Équations de Dirac et fermions fondamentaux (Deuxième partie)

Claude Daviau

La Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
email : cdaviau@worldnet.fr
Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France

RÉSUMÉ. On recherche un sous-groupe du groupe orthogonal commutant avec le groupe de Lie $U(1) \times SU(2)$ précédemment obtenu. On obtient un groupe $SU(2) \times SU(2)$ agissant sur la partie droite de l'onde. Puis on cherche les matrices commutant avec ce groupe, et on obtient de nouvelles équations d'onde. On calcule les ondes planes. On discute l'utilisation de ces nouvelles équations pour l'électron. On explique comment l'on peut retrouver les résultats de l'équation de Dirac à partir de deux ondes chirales gauches liées. On examine les implications d'une unification des interactions dans le groupe orthogonal complet.

ABSTRACT. We seek a subgroup of the orthogonal group that we got in the first part of this paper, commuting with the $U(1) \times SU(2)$. We get a $SU(2) \times SU(2)$ group working on the chiral right part of the wave. Then we seek the matrices commuting with this group, and we get new wave equations. We calculate plane waves. We discuss the new equations for the electron. We explain how to get the classical results of the Dirac theory from two chiral left waves linked to the exterior electromagnetic field. We study a possible unification of the weak and strong interactions within the complete orthogonal group.

Interactions fortes.

On suivra ici les notations et les résultats de la première partie de cet article [1]. Au sein du groupe orthogonal $SO(8)$ qui intervient naturellement dans l'équation de Dirac écrite avec des matrices réelles :

$$[\Gamma^\mu(\partial_\mu + qA_\mu P) + mP]\Phi = 0 \tag{1}$$

où les Γ^μ et P sont les matrices 8×8 de la formule (39) de [1], le sous-groupe laissant invariante la partie chirale droite Φ_R de l'onde, et

transformant la partie chirale gauche Φ_L en une partie gauche, contient un groupe $U(1)\times SU(2)$ attendu pour le groupe de jauge des interactions électro-faibles, avec une algèbre de Lie engendrée par les matrices A, B, C, D, telles que :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\Gamma_{23} - \Gamma_{01}P) \\ B &= \frac{1}{2}(P - \Gamma_{0123}) \\ C &= \frac{1}{2}(\Gamma_0 Q - \Gamma_{123}R) \\ D &= \frac{1}{2}(\Gamma_{123}Q + \Gamma_0 R) \end{aligned} \tag{2}$$

où $\Gamma_{23} = \Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_{123} = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, et ainsi de suite. On sait par ailleurs qu'il existe un autre type d'interactions, dites fortes [2], qui sont complètement indépendantes des interactions électro-faibles. Si le groupe de jauge de ces interactions est aussi inclus dans le groupe orthogonal $SO(8)$, il doit alors commuter avec le groupe des interactions faibles, donc avec les générateurs A, B, C, D de l'algèbre de Lie de ce groupe. Aussi allons-nous chercher le sous-groupe de $SO(8)$ qui commute avec A, B, C, D. Comme l'algèbre de Lie du groupe orthogonal est engendrée par les 28 matrices : Γ_1, Γ_2, Γ_3, P, Q, R, Γ_{23}, Γ_{31}, Γ_{12}, Γ_{023}, Γ_{031}, Γ_{012}, Γ_{0123}, $\Gamma_0 P$, $\Gamma_{01}P$, $\Gamma_{02}P$, $\Gamma_{03}P$, $\Gamma_{123}P$, $\Gamma_0 Q$, $\Gamma_{01}Q$, $\Gamma_{02}Q$, $\Gamma_{03}Q$, $\Gamma_{123}Q$, $\Gamma_0 R$, $\Gamma_{01}R$, $\Gamma_{02}R$, $\Gamma_{03}R$, $\Gamma_{123}R$, en appelant G_1, G_2, ... , G_{28} les matrices de la liste précédente, on posera :

$$X = \sum_{i=1}^{i=28} a_i G_i \tag{3}$$

où les a_i sont des réels. X est l'élément général de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $SO(8)$. L'égalité $XA = AX$ impose :

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0 \\ &a_{14} = a_{18} = a_{20} = a_{21} = a_{22} = a_{25} = a_{26} = a_{27} = 0 \\ &a_{16} = a_8 \quad ; \quad a_{17} = a_9 \end{aligned} \tag{4}$$

donc X prend la forme :

$$\begin{aligned} X = {} & a_4 P + a_7\Gamma_{23} + a_8(\Gamma_{31} + \Gamma_{02}P) \\ & + a_9(\Gamma_{12} + \Gamma_{03}P) + a_{13}\Gamma_{0123} + a_{15}\Gamma_{01}P \\ & + a_{19}\Gamma_0 Q + a_{23}\Gamma_{123}Q + a_{24}\Gamma_0 R + a_{28}\Gamma_{123}R \end{aligned} \tag{5}$$

Puis l'égalité $BX = XB$ entraîne

$$a_{28} = a_{19} \quad ; \quad a_{24} = -a_{23} \tag{6}$$

Et enfin l'égalité $CX = XC$ impose

$$a_{14} = a_4 \tag{7}$$

donc X est de la forme :

$$\begin{aligned} X = {} & a_4(P + \Gamma_{0123}) + a_7\Gamma_{23} + a_8(\Gamma_{31} + \Gamma_{02}P) + a_9(\Gamma_{12} + \Gamma_{03}P) \\ & + a_{15}\Gamma_{01}P + a_{19}(\Gamma_0 Q + \Gamma_{123}R) + a_{23}(-\Gamma_{123}Q + \Gamma_0 R) \end{aligned} \tag{8}$$

Or on a :

$$a_7\Gamma_{23} + a_{15}\Gamma_{01}P = (a_7 + a_{15})\frac{1}{2}(\Gamma_{23} + \Gamma_{01}P) + (a_7 - a_{15})A \tag{9}$$

A étant le générateur de la partie $U(1)$ du groupe $U(1) \times SU(2)$, nous obtenons en plus de A six matrices indépendantes commutant avec A, B, C, D :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(P + \Gamma_{0123}) \quad ; \quad X_2 = \frac{1}{2}(\Gamma_0 Q + \Gamma_{123}R) \\ X_3 &= \frac{1}{2}(\Gamma_0 R - \Gamma_{123}Q) \quad ; \quad Y_1 = \frac{1}{2}(\Gamma_{23} + \Gamma_{01}P) \\ Y_2 &= \frac{1}{2}(\Gamma_{31} + \Gamma_{02}P) \quad ; \quad Y_3 = \frac{1}{2}(\Gamma_{12} + \Gamma_{03}P) \end{aligned} \tag{10}$$

Ces matrices vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned} X_1X_2 &= -X_2X_1 = X_3 \quad ; \quad Y_1Y_2 = -Y_2Y_1 = Y_3 \\ X_2X_3 &= -X_3X_2 = X_1 \quad ; \quad Y_2Y_3 = -Y_3Y_2 = Y_1 \\ X_3X_1 &= -X_1X_3 = X_2 \quad ; \quad Y_3Y_1 = -Y_1Y_3 = Y_2 \\ X_iY_j &= Y_jX_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \quad ; \quad j = 1,2,3 \end{aligned} \tag{11}$$

Donc le sous-groupe engendré par les matrices X_i et Y_i a une algèbre de Lie ayant la structure de l'algèbre de $SU(2) \times SU(2)$. On n'obtient pas ici le groupe de jauge attendu, à savoir le groupe $SU(3)$ de la chromodynamique quantique. Mais contrairement au groupe $U(1) \times SU(2)$ des interactions électro-faibles, dont la structure algébrique a été obtenue à partir de nombreuses expériences de la physique des particules [3], il y a peu d'indications expérimentales sur la nature algébrique du groupe

de jauge des interactions fortes. En effet les méthodes de calcul issues de l'électrodynamique quantique, basées sur les calculs de perturbation, ne peuvent être efficientes lorsque la constante de couplage est forte. Les méthodes de calcul utilisant la discrétisation de l'espace-temps utilisent aussi une métrique d'espace-temps qui n'est pas celle du véritable espace-temps de la physique relativiste, et n'ont donc pas encore abouti à des prévisions effectives. La propriété de liberté asymptotique impose seulement au groupe de jauge de ne pas être commutatif, ce qui est le cas aussi bien pour $SU(2) \times SU(2)$ que pour $SU(3)$.

Remarquons par ailleurs que les générateurs X_i, Y_i de ce groupe de jauge n'agissent que sur la partie chirale droite de l'onde, puisqu'on a :

$$\begin{aligned} (X_i)^2 = (Y_i)^2 = -\frac{1}{2}(I_8 - \Gamma_{0123}P) = -J' \\ X_i\Phi = X_i\Phi_R \quad ; \quad Y_i\Phi = Y_i\Phi_R \\ e^{aX_i}\Phi_L = \Phi_L \quad ; \quad e^{aY_i}\Phi_L = \Phi_L \end{aligned} \tag{12}$$

où J et J', tels que :

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2}(I_8 + \Gamma_{0123}P) \quad ; \quad J' = I_8 - J \\ J'\Phi = \Phi_R \quad ; \quad J\Phi = \Phi_L \end{aligned} \tag{13}$$

sont les projecteurs sur les parties chirales gauche et droite de l'onde.

Par les transformations orthogonales de jauge (66) de [1], Γ_μ est transformé en ${\Gamma'}_\mu = A\Gamma_\mu A^{-1}$. Ainsi à chaque générateur X_i ou Y_i peut être associée une liste de matrices ${\Gamma'}_\mu$. Cette liste peut donc cataloguer les générateurs du groupe, à la façon dont on a catalogué les générateurs du groupe $SU(3)$ de couleur par des "états de couleur" des quarks. A X_1 est associée la liste (Γ_{123}, Γ_{023}, Γ_{031}, Γ_{012}). A X_2 est associée la liste ($-\Gamma_{0123}Q$, $\Gamma_{01}R$, $\Gamma_{02}R$, $\Gamma_{03}R$). A X_3 est associée la liste ($\Gamma_{0123}R$, $\Gamma_{01}Q$, $\Gamma_{02}Q$, $\Gamma_{03}Q$). A Y_1 est associée la liste (Γ_1P, Γ_0P, $-\Gamma_3$, Γ_2). A Y_2 est associée la liste (Γ_2P, Γ_3, Γ_0P, $-\Gamma_1$). A Y_3 est associée la liste (Γ_3P, $-\Gamma_2$, Γ_1, Γ_0P). Chacune de ces listes vérifie les relations de commutation

$$ {\Gamma'}_\mu {\Gamma'}_\nu + {\Gamma'}_\nu {\Gamma'}_\mu = 2g_{\mu\nu}I_8 \tag{14}$$

De nouvelles équations d'onde

Parmi les faits expérimentaux les mieux avérés et pourtant sans véritable explication jusqu'ici, figure la totale insensibilité des électrons, neutrinos

et autres leptons, aux interactions fortes responsables de la cohésion des noyaux atomiques. Admettant dorénavant que le groupe de jauge des interactions fortes est le groupe engendré par les X_i et Y_i, examinons quelles sont, parmi toutes les matrices 8×8, celles qui commutent avec les six matrices X_i et Y_i. Un calcul semblable à celui du paragraphe précédent permet d'obtenir, outre la matrice I_8 qui commute trivialement avec toute matrice 8×8, les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} M^0 &= \frac{1}{2}(\Gamma_0 Q - \Gamma_{123} R) \\ M^1 &= \frac{1}{2}(\Gamma_1 Q - \Gamma_{023} R) \\ M^2 &= \frac{1}{2}(\Gamma_2 Q - \Gamma_{031} R) \\ M^3 &= \frac{1}{2}(\Gamma_3 Q - \Gamma_{012} R) \end{aligned} \tag{15}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} N^0 &= \frac{1}{2}(\Gamma_0 R + \Gamma_{123} Q) \\ N^1 &= \frac{1}{2}(\Gamma_1 R + \Gamma_{023} Q) \\ N^2 &= \frac{1}{2}(\Gamma_2 R + \Gamma_{031} Q) \\ N^3 &= \frac{1}{2}(\Gamma_3 R + \Gamma_{012} Q) \end{aligned} \tag{16}$$

ainsi que les produits de ces matrices. L'équation de Dirac a été obtenue en imposant de n'avoir que des dérivées du premier ordre et d'obtenir au second ordre l'équation de Klein-Gordon. Considérons alors l'équation :

$$(M^\mu \partial_\mu + m)\Phi = 0 \tag{17}$$

On a au second ordre :

$$\begin{aligned} &(M^\nu \partial_\nu - m)(M^\mu \partial_\mu + m)\Phi = 0 \\ &(M^\nu M^\mu \partial_\nu \partial_\mu - m^2)\Phi = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Or les M^μ vérifient :

$$M^\mu M^\nu + M^\nu M^\mu = 2g^{\mu\nu}(-J) \tag{19}$$

On obtient donc au second ordre :

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu(-J)\Phi - m^2\Phi \\ 0 &= -\Box\Phi_L - m^2\Phi_L - m^2\Phi_R \end{aligned} \tag{20}$$

Par conséquent une onde Φ suivant au premier ordre l'équation (17) vérifiera au second ordre l'équation de Klein-Gordon si et seulement si la partie chirale droite Φ_R est identiquement nulle :

$$\begin{aligned} \Phi_R = 0 \ \ ; \ \ \Phi &= \Phi_L \\ 0 &= (\Box + m^2)\Phi \\ \Box &= {\partial_{00}}^2 - {\partial_{11}}^2 - {\partial_{22}}^2 - {\partial_{33}}^2 \end{aligned} \tag{21}$$

L'équation (17) est nouvelle et ne peut pas être équivalente à l'équation de Dirac. On peut le voir de multiples façons. Par exemple l'onde ψ de Dirac comporte 4 composantes complexes, ou 8 composantes réelles, alors que Φ_L ne comporte que 4 composantes réelles. Ensuite les Γ^μ vérifient

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\Gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I_8 \tag{22}$$

Si, dans l'équation de Dirac (1), on remplace les Γ^μ par n'importe quelles matrices $\Gamma'^\mu = S\Gamma^\mu S^{-1}$, où S est une matrice inversible quelconque, on aura

$$\Gamma'^\mu\Gamma'^\nu + \Gamma'^\nu\Gamma'^\mu = 2g^{\mu\nu}I_8 \tag{23}$$

et l'on n'obtiendra jamais $-J$ à la place de I_8.

Or on sait maintenant que le neutrino apparaît comme étant entièrement chiral, l'onde du neutrino semble complètement du type Φ_L, la partie Φ_R étant absente en sorte que le modèle standard pose $\Phi_R = 0$. L'équation de Dirac permet de décrire une particule chirale seulement si la masse propre est nulle. Si la masse du neutrino est petite mais non nulle, l'équation de Dirac attribue au neutrino un caractère seulement partiellement chiral. Avec l'équation (17) le neutrino peut avoir une masse et rester doté d'une onde complètement chirale.

De plus, si le groupe des interactions fortes est bien le groupe engendré par les X_i et les Y_i, si le neutrino est purement chiral, doté d'un onde $\Phi = \Phi_L$, il est alors naturellement insensible aux interactions fortes, puisque les X_i et les Y_i n'agissent que sur la partie chirale droite de l'onde et laissent invariante la partie gauche.

Il existe trois autres équations du premier ordre similaire à (17), à savoir :

$$(N^\mu \partial_\mu + m)\Phi = 0 \tag{24}$$

$$\begin{aligned}(M^\mu \partial_\mu + mB)\Phi = 0\\ (N^\mu \partial_\mu + mB)\Phi = 0\end{aligned} \tag{25}$$

Comme on a

$$\begin{aligned}B^2 &= -J\\ M^\mu B &= -BM^\mu\\ N^\mu B &= -BN^\mu\\ N^\mu N^\nu + N^\nu N^\mu &= 2g^{\mu\nu}(-J)\end{aligned} \tag{26}$$

l'équation (24) comme l'équation (17) donne au second ordre (20), donc on doit avoir $\Phi_R = 0$ pour obtenir pour Φ l'équation de Klein-Gordon (21). Quant à (25), on a au second ordre :

$$\begin{aligned}N^\nu \partial_\nu N^\mu \partial_\mu &= -mN^\nu \partial_\nu B\Phi\\ -\Box J\Phi &= mBN^\nu \partial_\nu \Phi = mB(-mB\Phi)\\ &= m^2 J\Phi\\ 0 &= (\Box + m^2)\Phi_L\end{aligned} \tag{27}$$

Donc ici la partie gauche de l'onde suit l'équation de Klein-Gordon, et on ne sait rien d'une éventuelle partie droite.

Solutions en ondes planes

Afin de montrer que les équations (17), (24) ou (25) donnent des résultats tout à fait ordinaires et cohérents avec la physique relativiste, calculons les solutions en ondes planes de (17). On a avec (39) de [1], et en notant γ_{013} le produit $\gamma_0\gamma_1\gamma_3$:

$$\begin{aligned}2M^0 &= \begin{pmatrix}\gamma_{013} & \gamma_5\\ -\gamma_5 & -\gamma_{013}\end{pmatrix}; 2M^1 = \begin{pmatrix}-\gamma_{0135} & I_4\\ I_4 & -\gamma_{0135}\end{pmatrix}\\ 2M^2 &= \begin{pmatrix}\gamma_{035} & -\gamma_1\\ \gamma_1 & -\gamma_{035}\end{pmatrix}; 2M^3 = \begin{pmatrix}\gamma_{015} & \gamma_3\\ -\gamma_3 & -\gamma_{015}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{28}$$

Posons ensuite pour $\Phi = \Phi_L$:

$$\Phi_L = \begin{pmatrix} U \\ -\gamma_{0135} U \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{29}$$

où les u_i sont des fonctions réelles de $(t, \vec{x})$. L'équation (17) équivaut alors à :

$$(-\gamma_5 \partial_0 + \partial_1 + \gamma_1 \partial_2 - \gamma_3 \partial_3 - m\gamma_{0135})U = 0 \tag{30}$$

ou encore équivaut au système :

$$\begin{aligned} 0 &= (-\partial_0 + \partial_3)u_3 + \partial_1 u_1 - \partial_2 u_4 - m u_4 \\ 0 &= -(\partial_0 + \partial_3)u_4 + \partial_1 u_2 - \partial_2 u_3 + m u_3 \\ 0 &= -(\partial_0 + \partial_3)u_1 + \partial_1 u_3 + \partial_2 u_2 + m u_2 \\ 0 &= (-\partial_0 + \partial_3)u_2 + \partial_1 u_4 + \partial_2 u_1 - m u_1 \end{aligned} \tag{31}$$

Cherchons alors une solution en ondes planes, de la forme :

$$u_i = a_i \cos(p_\mu x^\mu) + b_i \sin(p_\mu x^\mu) \tag{32}$$

Les équations (31) donnent alors :

$$\begin{aligned} m a_4 &= -(p_0 - p_3)b_3 + p_1 b_1 - p_2 b_4 \\ m a_3 &= (p_0 + p_3)b_4 - p_1 b_2 + p_2 b_3 \\ m a_2 &= (p_0 + p_3)b_1 - p_1 b_3 - p_2 b_2 \\ m a_1 &= -(p_0 - p_3)b_2 + p_1 b_4 + p_2 b_1 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -(p_0 - p_3)a_3 + p_1 a_1 - p_2 a_4 + m b_4 \\ 0 &= -(p_0 + p_3)a_4 + p_1 a_2 - p_2 a_3 - m b_3 \\ 0 &= -(p_0 + p_3)a_1 + p_1 a_3 + p_2 a_2 - m b_2 \\ 0 &= -(p_0 - p_3)a_2 + p_1 a_4 + p_2 a_1 + m b_1 \end{aligned} \tag{34}$$

En portant les égalités (33) dans (34), on obtient simplement :

$$b_i(-{p_0}^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + m^2) = 0 \tag{35}$$

On n'obtient donc une solution non nulle que si

$$p_0{}^2 = \vec{p}\,^2 + m^2 \tag{36}$$

ce qui est la relation relativiste liant énergie, impulsion et masse propre. Si l'égalité (36) est satisfaite, les b_i sont des constantes fixes arbitraires, et les a_i sont donnés par (33). Bien entendu la relation (36) donne place aux énergies négatives puisque :

$$p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}\,^2 + m^2} \tag{37}$$

Quelle équation pour l'électron ?

Le neutrino n'est pas le seul objet ne manifestant aucune sensibilité aux interactions fortes. C'est le cas de tous les leptons : électrons, muons, taus et leurs neutrinos. Il y a donc d'un côté les quarks qui sont sensibles à la fois aux interactions électro-faibles et aux interactions fortes, et les leptons qui ne sont sensibles qu'aux interactions électro-faibles.

Si le groupe de jauge des interactions fortes est le groupe $SU(2) \times SU(2)$ vu plus haut, qui n'intervient que sur la partie droite de l'onde, la non sensibilité aux interactions fortes peu aisément se comprendre si les neutrinos en particulier, et les leptons en général n'ont qu'une onde gauche et pas de partie droite. Encore faut-il pouvoir, à partir de ces bases, retrouver pour l'électron les résultats extraordinairement précis obtenus par exemple pour l'atome d'hydrogène. Voyons maintenant comment cela est possible.

Chaque génération comporte un lepton chargé et un lepton neutre, et nous disposons comme point de départ des quatre équations (17), (24) et (25). Soit Φ_L une onde vérifiant (17) et Φ'_L une onde chirale gauche vérifiant la seconde équation (25). Avec :

$$\Phi_L = \begin{pmatrix} U \\ -\gamma_{0135}U \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi'_L = \begin{pmatrix} V \\ -\gamma_{0135}V \end{pmatrix} \tag{38}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (-\gamma_5\partial_0 + \partial_1 + \gamma_1\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - m\gamma_{0135})U \\ 0 &= (-\gamma_5\partial_0 + \partial_1 + \gamma_1\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - m\gamma_{0135})V \end{aligned} \tag{39}$$

Comme U et V sont des matrices colonnes à composantes réelles, ces deux équations sont équivalentes à une seule équation complexe :

$$0 = (-\gamma_5\partial_0 + \partial_1 + \gamma_1\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - m\gamma_{0135})(U + iV) \tag{40}$$

Multipliant à gauche par γ_{0135}, on obtient :

$$0 = (-\gamma_{013}\partial_0 + \gamma_{0135}\partial_1 - \gamma_{035}\partial_2 - \gamma_{015}\partial_3 - m)(U + iV) \tag{41}$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} \gamma'^0 &= i\gamma_{013} \quad ; \quad \gamma'^1 = -i\gamma_{0135} \\ \gamma'^2 &= i\gamma_{035} \quad ; \quad \gamma'^3 = i\gamma_{015} \end{aligned} \tag{42}$$

L'équation (41) prend la forme :

$$0 = (\gamma'^\mu \partial_\mu + im)(U + iV) \tag{43}$$

Or on a :

$$\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu = 2g^{\mu\nu} I_4 \tag{44}$$

donc on sait qu'il existe une matrice non singulière S telle que

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \tag{45}$$

La matrice S peut être choisie unitaire. Ici on peut prendre :

$$2S = \begin{pmatrix} i & -i & i & i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -i & -i & i & -i \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad S^{-1} = S^\dagger \tag{46}$$

L'équation (43) prend donc la forme :

$$0 = S(\gamma^\mu \partial_\mu + im)S^{-1}(U + iV) \tag{47}$$

Donc si l'on pose :

$$\psi = S^{-1}(U + iV) \tag{48}$$

on voit maintenant que les deux équations (39) sont équivalentes à :

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\psi = 0 \tag{49}$$

c'est-à-dire à une équation de Dirac usuelle. On sait coupler cette équation au champ électromagnétique extérieur sous la forme :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = 0 \tag{50}$$

ce qui revient à changer ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$. On obtiendra donc les mêmes résultats qu'avec la forme usuelle de l'équation de Dirac si Φ_L et Φ'_L sont couplés au champ électromagnétique extérieur par :

$$0 = (-\gamma_5 D_0 + D_1 + \gamma_1 D_2 - \gamma_3 D_3 - m\gamma_{0135})(U + iV) \tag{51}$$

ce qui équivaut, pour les ondes réelles U et V, à :

$$\begin{aligned} &(-\gamma_5\partial_0 + \partial_1 + \gamma_1\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - m\gamma_{0135})U \\ &\qquad = q(-\gamma_5 A_0 + A_1 + \gamma_1 A_2 - \gamma_3 A_3)V \\ &(-\gamma_5\partial_0 + \partial_1 + \gamma_1\partial_2 - \gamma_3\partial_3 - m\gamma_{0135})V \\ &\qquad = -q(-\gamma_5 A_0 + A_1 + \gamma_1 A_2 - \gamma_3 A_3)U \end{aligned} \tag{52}$$

Il suffit donc que les équations de départ, pour Φ_L et Φ'_L, soient, au lieu de (17) et (25) :

$$\begin{aligned} (M^\mu\partial_\mu + m)\Phi_L &= q(M^\mu A_\mu)\Phi'_L \\ (N^\mu\partial_\mu + mB)\Phi'_L &= -q(N^\mu A_\mu)\Phi_L \end{aligned} \tag{53}$$

Les résultats si remarquablement précis de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène : nombre des états, nombres quantiques n, j, m, niveaux d'énergie, ... peuvent donc être obtenus à partir de deux ondes chirales gauches Φ_L et Φ'_L couplées au champ électromagnétique extérieur selon (53).

Il y a donc place, dans chaque génération, pour un fermion gauche chargé associé à un couple d'ondes (Φ_L, Φ'_L), suivant les équations (53), et à deux ondes Φ_L vérifiant des équations non couplées au champ électromagnétique si $q = 0$. Ces équations sont similaires, car $N^\mu = M^\mu B$, donc (25) donne :

$$\begin{aligned} M^\mu B\partial_\mu\Phi + mB\Phi &= 0 \\ M^\mu\partial_\mu(B\Phi) + m(B\Phi) &= 0 \\ (M^\mu\partial_\mu + m)\Phi' &= 0 \quad ; \quad \Phi' = B\Phi \end{aligned} \tag{54}$$

C'est l'équation (17). On peut penser que ces équations conviennent pour le neutrino.

Groupe de jauge SO(8).

Après avoir décrit les interactions électro-faibles à l'aide d'un groupe de jauge locale $U(1) \times SU(2)$ et les interactions fortes par un groupe

$SU(3)$, les physiciens ont essayé d'unifier les interactions électro-faibles et les interactions fortes dans un unique groupe de jauge locale contenant $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, par exemple $SU(5)$ [4]. Si le groupe de jauge des interactions électro-faibles est le groupe engendré par A, B, C et D, et si le groupe de jauge des interactions fortes est le groupe engendré par les X_i, Y_i, il existe un groupe contenant naturellement les deux, à savoir le groupe orthogonal $SO(8)$ complet. Aux hautes énergies, le groupe d'unification des interactions doit être $SO(8)$. On peut noter que ce groupe à 28 paramètres est de rang 4, comme les groupes $SU(5)$ ou $SO(10)$ précédemment essayés.

Parmi les générateurs de ce groupe $SO(8)$ figurent P, Q, R, qui commutent avec les Γ^μ, mais anticommutent entre eux. Donc si l'interprétation des P, Q, R comme propres à chaque génération est correcte, ceci introduit un mixage des générations. Le fait que le lagrangien du modèle standard traite séparément les trois générations serait alors dû à ce que la symétrie complète $SO(8)$ est brisée aux basses énergies. Il tient aussi à ce que les projecteurs J et J', qui jouent un rôle si essentiel ici, contiennent P, ces projecteurs sont donc propres à la génération correspondant à P. Le passage de P à Q ou R doit être accompagné du remplacement de J par K et L tels que :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}(I_8 + \Gamma_{0123} Q) \\ L &= \frac{1}{2}(I_8 + \Gamma_{0123} R) \end{aligned} \tag{55}$$

Les générateurs des sous-groupes $U(1) \times SU(2)$ et $SU(2) \times SU(2)$ sont eux aussi changés : il faut y permuter circulairement P, Q, R. Ainsi, pour l'équation (1) où l'on remplace P par Q, les générateurs A, B, C, D, sont à remplacer par :

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2}(\Gamma_{23} - \Gamma_{01} Q) \\ B' &= \frac{1}{2}(Q - \Gamma_{0123}) \\ C' &= \frac{1}{2}(\Gamma_0 R - \Gamma_{123} P) \\ D' &= \frac{1}{2}(\Gamma_{123} R + \Gamma_0 P) \end{aligned} \tag{56}$$

La dynamique est la même, car les groupes sont isomorphes. Mais il s'agit néanmoins de groupes distincts. Il est donc normal que le modèle standard ait été amené à traiter séparément chaque génération.

Si les équations d'onde des leptons d'une génération sont du type (17) ou (25), et si celle des quarks sont du type (1), et si le groupe d'unification aux hautes énergies est le groupe $SO(8)$, alors il doit y avoir conservation à la fois du nombre quantique leptonique et du nombre quantique baryonique. L'utilisation de $SU(5)$ comme groupe d'unification autorisait une transformation des quarks en leptons, ce qui violait la conservation du nombre baryonique et autorisait la désintégration du proton. La désintégration du proton a été recherchée, mais n'a pas été observée. Avec le groupe des transformations orthogonales $SO(8)$, l'onde complète Φ d'un quark ne peut en aucun cas être transformée en l'onde gauche Φ_L d'un lepton. Aucune transformation du groupe de jauge ne peut transformer un quark en lepton, ce qui rend impossible la désintégration du proton. Par contre le groupe de jauge complet peut transformer un lepton d'une génération en un lepton d'une autre génération, un neutrino de l'électron en un neutrino du muon, par exemple. On cherche actuellement à mettre en évidence un phénomène de ce type pour justifier le déficit des antineutrinos électroniques sortant du Soleil.

L'utilisation, en plus de l'équation de Dirac (1), d'équations pour des ondes chirales comme (17) nécessite un réexamen complet de la conjugaison de charge. Celle-ci apparaît, dans l'étude des interactions faibles comme une symétrie CP et non pas comme une symétrie C. Le passage du monde des particules au monde des antiparticules ne change pas seulement le signe des charges, il change aussi la chiralité : si le neutrino est gauche, l'antineutrino est droit. La conjugaison de charge comporte donc l'échange de J et de J', et un changement de signe dans toutes les formules des générateurs : dans l'antimonde, on doit remplacer A, B, C, D, par :

$$\begin{aligned} A^c &= \frac{1}{2}(\Gamma_{23} + \Gamma_{01}P) \\ B^c &= \frac{1}{2}(P + \Gamma_{0123}) \\ C^c &= \frac{1}{2}(\Gamma_0 Q + \Gamma_{123}R) \\ D^c &= \frac{1}{2}(\Gamma_{123}Q - \Gamma_0 R) \end{aligned} \tag{57}$$

Et il en est de même pour les X_i et les Y_i. Si l'interprétation de nos groupes de jauge est correcte, le changement de chiralité fait que, dans l'antimonde, les interactions électro-faibles transforment la partie droite des ondes et les interactions fortes la partie gauche. La raison pour laquelle les antileptons sont insensibles aux interactions fortes est la même, à savoir qu'il leur manque ce sur quoi agissent les interactions fortes.

L'auteur remercie sincèrement G. Lochak pour les nombreuses discussions qui ont précédé et enrichi cet article, et pour l'attention qu'il a recommandée pour les solutions chirales de l'équation de Dirac, à la base de sa théorie du monopôle magnétique [5].

Références

[1] C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux (première partie)*, Ann. Fond. Louis de Broglie, à paraître.

[2] G. Sterman: *An introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1993

[3] Robert N. Cahn and Gerson Goldhaber : *The Experimental Foundations of Particle Physics*, Cambridge University Press, 1989

[4] H. Georgi ans S.L. Glashow : *Unity of all Elementary-Particle Forces*, Physical Review Letters, **32** n° 8, 1974

[5] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* $\frac{1}{2}$. Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n° 4 1983 et **9** n° 1 1984

G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* $\frac{1}{2}$ *magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985

G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992

(Manuscrit reçu le 28 octobre 1999)