3.4)$$

où  $U$  est l'énergie potentielle, soit pour l'électron par rapport au proton  $U = e^2/r$ . Les moments de Lagrange des variable  $r$  et  $\psi$  sont :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad \text{et} \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \quad (3.5)$$

En supposant que la masse qui détermine ces deux quantités de mouvements est la masse  $m_0$  de l'électron au repos, il vient :

$$p_r = \frac{m_0c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \beta^2}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.6)$$

$$p_\psi = \frac{m_0c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \beta^2}{\partial \dot{\psi}} = \frac{m_0r^2\dot{\psi}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.7)$$

Les conditions quantiques sont :

$$\int \frac{m_0r^2\dot{\psi}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\psi = kh \quad (3.8)$$

$$\oint \frac{m_0r^2\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} dr = ph \quad (3.9)$$

Les nombres  $k$  et  $p$  sont par hypothèse des entiers positifs. Dans l'approche de Sommerfeld le nombre  $p$  peut être nul mais pas  $k$ .

Ces deux équations définissent, pendant la période  $T$  du mouvement, l'action associée au degré de liberté considéré. L'équation (3.9) parce qu'on intègre sur une période le produit de la quantité de mouvement  $p_r$  par l'élément de longueur  $dr$ . L'équation (3.8) parce qu'on intègre sur une période le produit  $r\dot{\psi}$  de la vitesse liée à la variable  $\psi$ , par la masse correspondante  $m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$  et par l'élément de longueur  $r d\psi$  associé à  $\psi$ . Par suite l'équation (3.8) définit une action sur toute la période du mouvement. Ce point est important car nous savons que le moment cinétique observable n'est pas égal à l'action qui le génère. Il y a lieu par suite de considérer  $p_\psi$  comme de l'action par unité d'angle que nous appellerons l'action angulaire, plus que comme le moment cinétique. Notons que l'action angulaire inclut toujours le quantum d'action de rotation que la théorie de Sommerfeld ne permet pas d'appréhender.

Considérons alors les niveaux d'énergie  $W$ . Ils dépendent des nombres quantiques  $k$  et  $p$ . Introduisons le nombre quantique principal  $n = |k| + p$ . Soit par ailleurs  $E$  l'énergie définie par la relation :

$$E = W - m_0c^2 = T + m_0c^2 - \frac{e^2}{r} \quad (3.10)$$

Pour un couple de nombres  $n$  et  $k$  le calcul des intégrales (3.8) et (3.9) permet celui de l'énergie  $E_{n,k}$  d'un niveau qui est donnée par la relation :

$$\frac{E_{n,k}}{m_0c^2} = \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{[p + \sqrt{k^2 - \alpha^2}]^2} \right]^{-1/2} - 1 \quad (3.11)$$

$\alpha$  est la constante de structure fine  $\alpha = e^2/\hbar c$ ,  $k$  caractérise le nombre de quanta d'actions associés à la quantité de mouvement angulaire  $p_\psi$  par la relation (3.8). Comme  $k$  intervient par son carré il peut prendre toutes valeurs entières positives ou négatives mais pas la valeurs zéro. Toutefois si l'on suppose que  $k$  représente le moment cinétique seules les valeurs positives sont à considérer. C'est cette interprétation qui prévalait à l'époque de Sommerfeld. La comparaison au modèle de Dirac où les valeurs positives et négatives sont retenues conduit à penser qu'il y a lieu de faire un autre choix.

Considérons alors la couche L qui correspond à  $n = 2$ . L'expérience montre que cette couche est constituée des trois niveaux  $2s_{1/2}$ ,  $2p_{3/2}$  et

$2p_{1/2}$ . Par contre l'expression (3.11) et la quantification de  $p_\psi$  et  $p_r$  ne mettent en évidence que deux niveaux  $E_{n,k}$  pour la couche L. Un niveau avec  $k = 2$  et  $p = 0$  dont le mouvement est circulaire, il correspond au niveau  $2p_{3/2}$  ; l'autre avec  $k = 1$  et  $p = 1$  dont le mouvement est elliptique avec une composante radiale de la quantité de mouvement, il correspond au niveau  $2s_{1/2}$ . Il manque dans cette approche le niveau  $2p_{1/2}$ . C'est la difficulté fondamentale sur laquelle l'approche de Sommerfeld achoppa et qui semble indiquer que seule la méthode de Dirac qui trouve les trois niveaux est correcte.

### 3.1 La vitesse et la masse

Dans l'approche de Sommerfeld seules les variations de la masse avec la vitesse radiale du centre de gravité  $\gamma$  de l'électron sont considérées. Dans le modèle d'électron fluide où les grains sont le support de l'énergie de mouvement et de masse, lorsque la vitesse radiale diminue ou augmente, la masse, c'est à dire le nombre de grains, augmente ou diminue. Par contre pour une vitesse angulaire constante sans vitesse radiale les échanges de matière conservent la masse. Ce sont ces deux cas qui sont déterminés par les conditions quantiques (3.8) et (3.9). Avec le modèle de grains nous pouvons également considérer des variations de la masse entraînant des variations de la vitesse de rotation du centre de gravité de l'électron tout en conservant la quantité de mouvement radiale et angulaire. Cette propriété est déjà présente avec les variations de masse associées aux variations de vitesse radiale. En effet ces variations conservent  $p_\psi$  et les deux composantes du moment cinétique associé à la rotation. Cette propriété peut également concerner  $p_r$  si la masse varie indépendamment de  $\dot{r}$ .

Soit alors  $h$  le quantum d'action associé à la rotation. Cette unité d'action contribue toujours à la valeur du nombre quantique  $k$  défini par la relation (3.8). Les échanges de matière associés à la rotation peuvent avoir lieu à masse constante, mais ce ne sont pas les seuls. Pour les états à masse constante, les unités correspondantes d'action contribuent au nombre quantique  $k$  qui caractérise l'action angulaire indépendante de l'action associée à des variations de masse. Si la rotation a lieu à masse variable en plus de l'unité d'action qui engendre la rotation il peut y avoir une ou plusieurs unités d'action associées à des variations de masse. Ces variations de masse engendrent des variations de la vitesse : soit radiale, soit angulaire. Le nombre de ces unités d'action appartient au nombre quantique  $p$  défini par la relation (3.9).

Considérons alors, pour une même valeur du nombre quantique principal  $n$ , un état avec une unité d'action engendrant des variations de la vitesse angulaire et un autre état où cette unité d'action est transférée sur le nombre quantique  $k$ . Pour ces deux états le nombre de quanta associés à la vitesse radiale reste le même. Leurs trajectoires sont donc très proches, leurs énergies ne diffèrent que par des corrections relativistes. Ils correspondent à deux types de solutions qui donnent naissance aux doublets réguliers. Nous discuterons plus loin l'éventualité de plusieurs unités d'action engendrant des variations de la vitesse angulaire. Ainsi les deux types de solutions, associés aux deux raies d'un doublet, sont le reflet de : "*La capacité de l'électron, pour un même moment cinétique, d'avoir une masse constante ou variable indépendamment des variations de la masse correspondantes à celles de la vitesse radiale*". Par contre, rien n'indique qu'ils correspondent à deux orientations de la rotation propre comme l'hypothèse de cette rotation introduite par Uhlenbeck et Goudsmit [11,12] peut le laisser croire, c'est une question qui reste ouverte. Ils correspondent en fait à deux niveaux d'énergie qui diffèrent l'un de l'autre par des corrections relativistes et qui préexistent à l'application d'un champ magnétique ce que, avec Georges Lochak, nous avons déjà souligné [13].

### 3.2 Les degrés de liberté et le calcul de l'énergie d'un niveau

Ainsi des variations de masse peuvent prendre place sur une composante de la quantité de mouvement sans modifier l'autre. Cette propriété implique que les différentes composantes de la quantité de mouvement associée à ces variations de masse sont autant de degrés de liberté indépendants. Pour la vitesse radiale cette propriété, tout en apportant un éclairage particulier, ne donne pas accès à des propriétés nouvelles car les variations de la vitesse radiale sont toujours liées à des variations de masse. Par contre l'indépendance des variations de masse par rapport à la quantification de l'action angulaire  $\psi$  est une propriété qui n'avait pas encore été reconnue pour la composante de vitesse perpendiculaire à la vitesse radiale. Il en résulte en effet qu'il y a deux degrés de liberté qui quantifient la rotation ce qui conduit à compléter le calcul de l'énergie.

Puisqu'il y a deux degrés de liberté qui quantifie la rotation nous pouvons continuer d'appeler  $p_\psi$  la quantité de mouvement angulaire définie par la relation (3.7). Elle est indépendante des variations de masse. Soit alors  $\omega$  la composante linéaire de vitesse, orthogonale au rayon vecteur  $r$  associée aux variations de masse liées au mouvement

orbital de rotation et soit  $p_\omega$  la quantité de mouvement associée à ces variations de masse. Pour une trajectoire circulaire cette composante est tangentielle au cercle mais distincte de  $p_\psi$ . La quantité de mouvement  $p_\omega$  affecte la vitesse angulaire, c'est la raison pour la quelle nous utilisons la lettre grecque oméga, mais ce n'est pas une quantité de mouvement angulaire puisqu'elle est engendrée par des variations de masse indépendantes de la vitesse angulaire.

Nous avons :

$$p_\omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} \quad (3.12)$$

Il vient

$$p_\omega = \frac{m_0 c^2}{2\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \beta^2}{\partial \dot{\omega}} = \frac{m_0 \dot{\omega}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.13)$$

Posons :

$$\oint P_\omega dl = ah \quad (3.14)$$

Les variations de masse associées à  $p_\omega$  entraînent des variations de vitesse  $\dot{\omega}$  tout comme les variations de masse associées à la vitesse radiale, si ce n'est qu'elles sont indépendantes de la vitesse radiale. Il en résulte que pour une même énergie totale, les conditions quantiques qui déterminent les trajectoires elliptiques restent valables pour les variations de la vitesse  $\dot{\omega}$ , ce que montre l'expérience pour les états  $2s_{1/2}$  et  $2p_{1/2}$  leurs niveaux d'énergie étant pratiquement égaux [14].

Pour le voir sur le plan du calcul posons :

$$\oint p_r dl = rh \quad (3.15)$$

Posons également :

$$p_m = p_r + p_\omega \quad (3.16)$$

Il vient

$$\oint p_m dl = \oint (p_r + p_\omega) dl = (r + a)h \quad (3.17)$$

Posons :

$$p = a + r \quad (3.18)$$

Montrons que le nombre quantique  $p$  définie par la relation (3.18) est celui de la relation (3.9) qui détermine la valeur de l'énergie du niveau  $E_{n,k}$ . Les quantités de mouvement  $p_r$  et  $p_\omega$  sont orthogonales, on a donc :

$$p_m^2 = p_r^2 + p_\omega^2 \quad (3.19)$$

L'indépendance de  $p_\omega$  et de  $p_\psi$  fait que l'on a :

$$p_\psi^2 + p_\omega^2 + p_r^2 = p_\psi^2 + p_m^2 \quad (3.20)$$

Comme dans le calcul de  $E$  les quantités de mouvement interviennent par leurs carrés la conduite des calculs reste la même si l'on remplace  $p_r$  défini par la relation (3.5) par  $p_m$  défini par la relation (3.16). Le calcul est dû à Sommerfeld [15] et il se trouve également chez de Broglie [3].

Dans le modèle de Sommerfeld le calcul de l'énergie d'un niveau part de la définition de l'énergie cinétique  $T$  donnée par la relation (3.1) et de la vitesse de l'électron en relativité, relation (3.2). Compte tenu des variations de masse associées à  $p_\omega$  il y a lieu de remplacer l'expression de  $\beta$  relation (3.2) par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{\omega}^2 + r^2\dot{\psi}^2}}{c} \quad (3.21)$$

Le travail de Sommerfeld évidemment ne fait pas référence à l'existence de la vitesse  $\dot{\omega}$  qui caractérise la vitesse associée aux variations de masse dans la direction perpendiculaire au rayon vecteur  $r$ . Mais comme nous allons le voir le calcul n'est pas modifié par ce degré de liberté supplémentaire.

Le calcul de  $E_{n,k}$  consiste à calculer  $p_m$  à partir de  $W$  donné par la relation (3.3). En intégrant ensuite  $p_m$  sur une période, la condition quantique (3.17) avec  $a + r = p$  conduit alors à l'expression de  $E_{n,k}$ . Considérons les quantités de mouvements  $p_r$ ,  $p_\omega$  et  $p_\psi$ . Elles sont définies par les relations (3.5) et (3.12). Leurs expressions données par les relations (3.6), (3.7) et (3.13) permettent de calculer  $p_m$  à partir de la somme suivante :

$$p_r^2 = \frac{m_0^2 \dot{r}}{1 - \beta^2} ; p_\omega^2 = \frac{m_0^2 \dot{\omega}^2}{1 - \beta^2} ; \frac{p_\psi^2}{r^2} = \frac{m_0^2 r^2 \dot{\psi}^2}{1 - \beta^2} \quad (3.22)$$



Il vient

$$p_r^2 + p_\omega^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} = m_0^2 \frac{\dot{r}^2 + \dot{\omega}^2 + \dot{\psi}^2}{1 - \beta^2} = \frac{m_0^2 c^2 \beta^2}{1 - \beta^2} \quad (3.23)$$

D'où

$$m_0 c^2 + p_r^2 + p_\omega^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} = m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right] = \frac{m_0 c^2}{1 - \beta^2} \quad (3.24)$$

L'expression de  $W$  donnée par (3.3) se transforme à l'aide de (3.24) en :

$$W = c \sqrt{m_0 c^2 + p_r^2 + p_\omega^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2}} - \frac{e^2}{r} \quad (3.25)$$

Un état quantique sera stable s'il existe des valeurs de  $W$  constantes. Comme l'énergie de la masse au repos est une constante, il est commode de réécrire la relation (3.10) de la manière suivante :

$$W = E + m_0 c^2 \quad (3.26)$$

Comme nous l'avons vu  $p_\psi$  est une constante du mouvement différente du moment cinétique observable. La relation (3.8) permet d'écrire :

$$p_\psi = k\hbar \quad (3.27)$$

A l'aide des relations (3.3), (3.25) et (3.26) nous pouvons écrire :

$$p_m = \pm \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{2C}{r^2}} \quad (3.28)$$

avec les notations suivantes :

$$A = \frac{E^2}{c^2} 2m_0 = m_0 c^2 \left[ \left( 1 + \frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.29)$$

$$B = \frac{E e^2}{c^2} + m_0 e^2 \quad (3.30)$$

$$C = \frac{e^4}{c^2} - p_\psi^2 = \frac{e^4}{c^2} - k^2 \hbar^2 \quad (3.31)$$

En introduisant la constante de structure fine  $\alpha = e^2/2\hbar c$ , on obtient

$$C = k^2\hbar^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right] \quad (3.32)$$

En intégrant  $p_m$  sur une période par la méthode des résidus on obtient

$$\oint \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} dr = 2i\left[\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right] = ph \quad (3.33)$$

L'égalité à  $ph$  vient de la quantification en tenant compte des relations (3.9), (3.17) et (3.18). En remplaçant  $A$ ,  $B$  et  $C$  par leurs valeurs on abouti après un calcul simple à l'expression (3.11) dans laquelle  $p = a + r$ .

#### 4 LES MODELES DE SOMMERFELD ET DIRAC

Tout état quantique associé à  $p_\omega$  peut sembler avoir les mêmes caractéristiques que celles associés à  $p_r$ . Il y a pourtant une différence importante : supposons qu'il y ait un quantum d'action associé à  $p_\omega$ . Il caractérise les variations de la vitesse orbitale de rotation, par suite il contribue au moment cinétique pour  $\hbar$ . Par contre chaque quantum d'action associé à  $p_r$  le laisse inchangé. Par ailleurs, le nombre quantique  $p$  concerne aussi bien le mouvement radial que le mouvement qui résulte de  $p_\omega$ . Il y a donc lieu de distinguer les nombres quantiques associés à ces deux types de vitesses. C'est cette possibilité pour la rotation d'avoir une vitesse angulaire constante ou variable qui est à l'origine des doublets.

En théorie de Dirac il peut sembler que le partage du nombre quantique  $p$  n'existe pas. Cela vient de ce qu'on met l'accent sur les deux valeurs possible de  $k$ , soit  $k = \ell$  et  $k = -(\ell + 1)$ . Comme ces deux valeurs permettent de retrouver l'ensemble des états quantiques connus, il n'y a pas lieu à première vue de considérer que  $p$  puisse être la somme de deux nombres distincts, chacun étant caractéristique de variations de la masse dans des directions orthogonales. Toutefois lorsque le nombre  $k$  passe de  $k = -(\ell + 1)$  à  $k = \ell$  le nombre  $p$  passe de  $p = (n - \ell - 1)$  à  $p = (n - \ell)$ . Le nombre  $p$  varie donc d'une unité, le moment cinétique total restant le même. On a en effet  $M = (\ell + \frac{1}{2})\hbar$  [6 et 7], (rappelons que les nombres  $j = \ell + \frac{1}{2}$  et  $j = \ell - \frac{1}{2}$  caractérisent la valeur maximum en magnéton de Bohr du moment magnétique observable et observé, suivant les valeurs négatives ou positives de  $k$ , le nombre quantique qui dans le

modèle de Dirac prend les valeurs  $k = -\ell - 1$  ou  $k = \ell$ , [13, 6 et 7]). Il y a donc bien une unité de quantification correspondant au nombre quantique  $a$  dans le modèle de Dirac. Ainsi pour une même valeur du nombre quantique principale  $n$ , les valeurs  $a = 0$  et  $a = 1$  permettent de retrouver l'ensemble des états quantiques connus. Dans le modèle de Dirac ce point est connu si ce n'est qu'il est associé aux deux valeurs de  $k$  sans l'introduction du nombre  $a$ . Ceci étant, rien n'interdit de considérer des valeurs de  $a$  supérieures à un, que l'on se place dans le modèle de Sommerfeld ou de Dirac.

Etudions si les valeurs entières de  $a$  supérieures à un sont possibles. Dans ce but il est utile de rappeler qu'elles sont les valeurs possibles du nombre quantique  $r$ . Lorsque  $r$  varie, l'excentricité de la trajectoire varie. Dans les atomes hydrogénoïdes nous savons que les niveaux d'énergie  $E_{n,l}$  pour une même valeur de "n" mais des valeurs différentes de  $\ell$ , sont différents. Cette propriété s'interprète par des facteurs d'écran qui affectent le potentiel central, ils sont caractéristiques de l'excentricité de la trajectoire. Par ailleurs les états correspondants à différentes valeurs de  $a$  avec  $r = 0$  sont circulaires. Par suite ces interprétations montrent que le nombre quantique  $r$  prend bien toutes les valeurs entières positives ou nulle qui obéissent à la relation  $r \leq n - 1$ . Il en résulte qu'avec les deux valeurs  $a = 0$  et  $a = 1$  l'ensemble des états quantiques connus sont interprétés. Par suite les valeurs  $a > 1$  sont soit interdites, soit instables. Si de tels états existent, ils ont des énergies caractéristiques qui se confondent avec celles des états déjà connus. Dans cette éventualité, ces états dans les transitions électroniques, tout en étant instables, doivent modifier les poids statistiques dont on sait qu'ils ne correspondent pas toujours aux valeurs attendues.

## 5 LES DIFFERENTS ETATS QUANTIQUES

En étudiant la rotation nous avons vu qu'il y a un quantum d'action associé à la rotation. Dès lors que la rotation existe avec ce quantum réparti sur deux composantes orthogonales les autres quanta peuvent se répartir : soit sur l'action associée aux variations de masse, soit sur l'action angulaire par entier sur chaque composante de la rotation. L'existence du quantum de rotation permet le décompte des différents états quantiques, de comprendre leur contribution magnétique et de les rapprocher du décompte du modèle de Dirac où les deux types d'états sont caractérisés par  $k = -\ell - 1$  et  $k = \ell$ .

Soit  $\ell$  le nombre des quanta d'action qui s'additionnent à celui de rotation et  $r$  celui des quanta d'action associés aux variations de la vitesse radiale. Considérons la rotation : soit à masse constante avec  $k_1 = \ell + 1$  et  $p_1 = r$ , soit à masse variable avec  $k_2 = \ell$  et  $p_2 = r + 1$ . Dans les deux cas l'unité de quantification ajoutée à  $\ell$  ou à  $r$  contribue au moment cinétique. Par ailleurs comme l'action de rotation contribue pour  $\frac{\hbar}{2}$ , le moment cinétique total  $M$  associé à  $\ell$  est :

$$M = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (5.1)$$

Comme le nombre  $k$  intervient par son carré dans l'expression de l'énergie (3.11) il est également possible de considérer des valeurs négatives de  $k$  ce que fait Dirac. Pour respecter cet usage que nous avons utilisé dans l'étude du magnétisme [13] nous caractérisons les deux types de solutions avec  $k = -(\ell + 1)$  et  $k = \ell$ . Nous avons alors pour le moment cinétique :

$$M = \left| k + \frac{1}{2} \right| \hbar \quad (5.2)$$

Type I : *Rotation à masse constante*. L'action de rotation  $\ell h$  peut se répartir, par nombre entier de quantum  $h$ , sur les deux composantes de la rotation. Soit  $m$  le nombre de quanta associés au plan équatorial. Les valeurs possibles de  $m$  sont  $0 \leq m \leq \ell$ . Ajoutons à  $m$  la contribution  $\frac{1}{2}$  de la rotation. Ceci conduit à introduire le nombre  $\eta = m + \frac{1}{2}$ . Par ailleurs tout mouvement peut avoir lieu aussi bien dans un sens que dans l'autre. Par suite les valeurs possibles de  $\eta$  sont :

$$\eta = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (5.3)$$

Avec cette définition de  $\eta$  le nombre  $m$  prend deux fois la valeur zéro. Il est possible d'éviter ces deux valeurs zéro en choisissant pour  $m$  les valeurs entières de l'intervalle suivant :

$$-\ell \leq m \leq \ell + 1 \quad (5.4)$$

et en remplaçant le nombre  $\eta$  par le nombre  $u$  défini par la relation suivante :

$$u = -\left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (5.5)$$

Ce nombre est le nombre quantique magnétique de la théorie de Dirac [3] qui donne la valeur de la projection du moment cinétique total sur la perpendiculaire au plan équatorial et que nous utilisons dans le calcul du moment magnétique [13]. Il y a  $2\ell+2$  états quantiques différents pour cette sous couche.

Type II : *Rotation à masse variable*. Dans ce cas il y a une unité d'action utilisée pour les variations de vitesse et de masse. Ces variations affectent le mouvement angulaire et contribuent par suite au moment cinétique observable mais diminues d'une unité la valeur absolue des bornes de variation de  $m$ . On a :

$$-(\ell - 1) \leq m \leq \ell \quad (5.6)$$

La valeur de  $u$  est encore donnée par la relation (5.5) mais le nombre de valeurs possibles est réduit de deux unités. Il y a par suite  $2\ell$  états quantiques différents pour cette sous couche. Soit pour la couche entière  $4\ell + 2$  états quantiques différents.

## 6 L'ACTION ET LE FACTEUR $g$

Il est intéressant, dans cette étude sur les doublets, de rappeler que le facteur  $g$  ou facteur de Landè qui s'introduit dans le calcul du moment magnétique d'un état quantique est une conséquence de ce que l'action de la rotation est  $h$  et non pas  $\frac{1}{2}h$  comme les moments magnétiques demi-entiers peuvent le laisser croire [6,7]. Nous savons qu'un électron sur une orbite électronique classique dont le moment cinétique  $M$  a pour projection  $u\hbar$  dans la direction du champ magnétique  $H$  possède un moment magnétique  $\mu_e$  donné par la relation :

$$\mu_e = u\mu_B \quad \text{avec} \quad \mu_B = \hbar \frac{e}{2mc} \quad (6.1)$$

Pour établir cette relation on utilise l'expression classique donnant le moment d'un anneau de courant :

$$\mu_e = IS/c \quad (6.2)$$

où  $I$  est l'intensité circulant dans l'anneau et  $S$  la surface de l'anneau. Pour un électron sur son orbite avec une période de révolution  $T$  on a  $I = e/T$ . Par ailleurs la loi des aires valable aussi bien en mécanique

classique que relativiste exprimée sur une période donne la relation  $2mS = T_M M$ . Pour  $M = \hbar$  nous retrouvons la relation (6.1) à condition que  $T = T_M$ . Mais le moment cinétique total  $M = |k + \frac{1}{2}\hbar|$  ne correspond pas à l'action angulaire qui est égale à  $|k|\hbar$ . Par suite les périodes  $T$  et  $T_M$  sont différentes. La période  $T_M$  est en fait fictive et on a la relation :

$$2mS = T |k| \hbar = T_M |k + \frac{1}{2}| \hbar \quad (6.3)$$

Soit :

$$T_M = gT \quad \text{avec} \quad g = \frac{k}{(k + \frac{1}{2})} \quad (6.4)$$

Pour la projection  $u$  les périodes  $T_M$  et  $T$  sont les mêmes que pour le moment total  $M = |k + \frac{1}{2}\hbar|$ . Il en résulte que le moment magnétique correspondant à la projection  $u$  du moment cinétique total  $M$  est donné par la relation :

$$\mu_e = gu\mu_B \quad (6.5)$$

En particulier pour les états "s"  $k = -1$  et  $g = 2$ . Pour ces états le moment magnétique est le double de celui prévu par l'approche classique, mais ce sont les seuls états.

## 7 L'ORIENTATION DES PLANS DE GRAVITATION

Il est utile dans l'étude du cristal de connaître l'orientation du plan de gravitation  $G$  de la trajectoire d'un état quantique par rapport au plan équatorial  $E$ . Soit  $\alpha$  cet angle. L'action radiale ne modifie pas l'orientation de la trajectoire circulaire de base. Il suffit donc de déterminer  $\alpha$  pour de tels états. Considérons le déplacement  $d\ell$  qui amène l'électron de  $B$  en  $C$  (figure 1). Le déplacement correspondant à l'accroissement  $d\phi$  est  $r d\phi$ . La composante de l'action parallèle au plan  $E$  est le produit des projections du déplacement et de la projection de la quantité de mouvement. On a donc :

$$\cos^2 \alpha = \frac{p_\phi r d\phi}{p d\ell} \quad (7.1)$$

Nous avons vu que la projection de l'action angulaire sur le plan équatorial  $E$  est  $uh$  tandis que l'action angulaire totale est  $kh$ . Il vient :

$$\cos^2 \alpha = \left| \frac{u}{k} \right| = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{k} \right| \quad (7.2)$$

La trajectoire d'un état  $m$  perce le plan équatorial en un point quelconque du cercle homologue de celui de rayon  $PB$  de la figure 1. Lorsqu'il y a plusieurs états occupés sur une même sous-couche les trajectoires des différents états s'écartent les une des autres de manière à minimiser les interactions de répulsions entre électrons. Par contre, si l'on néglige les interactions électron-électron, l'angle  $\alpha$  garde une valeur constante. En particulier il y a une valeur minimum. L'exploitation de ces propriétés permet de déduire certaines propriétés caractéristiques de l'atome considéré. En particulier les directions de l'espace avec un fort ou faible facteur d'écran du fait des électrons présents sur l'atome. En d'autres termes la connaissance de ces directions donne accès aux dissymétries de l'atome, qui engendrent celles du cristal. C'est ainsi que nous avons proposé une interprétation de l'occupation préférentielle du site octaédrique des spinelles par le chrome dans  $MnCr_2O_4$  [16].

## 8 CONCLUSION

Dans cette étude de la quantification, le mouvement est supposé le résultat d'échanges de matière entre l'électron et le proton. Ces échanges prennent place dans toutes les directions de l'espace. De ce fait la rotation orbitale doit être considérée comme le résultat d'une action mécanique qui agit dans deux directions orthogonales. En d'autres termes la rotation peut être considérée comme la somme de deux rotations orthogonales. Il en résulte que le champ magnétique qui correspond à une action sur une seule direction de plans ne peut modifier que la moitié de l'action associée à la rotation. D'autre part les doublets ont en fait pour origine la possibilité pour l'électron de pouvoir tourner pour une même quantification angulaire avec une masse constante ou variable indépendamment de la vitesse radiale et rien n'indique que les doublets correspondent à des états de spin-up et de spin-down [13]. Ces résultats conduisent à examiner dans quelle mesure l'hypothèse de la rotation propre est confirmée.

L'hypothèse du spin a été proposée en 1925 [11] pour interpréter les doublets avant la découverte des équations d'onde de la mécanique quantique 1926 [10] pour celle de Schrödinger et 1928 [17, 18] pour celle de Dirac. Or le spin c'est à dire la rotation propre de l'électron est une

propriété de volume et l'étude des propriétés d'un point en mécanique classique ou relativiste ne saurait faire apparaître les propriétés d'un volume. De plus l'introduction en mécanique quantique des opérateurs différentiels supposés redonnées, en agissant sur la fonction d'onde, les propriétés du centre de gravité de l'électron, ne peut pas plus faire apparaître la rotation propre.

Faute d'une compréhension claire des phénomènes quantiques cette remarque est en générale ignorée. En fait la théorie de Dirac a dès le début été imprégnée du modèle de Pauli où la fonction d'onde a deux composantes : l'une étant par hypothèse supposée attachée à l'un des type de spin l'autre composante étant attachée à l'autre type de spin. En théorie de Dirac l'on pourrait envisager une démarche semblable mais l'étude des solutions montre que c'est l'ensemble des quatre composantes de la fonction d'onde qui caractérise un état quantique. Ainsi la notion de spin échappe en fait à la théorie de Dirac tout comme à la théorie de Sommerfeld.

Pour discuter plus complètement de l'hypothèse du spin, il reste l'existence des moment cinétiques demi entiers qui appartiennent d'après cette étude à la rotation orbitale, tout comme aux solutions de l'équation de Dirac. C'est avec eux que nous avons calculé tous les moment magnétiques en les multipliant par le facteur  $g = k(k + \frac{1}{2})^{-1}$  caractéristique de la sous-couche. Ils ont contribué, avant les équations d'ondes à l'hypothèse du spin. Ces nombres demi entiers appartenant au modèle de Dirac, ils ont par suite conforté l'hypothèse du spin. Toutefois ils ne découlent pas, au travers des études proposées à ce jour, d'une propriété de rotation propre, mais d'études décrivant les propriétés d'un point. Par suite, nous n'avons pas le droit de les présenter comme une preuve de l'existence du spin. Ainsi il est possible que la rotation orbitale de l'électron soit liée à celle de sa rotation propre mais c'est une question qui reste ouverte.

Par contre cette étude montre que l'action associée à la rotation orbitale est la constante de Planck  $h$  et que c'est cette action qui détermine l'ensemble des nombres quantiques. Cet état de fait éclaire la compréhension du tableau périodique. En effet la constante d'action  $h$  ne dépend pas du milieu, c'est à dire de la complexité de l'atome, de la molécule ou encore de l'état solide, liquide ou gazeux de la matière dans la quelle se déplace l'électron. Nous comprenons alors que les nombres quantiques qui caractérisent l'état quantique subsistent quelle que soit la situation de l'atome. C'est ce qui permet grâce aux nombres quantiques



de comprendre la structure du tableau périodique qui synthétise tant de propriétés chimiques et physiques de la matière. Nous comprenons également que le moment cinétique total, reflet de l'action associée à la rotation, se conserve quelle que soit la complexité de l'atome au quel appartient l'électron et le milieu dans lequel se trouve l'atome. C'est cette hypothèse qui nous a permis avec Georges Lochak de proposer un calcul des moments magnétiques des atomes et dont la cohérence avec l'expérience restait mystérieuse [13, 19]. Sur le plan des perspectives la compréhension de l'état cristallin est éclairée par cette approche. Nous l'avons déjà montré [16] et espérons pouvoir le montrer à nouveau dans un proche avenir.

## Références

- [1] Curie P., J. de Phys., 3-ième série, **3**, 393-415, 1894.
- [2] Sommerfeld A., Ann. Phys. **51**, 1, (1916).
- [3] de Broglie L., L'électron Magnétique (théorie de Dirac) Hermann, Paris (1934). Voir en particulier la discussion page 36.
- [4] Oudet X., Ann. Fondation Louis de Broglie, **17**, 315-345, 1992 ; English version available from the author on request.
- [5] Oudet X., Ann. Fondation Louis de Broglie, **22**, 409-421, (1997).
- [6] Oudet X., Ann. Fond. Louis Broglie, **20**, 473 (1995).
- [7] Oudet X., J. Appl. Phys, **79**, 5416 (1996).
- [8] Bohr N., Phil. Mag., **26**, 1-25, (1913).
- [9] de Broglie L., Thèse, 1924, chapitre II.
- [10] Schrödinger E., Phys. Rev., **28**, 1049-70, (1926).
- [11] Uhlenbeck G.E. and Goudsmit S., Naturwissenschaften **13**, 953, (1925).
- [12] Uhlenbeck G.E. and Goudsmit S., Nature **117**, 264, (1926).
- [13] Oudet X. et G. Lochak, J. Magn. Magn Mater. **65**, 99-122 (1987).
- [14] Lamb W. E., Phys. Rev., **72**, 241-243, (1947).
- [15] Sommerfeld A., La Constitution de l'Atome et les Raies Spectrales, Traduit de la troisième édition allemande par H. Bellenot, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris (1923).
- [16] Oudet X., J. de Physique **IV**, **7**, C1-177-8, (1997).
- [17] Dirac P.A.M., Proc. Roy. Soc. **A117**, 610-624, (1928).
- [18] Dirac P.A.M., Proc. Roy. Soc. **A118**, 351-361, (1928).
- [19] Oudet X., J. Mag. Mag. Mat. **98**, 298-332, (1991).

*(Manuscrit reçu le 29 janvier 1998, révisé le 28 mai 1999)*