

Sur un déplacement des franges d'interférences électroniques dans un potentiel magnétique sans champ

G. LOCHAK

Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris

RÉSUMÉ. On montre que si l'on crée un phénomène d'interférence ou de diffraction dans un potentiel magnétique sans champ (par exemple dans un tore de Tonomura), tel que les trajectoires électroniques n'entourent aucune ligne d'induction, on observera quand-même un déplacement des franges et même un changement d'interfrange. Il faut un angle entre le potentiel et le faisceau incident. Avec des électrons rapides les effets sont du premier ordre en $(eA)/(mv)$ (quotient des deux termes du vecteur d'onde de de Broglie). On calcule aussi l'effet pour des électrons lents. On compare le raisonnement local (employé ici) au raisonnement global qui utilise des intégrales circulaires, et l'on montre que celui-ci commet l'erreur de ne pas distinguer entre les trajectoires de phase et les trajectoires électroniques, ce qui l'empêche de prévoir les effets étudiés ici. On propose enfin une variante de l'expérience d'Aharonov-Bohm telle qu'aucune trajectoire fermée n'entoure des lignes d'induction. Le raisonnement local prévoit que l'effet demeure, le raisonnement global prévoit qu'il disparaît.

ABSTRACT. It is shown that, if an interference or a diffraction phenomenon is created in a magnetic fieldless potential (for instance owing to a Tonomura torus) and without possibility that electronic trajectories surround any induction vector, a shifting of fringes will appear and even a change of the interfringe. An angle is needed between the potential and the incident beam. With rapid electrons the shifting is of the first order in $(eA)/(mv)$ (quotient of the two terms of de Broglie's wave-vector). The case of slow electrons is also examined. Finally we compare the local method (applied here) to the global method based on circular integrals and we show that the latter confuses phase and electron trajectories, which prevents it to predict the phenomena that are the subject of the present paper. A new variant of Bohm-Aharonov experiment is suggested, in which the closed curves defined by pairs of

trajectories coming from Young slits cannot surround any induction vector, so that the integral of on such curves is always equal to zero. According to the local method the effect must subsist, according to the global method, it disappears.

1. Introduction

Le présent exposé fait suite à la récente proposition, faite par Olivier Costa de Beauregard et moi-même, de tenter des expériences d'interférence ou de diffraction électronique au voisinage du centre d'un tore magnétique à la Tonomura, afin de mettre en évidence une vieille formule de Louis de Broglie qui se trouvait dans sa Thèse et sur laquelle il est revenu par la suite, mais qui n'a encore jamais été soumise à l'expérience. Il s'agit de l'extension de la formule de la longueur d'onde à un domaine où règne un potentiel magnétique \mathbf{A} :

$$h\mathbf{k} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p}; \quad p = |m\mathbf{v} + e\mathbf{A}|$$

($\mathbf{k} = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right) \mathbf{n}$ = vecteur d'onde, p = moment de Lagrange, ν = fréquence, V = vitesse de phase, λ = longueur d'onde)

De telles expériences sont intéressantes pour plusieurs raisons :

- 1) La vérification de la formule (1), qui repose *uniquement* sur l'identité des principes de Fermat et de moindre action. Seuls les principes jouent un rôle ici. Les équations de la mécanique quantique ne font que répéter.
- 2) La manière dont intervient le potentiel magnétique dans la formule (1) montre que celle-ci n'est pas invariante de jauge.
- 3) Si le déplacement des franges est confirmé par l'expérience, il ne sera dû qu'au potentiel car aucune ligne d'induction n'intervient. La force engendrée ne s'exerce qu'à travers la longueur d'onde et constitue une force *d'inertie*, comme en général les forces dues à l'onde de de Broglie, qui sont à l'origine des phénomènes d'interférence et de diffraction. De Broglie a remarqué dès ses premières notes [1] que la diffraction des particules matérielles viole la conservation de l'impulsion et donc le principe de Galilée, puisque des particules sont déviées de leur mouvement inertiel en l'absence de forces extérieures et sans heurter d'obstacle (à moins que l'onde n'exerce une pression sur la matière). L'onde impose donc une généralisation du principe d'inertie, dont l'expression habituelle n'est valable qu'en l'absence d'effets de diffraction.

4) Enfin, de telles expériences mettraient en évidence, mieux que ne le font les expériences habituelles, les relations exactes entre l'onde et la particule dans un phénomène d'interférence. Rappelons quelques principes :

- a) *Tout est commandé par l'onde* et les raisonnements de Fresnel s'y appliquent. Les particules (photons inclus) n'interfèrent pas "entre elles" mais *une par une*. Toutes les interférences sont réalisables par quanta isolés et souvent ne peuvent l'être autrement. La cohérence de phase n'est due qu'à l'onde. Même les bosons ne sont liés que par l'onde ; les électrons, en tant que fermions, sont indépendants en phase (la supraconductivité est autre chose). Il n'y a aucun sens à parler d'"électrons cohérents passant chacun par une fente". Nous ne pouvons parler que d'une particule à la fois, mais nous ignorons par quelle fente passe un électron, sauf à détruire l'interférence.
- b) La *longueur d'onde* seule permet de calculer les déphasages. Elle est définie par le moment de Lagrange, puisque $\lambda = \frac{h}{p}$. Dans le cas habituel $p = m\mathbf{v}$ mais ici :

$$p = |m\mathbf{v} + e\mathbf{A}|$$

et c'est cette longueur du moment de Lagrange qui intervient dans les calculs. Parler d'un déphasage dû à $m\mathbf{v}$, auquel "s'ajouterait", le long d'un prétendu "trajet", le déphasage dû à $e\mathbf{A}$, est absurde car on mélange ainsi des directions différentes.

- c) Les déphasages se calculent le long de *la normale à l'onde*, portée par le vecteur d'onde \mathbf{k} défini en (1).
- d) L'onde se propage à la vitesse de phase V . De même que la fréquence ν , la vitesse V n'est définie qu'en relativité [2]. Ces deux grandeurs sont fausses chez Schrödinger mais exactes chez Klein-Gordon et chez Dirac. Elles ne sont pas directement mesurées mais elles se déduisent de la longueur d'onde, en relativité [2].
- e) Enfin, les électrons ne vont pas à la vitesse de phase V (du reste plus grande que la vitesse de la lumière), mais à la *vitesse de groupe*. Ce résultat de de Broglie est intuitif car la vitesse de groupe est celle d'un paquet d'ondes, donc de l'énergie et finalement de la particule.

Mais elle ne joue pas de rôle dans les expériences habituelles de diffraction des électrons car *la propagation de l'onde et la vitesse des particules y ont parallèles*.

- f) Au contraire, dans les expériences que nous proposons, les deux vitesses fondamentales ne sont pas parallèles.
- La vitesse de phase va toujours le long de la *normale* à l'onde, tandis que la particule va à la vitesse de groupe, le long d'un *rayon* qui n'est plus parallèle à la normale.
 - Les interférences continuent d'être commandées par des différences de phase le long de la normale, mais les *lignes de cohérence de phase* ne sont plus observables. Elles commandent les *franges observables* sur lesquelles tombent les électrons mais ceux-ci tombent dans la direction du rayon et non de la normale à l'onde.

2. Problèmes posés par les interférences en présence d'un potentiel

Nous devons d'abord préciser la question : "Qu'est-ce qui est observable ?"

Un potentiel vecteur rend l'espace *anisotrope* et le transforme localement en un *crystal uniaxe* dont l'*axe optique* au voisinage de chaque point est parallèle au potentiel magnétique [2].

D'une façon analogue aux idées de Fresnel sur l'optique cristalline, chaque point de l'espace sera pris comme l'un des foyers d'un ellipsoïde des vitesses valable, en général, dans un petit voisinage mais qui, dans notre cas, sera valable dans tout l'espace car nous prendrons par la suite un *potentiel constant*. L'ellipsoïde est de révolution et s'écrit (l'axe des z est défini par \mathbf{A}) :

$$\frac{x^2 + y^2}{(mv)^2 - (eA)^2} + \frac{(z + eA)^2}{(mv)^2} = 1 \quad (2)$$

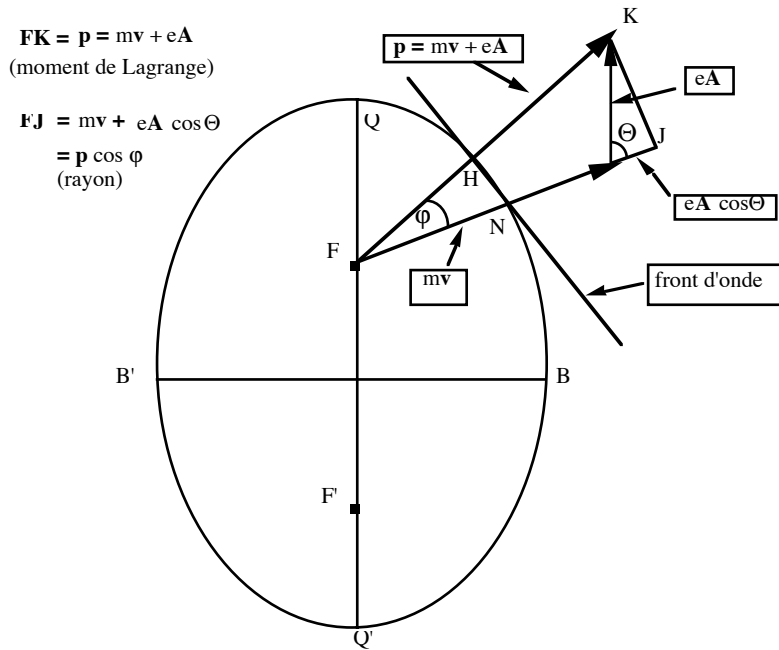


Fig . 1

La section par un plan passant par l'axe est une ellipse de paramètres :

$$\begin{aligned}
 a &= mv, \quad b = \sqrt{(mv)^2 - (eA)^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = (eA)^2 \\
 &\left(mv > eA \rightarrow (mv)^2 - (eA)^2 > 0 \right)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

La *vitesse normale* V de l'onde (*vitesse de phase*) est comptée le long de FK, qui est défini par le vecteur d'onde **k**, ou le moment de Lagrange **p**, car la phase est transportée par le *front d'onde*. C'est la longueur d'onde λ mesurée dans la direction **k**, qui définit les interférences.

Insistons encore sur la nécessité de ne pas confondre la direction des lignes de cohérence de phase FK avec la direction FJ des franges observables.

Contrairement à la vitesse de phase, la **vitesse de groupe ne dépend pas du potentiel**. En effet **superposons deux ondes** dans un

potentiel \mathbf{A} , avec une petite différence de vitesse \mathbf{v} (et donc de masse) :

$$\begin{aligned} \Psi &= \sin 2\pi \left\{ \nu t - \left(\frac{m\mathbf{v} + e\mathbf{A}}{h} \right) \cdot \mathbf{r} \right\} \\ &\quad + \sin 2\pi \left\{ (\nu + \delta\nu) t - \left[\frac{m\mathbf{v} + \delta \left(\frac{m\mathbf{v}}{h} \right) + e\mathbf{A}}{h} \right] \cdot \mathbf{r} \right\} \\ \rightarrow \Psi &= 2 \cos \pi \delta\nu \left\{ t - \frac{\partial \left(\frac{m\mathbf{v}}{h} \right)}{\partial \nu} \cdot \mathbf{r} \right\} \sin 2\pi \left\{ \nu t - \left(\frac{m\mathbf{v} + e\mathbf{A}}{h} \right) \cdot \mathbf{r} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

On voit que le potentiel \mathbf{A} n'apparaît que dans le second facteur, dans la **phase de l'onde**. L'**amplitude oscille lentement** avec la fréquence $\delta\nu$ et se propage à la vitesse $\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{m\mathbf{v}}{h} \right)}$ qui est la **vitesse de groupe de la particule libre : la vitesse \mathbf{v}** .

On peut être surpris que, contrairement à la vitesse de phase, la vitesse de groupe, et donc de l'énergie, ne dépende pas du potentiel [3]. Mais il en est de même en optique cristalline : alors que les phénomènes sont décrits en termes d'induction, donc en fonction de la polarisation électrique du milieu, la propagation de l'énergie est donnée par le vecteur de Poynting qui s'exprime en fonction des champs et non de l'induction. Cependant, la propagation de l'énergie (pour nous : les électrons) dépendra du potentiel par l'intermédiaire de la propagation de la phase, de même qu'en optique, la propagation de l'énergie est influencée par la polarisation du milieu.

Le calcul précédent vaut *avant* l'interférence mais il vaut aussi *après* car l'énergie de la particule se conserve, et donc la vitesse. Mais *la vitesse ne se conserve qu'en valeur absolue* : la direction change. On ne peut pas dire : "Les ondes se propagent à la vitesse de phase V dans la direction \mathbf{k} , tandis que les électrons continuent leur mouvement à la vitesse \mathbf{v} ". Car \mathbf{v} est en général déviée par \mathbf{k} .

3. Calcul du déplacement des franges d'Young

Nous allons faire le calcul dans trois cas : la vitesse des électrons incidents est parallèle au vecteur \mathbf{A} , orthogonale à \mathbf{A} ou sous un angle quelconque.

Premier cas : les électrons arrivent dans l'axe du tore, parallèlement à \mathbf{A}

On voit, Fig. 2, que le faisceau incident, l'axe du tore et le potentiel \mathbf{A} sont alignés sur Fz dans le plan de la figure, auquel le plan du tore est

orthogonal. Les fentes d'Young sont en F, au centre du tore, écartées de a sur une droite orthogonale à \mathbf{A} dans le plan de la figure.

Le cercle de rayon mv centré en F est décrit par tous les vecteurs mv des électrons diffractés par les deux fentes.

Par raison de symétrie, la frange centrale est sur l'axe Fz : aussi bien celle où la différence de phase est nulle, que celle où tombent les électrons parce que mv et \mathbf{A} ont ici la même direction.

Cherchons la frange suivante. On a : $\theta = (\mathbf{p}, Fz)$ angle de la frange correspondant à la différence de phase λ , $\varphi = (mv, \mathbf{p})$. Mais c'est $\Theta = (mv, e\mathbf{A})$ que nous cherchons : l'angle sous lequel tombent les électrons, qui coïncide ici avec (mv, Fz) . On a :

$$\Theta = \theta + \varphi \tag{5}$$

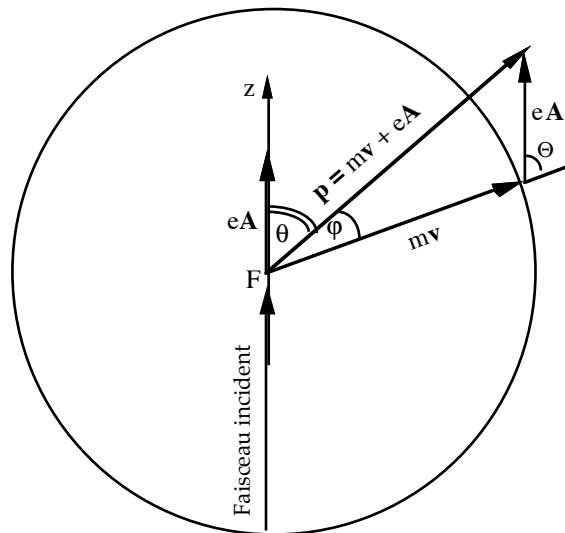


Fig. 2

L'écart θ du vecteur d'onde \mathbf{k} (ou du moment de Lagrange \mathbf{p}) par rapport à la direction incidente Fz est donné par la formule habituelle :

$$\theta \cong \sin \theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a |\mathbf{p}|} = \frac{h}{a |mv + e\mathbf{A}|} \tag{6}$$

(a = écart entre les fentes d'Young)

$$|\mathbf{p}| = p = \left[(mv)^2 + (eA)^2 + 2mv eA \cos \Theta \right]^{1/2} \tag{7}$$

Posons les définitions suivantes (on notera l'expression de ε) :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{eA}{mv} ; \quad \delta = \frac{h}{mva} \text{ (interfrange sans potentiel)} \\ \gamma &= [1 + 2\varepsilon \cos \Theta + \varepsilon^2]^{1/2} = (1 + \varepsilon \cos \Theta) \left[1 + \left(\frac{\varepsilon \sin \Theta}{1 + \varepsilon \cos \Theta} \right)^2 \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (8)$$

Remarque : La longueur d'onde est $\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{h}{p}$. La vitesse de phase est $V = h\nu p^{-1}$. En présence d'un potentiel \mathbf{A} , p est donné par (7) : $p = mv\gamma$. Dans le vide, on a $p_0 = mv$ avec la vitesse de phase $V_0 = h\nu p_0^{-1}$ et la même fréquence car $\nu = E/h$ ne dépend pas de \mathbf{A} . Donc $V_0/V = p/p_0 = \gamma$, et γ est le rapport entre les vitesses de phase dans le vide et dans le potentiel : **γ est donc l'indice de réfraction de l'onde de de Broglie, dû au potentiel.**

Maintenant, comme $p = mv \gamma \rightarrow \theta = \delta \gamma^{-1}$ on a :

$$\theta = \delta (1 + \varepsilon \cos \Theta)^{-1} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon \sin \Theta}{1 + \varepsilon \cos \Theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (9)$$

D'autre part, on voit Fig. 2 que :

$$p \cos \varphi = mv + eA \cos \Theta \quad (10)$$

d'où, en tenant compte de (8) :

$$\cos \varphi = \left[1 + \left(\frac{\varepsilon \sin \Theta}{1 + \varepsilon \cos \Theta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (11)$$

En développant (9) et (11) en ε , on trouve au premier ordre :

$$\theta = \delta(1 - \varepsilon), \quad \varphi = \varepsilon\Theta \rightarrow \Theta = \theta + \varphi = \delta(1 - \varepsilon) + \varepsilon\Theta \rightarrow \boxed{\Theta = \delta} \quad (12)$$

C'est le même résultat qu'en l'absence de potentiel. Il se confirme aux ordres supérieurs en ε et on le vérifie facilement dans le cas particulier $e\mathbf{A} = m\mathbf{v}$: on ne peut plus développer en $\varepsilon = \frac{eA}{mv}$, mais le calcul est trivial car le triangle Fig. 2 est isocèle, ce qui entraîne :

$$\varphi = \theta \rightarrow \Theta = 2\theta \quad (13)$$

On a d'après (7) :

$$p^2 = 2(mv)^2(1 + \cos \Theta) = 4(mv)^2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} \rightarrow p = 2 m v \cos \theta \quad (14)$$

d'où, grâce à (13) et (14) :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{ap} = \frac{h}{a(2 m v \cos \theta)} \\ \rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin 2\theta = \sin \Theta = \frac{h}{a m v} = \delta \end{aligned} \quad (15)$$

Finalement on retrouve : $\Theta \cong \delta$.

Ce résultat est-il étonnant ? Non car l'anisotropie de l'espace n'apparaît pas si le faisceau incident est parallèle à l'axe optique, il y a trop de symétrie. Comme le disait Pierre Curie : "C'est la dissymétrie qui crée le phénomène". Il faut un angle entre le faisceau incident et le potentiel.

Deuxième cas : les électrons arrivent orthogonalement au potentiel : près du tore et en incidence rasante.

La ligne des centres des fentes d'Young est orthogonale au faisceau incident et parallèle au potentiel magnétique. Il pourra être intéressant de joindre deux tores parallèles (Fig. 3).

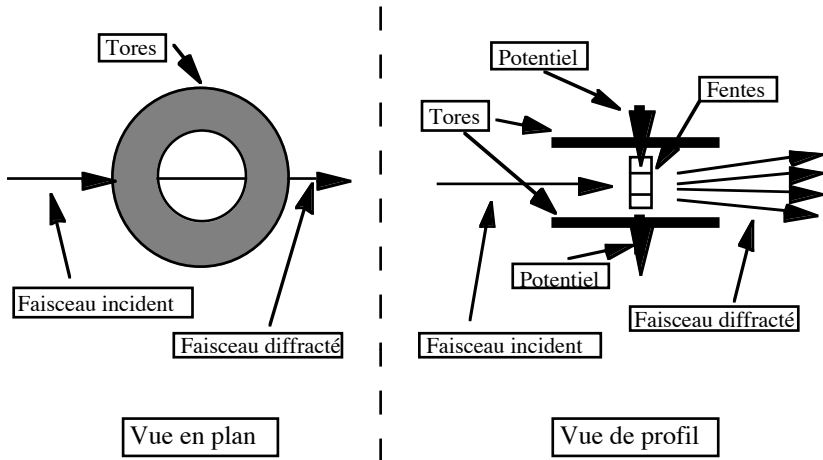


Fig. 3

Θ est ici un grand angle, le petit angle est l'écart α de mv par rapport au faisceau incident :

$$\alpha = (m\mathbf{v}, Fz) = \frac{\pi}{2} - \Theta \quad (17)$$

Nous aurons donc, au lieu de (9) et (11) :

$$\begin{aligned} \theta &= \delta (1 + \varepsilon \sin \alpha)^{-1} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon \cos \alpha}{1 + \varepsilon \sin \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2}; \\ \cos \varphi &= \left[1 + \left(\frac{\varepsilon \cos \alpha}{1 + \varepsilon \sin \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (18)$$

On trouve aussitôt, au premier ordre en ε et δ :

$$\theta = \delta; \quad \varphi = \varepsilon \quad (19)$$

Avec la nouvelle orientation de $e\mathbf{A}$, on a, au lieu de (5) :

$$\alpha = \theta - \varphi \quad (20)$$

La première frange observable, à droite de la frange centrale est :

$$\boxed{\alpha = \delta - \varepsilon} \quad (21)$$

Au premier ordre, l'interfrange δ n'est pas modifié par le potentiel \mathbf{A} , mais on confirme le déplacement $\alpha_0 = \frac{eA}{mv}$ de la figure d'interférence.

c) Première frange à gauche de Fz . Le calcul est le même que pour la première frange à droite, mais il est évident (Fig. 4) qu'il y a une dissymétrie parce que le moment \mathbf{p} et donc la longueur d'onde λ sont différents à droite et à gauche par suite de l'orientation de $e\mathbf{A}$. Cependant, une certaine symétrie apparaît dans la position des franges. Nous avons ici la relation :

$$\alpha = \theta + \varphi \quad (22)$$

et la première frange observable à gauche est :

$$\boxed{\alpha = \delta + \varepsilon} \quad (23)$$

en pleine analogie avec la formule (21) pour la frange de droite, malgré le changement de signe devant ε , parce que les angles ne sont pas

algébriques mais arithmétiques : ce sont des distances angulaires par rapport à Fz. Le terme δ est l'interfrange classique, comme auparavant, et le terme $+\varepsilon$ est un déplacement à gauche, exactement comme l'était le terme en $-\varepsilon$ dans la formule (21) pour la frange de droite.

d) Les autres franges. Elles sont données en substituant $n\lambda$ à λ dans la formule (6), et donc $n\delta$ à δ dans les formules (8) et suivantes.

On trouve ainsi, respectivement pour les franges droites et gauches :

$$\boxed{\alpha = n\delta - \varepsilon} ; \boxed{\alpha = n\delta + \varepsilon} \quad (24)$$

Au premier ordre, l'interfrange classique δ n'est donc pas modifié par le potentiel A, mais on trouve un déplacement

$$\alpha_0 = \frac{eA}{mv} = \varepsilon$$

de l'ensemble de la figure d'interférence.

e) Au second ordre, (18) donne un déplacement et un changement d'interfrange, pour les franges droites et gauches :

$$\alpha_d = (n\delta - \varepsilon) [1 - \varepsilon (n\delta - \varepsilon)] ; \alpha_g = (n\delta + \varepsilon) [1 - \varepsilon (n\delta + \varepsilon)] \quad (25)$$

Troisième cas : Un angle quelconque entre A et le faisceau.

Nous ne donnons la figure et le résultat que pour la frange centrale et celle de droite. Les angles α, θ et ϕ conservent leur définition, mais nous devons introduire l'angle Ω entre le potentiel et le faisceau (Fig. 5) :

$$\Theta = \Omega - \alpha ; \Omega = (e\mathbf{A}, Fz) \quad (26)$$

Il est réaliste de supposer que $\Omega \gg \alpha$, parce que α est un petit angle de diffraction, tandis Ω est une inclinaison du tore par rapport au faisceau, qui n'a de sens que si le faisceau peut passer à travers le tore.

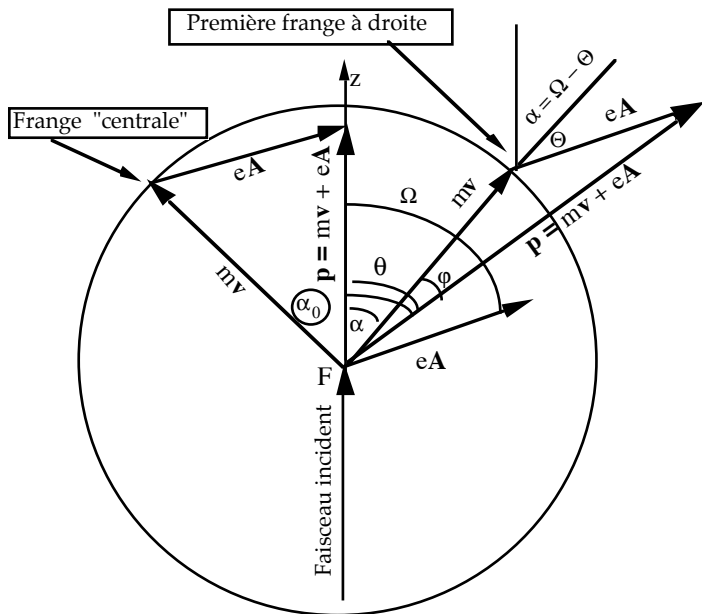


Fig. 5

Nous reprendrons les equations (9) and (11) en introduisant (26) et en developpant $\cos (\Omega - \alpha)$ et $\sin (\Omega - \alpha)$, ce qui donne :

$$\theta = \delta (1 - \varepsilon \cos \Omega) ; \varphi = \varepsilon \sin \Omega \tag{27}$$

Nous avons ici :

$$\alpha = \theta - \varphi \tag{28}$$

d'où la frange centrale :

$$\alpha_0 = \varepsilon \sin \Omega \tag{29}$$

La première frange à droite sera :

$$\alpha = \delta (1 - \varepsilon \cos \Omega) - \varepsilon \sin \Omega \tag{30}$$

En fait le terme $\varepsilon \cos \Omega$ est une correction du second ordre. C'est pourquoi, quand $\Omega = 0$ (faisceau parallèle à $e\mathbf{A}$) on trouve $\alpha_0 = 0$ comme dans le 1-er cas, mais pour la première frange on trouve $\alpha = \delta (1 - \varepsilon)$ au lieu de $\alpha = \delta$.

Par contre, si $\Omega = \frac{\pi}{2}$ (faisceau orthogonal à $e\mathbf{A}$) on trouve correctement $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha = \delta - \varepsilon$, comme dans le 2-ième cas.

La formule (30) montre que, malgré le fait que le parallélisme entre le faisceau incident et le potentiel magnétique annihile l'effet, on ne doit pas s'inquiéter d'un petit angle entre ces deux vecteurs.

Par exemple, si nous avons : $\Omega = (e\mathbf{A}, Fz) = 80^\circ$, c'est à dire un angle de 20 deg entre le faisceau et le plan du tore, la formule (30) donne :

$$\alpha = \delta (1 - 0,17 \varepsilon) - 0,98 \varepsilon \quad (31)$$

La différence avec le résultat de la formule (21) est très petite.

4. Méthode générale pour le calcul des franges dans d'autres cas

La méthode est donnée par les formules (7), (9), (10) sans introduire ε qui n'est pas nécessairement petit :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \delta \left[(mv)^2 + (eA)^2 + 2mv eA \cos \Theta \right]^{-1/2} \\ \cos \varphi &= (mv + eA \cos \Theta) \left[(mv)^2 + (eA)^2 + 2mv eA \cos \Theta \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (32)$$

Premier exemple : électrons lents dans le cas particulier $eA = mv$

Nous l'avons déjà vu avec les formules (13), (14), (15) dans le 1-er cas ($Fz // e\mathbf{A}$). Nous prendrons cette fois le 2-ième cas beaucoup plus intéressant ($Fz \perp e\mathbf{A}$).

Nous ne ferons que l'esquisser.

Revenons à la Fig. 4 avec $eA = mv$. Il apparaît aussitôt qu'il ne peut pas y avoir d'égalité de phase au centre, sinon le triangle isocèle serait rectangle, mais avec l'hypothénuse égale à un côté de l'angle droit ! De même il ne tombe pas d'électrons au centre, sinon on aurait $\theta = \pi/4$, ce qui est impossible car θ dépend de δ . D'autre part, on voit sur la figure :

$$\varphi = \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta; \quad \alpha = \theta - \varphi \quad (33)$$

et l'on tire de (32) :

$$\sin \theta = \frac{\delta}{2 \cos \frac{\Theta}{2}} = \frac{\delta}{2 \cos \varphi} = \frac{\delta}{2 \sin \theta} \quad \rightarrow \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{\delta}{2}} \quad (34)$$

D'où les franges, comptées à gauche ou à droite :

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2n\delta} \quad (35)$$

En fait, on ne verra que les franges de droite... et encore !

Deuxième exemple : électrons lents dans un cas plus général

a) On peut d'abord se placer au voisinage du cas particulier précédent :

$$mv = eA + \eta \quad (36)$$

Le calcul est très simple. Nous nous contenterons de le signaler.

b) On peut ensuite supposer, ce qui est possible, que $eA \gg mv$. Là encore, les calculs sont simples : ils se ramènent à (18), où la définition de ε est inversée mais il faudrait **réexaminer les angles et ne pas oublier que v reste la vitesse de groupe**.

Troisième exemple : les autres phénomènes d'interférence et de diffraction

Tous se traiteront par le même procédé :

a) **Les interférences sur un réseau ou sur un cristal.** Les résultats seront, *mutatis mutandis*, les mêmes que pour les fentes d'Young.

b) **La diffraction à travers une ouverture, une fente ou sur le bord d'un écran.**

La théorie classique, en optique, fournit une série de valeurs : $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \dots$ des angles de diffraction successifs (par exemple les franges de Fresnel sur un bord d'écran). Si nous introduisons ces valeurs dans les relations (32), en précisant dans chaque cas les relations du type (5) ou (20), comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous obtiendrons une série d'angles de concordance de phase $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \dots$ et de là nous tirerons la série d'angles $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n \dots$ ou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$ sous lesquels nous observerons les électrons.

5. Quelques remarques théoriques

Nous avons utilisé, pour le calcul des interférences, la formule de Fresnel (6) qui correspond à la Fig. 6. C'est en se basant sur cette formule que de Broglie soutenait que les interférences dépendent de la jauge. Il faisait remarquer que la simple expérience des fentes d'Young avec des électrons, en dehors de tout potentiel, fixe implicitement une jauge.

En effet, la différence de phase entre les chemins issus des deux fentes est :

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{a \theta}{\lambda} = \frac{a \theta mv}{h} \quad (37)$$

Si on ajoute $e\nabla\chi$ à l'impulsion cette différence change :

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{a \theta}{\lambda} = \frac{a \theta (mv + e\nabla\chi)}{h} \quad (38)$$

donc (37) fixe une jauge, même si le potentiel est nul. Mais Feynman a développé un argument différent à propos de l'effet Aharonov-Bohm [4]. Avant de le rappeler, faisons quelques remarques.

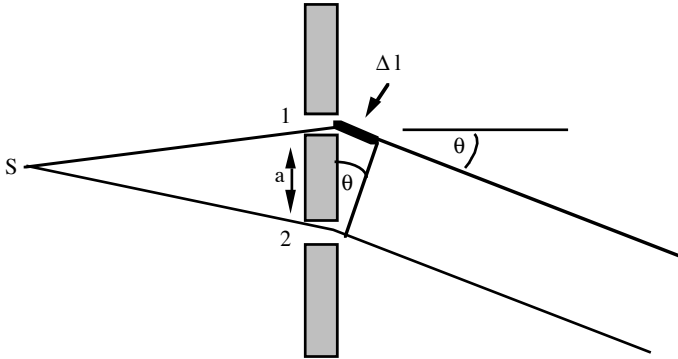


Fig. 6

Tout d'abord, Feynman ne dit pas que le potentiel magnétique s'ajoute au vecteur d'onde pour former un nouveau moment de Lagrange $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}$ qui gouverne les interférences à travers la loi (1) et change l'orientation de la vitesse de groupe dont il ne parle même pas. En somme, il n'indique pas le passage essentiel :

$$h\mathbf{k} = m\mathbf{v} \quad \rightarrow \quad h\mathbf{k} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (39)$$

Il traite séparément les deux termes de \mathbf{k} (en fait, il ne s'intéresse qu'à $e\mathbf{A}$) et ne distingue ni la vitesse de phase de la vitesse de groupe, ni la normale à l'onde de son rayon. Il ne voit pas que les électrons n'iront pas vers les points d'égale phase et que ceux-ci ne déterminent qu'indirectement les franges observables. Les angles qui apparaissent sur nos figures lui échappent.

On s'en rend difficilement compte en lisant son livre car dans l'effet Aharonov-Bohm, on a à peu près $m\mathbf{v}/e\mathbf{A}$ dans la partie active du potentiel, si bien qu'on ne s'aperçoit pas que *les intégrales sont prises chez lui sur des trajectoires électroniques et non sur des lignes de phase*. Ce n'est pas grave dans le cas particulier qu'il étudie, mais le résultat serait faux dans un cas plus général : il suffit de regarder la Fig. 4 pour voir que si le déphasage était pris dans la direction $m\mathbf{v}$ au lieu de $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}$, en oubliant que la longueur d'onde est celle définie en (1), on trouverait un résultat faux.

Feynman sépare la phase en l'absence de solénoïde (Fig. 7), qu'il désigne par Φ ($\mathbf{B} = 0$), du déphasage dû au potentiel \mathbf{A} . Et il écrit une différence de phase entre les deux "chemins" sans qu'on sache s'il s'agit de lignes de phase ou de trajectoires électroniques :

$$\delta\Phi = [\Phi_1 (\mathbf{B} = 0) - \Phi_2 (\mathbf{B} = 0)] + \left[\int_{(1)} \frac{e\mathbf{A}}{h} \cdot ds - \int_{(2)} \frac{e\mathbf{A}}{h} \cdot ds \right] \quad (40)$$

A première vue, on pourrait croire que cette formule retrouve (37). En effet, si on se rappelle que : $\Phi (\mathbf{B} = 0) = \int \frac{m\mathbf{v}}{h} \cdot ds$, (40) s'écrira :

$$\delta\Phi = \int_{(l_1 - l_2)} \frac{m\mathbf{v} + e\mathbf{A}}{h} \cdot ds \cong (l_1 - l_2) \frac{|m\mathbf{v} + e\mathbf{A}|}{h} = \frac{\Delta l}{\lambda} \quad (41)$$

ce qui redonne bien (37). Mais en réalité, j'ai fait deux hypothèses :

- a) J'ai supposé que la longueur d'onde est donnée par la formule (1) ce que Feynman ne dit pas ;
- b) En écrivant $(l_1 - l_2) |m\mathbf{v} + e\mathbf{A}|$ au second membre de (41), dans la formule de la moyenne, je suppose implicitement que l'intégrale est prise le long de la courbe engendrée par \mathbf{k} , donc en suivant la normale à l'onde, ce que Feynman ne fait à aucun moment : il devrait donc s'introduire chez lui le cosinus de l'angle entre \mathbf{k} et le chemin d'intégration.

Cela étant, on retrouve dans (41) le problème de la jauge car si l'on ajoute $\nabla\chi$ au potentiel, on ajoute un déphasage (sauf pour la frange centrale) :

$$\delta'\Phi = \cong (l_1 - l_2) \frac{e\nabla\chi}{h} \quad (42)$$

Mais en réalité, Feynman s'intéresse qu'au second crochet de (40), qu'il

écrit sous la forme d'une intégrale sur un circuit fermé :

$$\int_{(1)} \frac{e\mathbf{A}}{h} \cdot ds - \int_{(2)} \frac{e\mathbf{A}}{h} \cdot ds = \int_{(1-2)} \frac{e\mathbf{A}}{h} \cdot ds \quad (43)$$

C'est dans cette formule qu'apparaît l'invariance de jauge et l'induction car :

$$\int \mathbf{A} \cdot ds = \int \int \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\sigma = \int \int \mathbf{B} \, d\sigma \quad (44)$$

Ainsi, l'effet Aharonov-Bohm semble dû au flux d'induction à travers la boucle formée par les deux chemins suivis par les électrons, mais c'est parce qu'on a confondu les lignes orthogonales aux surfaces d'égale phase avec les trajectoires électroniques. Notons en outre que, dans cette intégrale circulaire, *on a perdu la localisation des franges d'interférence.*

Enfinement, on a une intégrale invariante de jauge mais elle ne décrit pas le phénomène parce que : a) le chemin d'intégration ne convient pas au calcul de la phases ; b) la véritable longueur d'onde n'apparaît pas ; c) on ne sait plus où se trouvent les franges observables.

Tout se gomme plus ou moins dans l'effet Aharonov-Bohm car les lignes de phases et les trajectoires électroniques diffèrent peu les unes des autres, mais ce n'est pas le cas des phénomènes décrits dans notre article.

Ajoutons encore que, d'après Feynman, si le flux est nul, le déphasage est nul.

D'après lui, les effets étudiés ici sont nuls parce qu'ils sont dans un *potentiel uniforme*, donc dans un champ de gradient. On a en effet :

$$\mathbf{A} = \nabla U ; \quad U = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \quad (45)$$

Il en sera de même pour n'importe quel potentiel vecteur sans champ dans un domaine connexe D , car on aura $\mathbf{rot} \mathbf{A} = 0$ et $\int_l \mathbf{A} \cdot ds = 0$ sur tout circuit fermé dans D et il existera donc un potentiel scalaire U tel que $\mathbf{A} = \nabla U$. En particulier, il en sera ainsi pour le potentiel \mathbf{A} créé par un tore magnétique. En effet, le potentiel d'un dipôle \mathbf{M} est égal à :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (46)$$

Or, un tore magnétique n'étant rien d'autre qu'un collier de dipôles, il aura pour potentiel (en désignant par Φ le flux piégé dans le tore) :

$$\mathbf{A} = \Phi \int_l \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{47}$$

et l'on voit aussitôt que :

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \rightarrow \mathbf{A} = \Phi \int_l \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{s} \tag{48}$$

Le potentiel d'un tore est donc un champ de gradient¹. Ceci devrait, d'après Feynman, annuler tous les effets étudiés ici, mais je prétends qu'ils existent.

En somme, cet article propose un test entre le local et le global.

Ajoutons que, si l'on interprète l'effet Aharonov-Bohm par un raisonnement local (Fig. 7), l'effet est simplement dû à ce que $\frac{e\mathbf{A}}{h}$ s'ajoute au vecteur d'onde sur l'un des chemins et se retranche de l'autre, sans qu'il soit besoin d'invoquer une induction entourée par un chemin d'intégration.

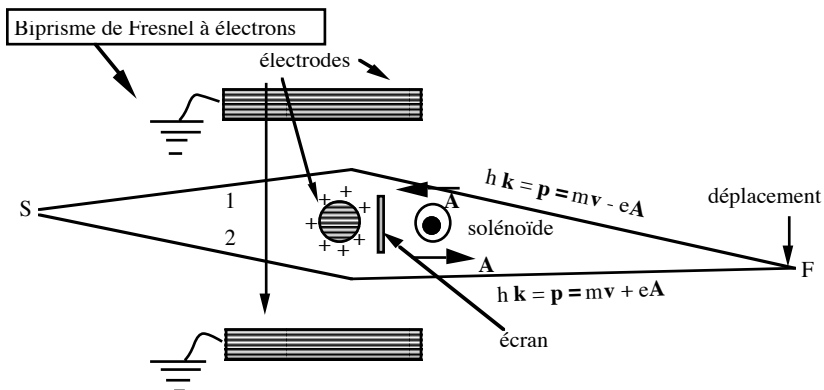


Fig. 7

¹Il faut se rappeler que \mathbf{r} joint un point courant du tore au point où \mathbf{A} est défini. Le gradient est pris par rapport à ce dernier point, et le point sur le tore n'est qu'un paramètre.

On peut donc faire la variante suivante de l'effet Aharonov-Bohm :

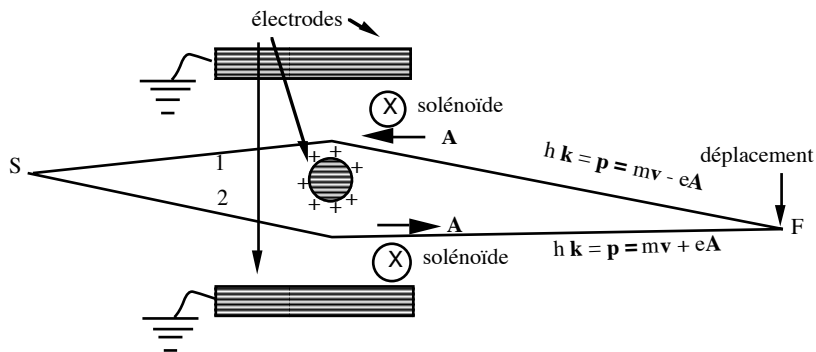


Fig. 8

On remplace le solénoïde entre les deux fentes par deux solénoïdes situés de part et d'autre (Fig. 8). D'après le raisonnement local, l'effet demeure, d'après le raisonnement global, il disparaît.

Remerciements : Je voudrais avant tout remercier mon ami Costa de Beauregard qui a soulevé bien avant moi les questions abordées dans ce travail, avec qui je collabore depuis longtemps et dont je partage l'essentiel des idées sur les potentiels électromagnétiques. Je dois beaucoup également aux questions, conseils et commentaires de Daniel Fargue, toujours guidé par une étonnante intuition. Enfin, je suis redevable à Georges Mourier, "fidèle adversaire" dont le harcèlement critique m'a conduit à préciser certains arguments.

Références

- [1] Louis de Broglie, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, **177**, 1923, p. 548.
- [2] Louis de Broglie, *Thèse de 1924*, Annales de Physique, 10e série, **III**, 1925 réimpression : Annales de la Fondation Louis de Broglie, **17**, 1992, p. 1.
Ondes et mouvements, Gauthier-Villars, Paris, 1926 (réimpression : Jacques Gabay, Paris, 1988)
Optique électronique et corpusculaire, Hermann, Paris, 1950

[3] Dans sa *Thèse*, de Broglie a établi ce résultat, en présence d'un potentiel, et a montré que c'est une conséquence des équations de Hamilton.

[4] R. Feynman, *The Feynman Lectures on physics*, vol. 2, Ch. 15, § 5.

(Manuscrit reçu le 29 mai 2000)