Conception géométro-différentielle d'une particule étendue à symétrie de Poincaré, quantification du champ associé par la méthode des représentations induites, interprétation Lagrangienne.

A.Smida, A.H Hamici, M.Hachemane

Institut de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, B. P. 32 El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algeria.

RÉSUMÉ. Un modèle géométro-différentiel de particules étendues possédant une symétrie de Poincaré est considéré. Il peut être obtenu par la contraction selon Inönü-Wigner d'un fibré de de Sitter décrivant le hadron. La contraction d'un tel modèle est faite, dans ce travail, en n'identifiant pas les espaces tangents à la base et à la fibre. L'influence de cette contraction sur le courant de matière de de Sitter est utilisée pour déduire le courant dans le cas de Poincaré, et partant, une théorie lagrangienne de l'interaction. Le procédé de quantification du modèle à symétrie de de Sitter est appliqué aussi dans le cas de Poincaré. La particule étendue est considérée comme composée de modes internes ponctuels évoluant dans un espace interne de Minkowski. Cette interprétation est une modification de celle de la théorie fonctionnelle de Destouches qui est une généralisation de *la théorie de la double solution* de de Broglie. Le champ de particules est alors quantifié par la méthode des représentations induites et le champ de jauge est ignoré dans un premier cas et considéré comme classsique dans l'autre.

ABSTRACT. A Geometro-Differential model of extended particles with Poincaré symmetry is considered. It can be obtained by Inönü-Wigner contraction of a de Sitter bundle describing the hadron. The contraction of such a model is realized, in our work, with no identification of the tangent spaces to the base and the fiber. The influence of this contraction on the de Sitter matter current is used to deduce the current in the Poincaré case, and henceforth, a Lagrangian theory of interaction. The quantization procedure of the de Sitter model is applied again in the Poincaré case. The extended particle is considered as composed of pointlike internal modes evolving in an internal Minkowski space. This interpretation is a modification of that of the functional theory of Destouches which is a generalization of de Broglie's theory: théorie de la double solution. *The particles field is quantized then by the method* *of induced representations, ignoring the gauge field in a first case and considering it as classical in the other.*

1 Introduction

La mécanique quantique selon l'école de Copenhague, est basée sur trois notions fondamentales: La notion de mesure, la relation d'incertitude et la notion de fonction d'onde [1]. L'introduction de la relativité aboutit à une mécanique quantique incomplète, (des problèmes, tels la non existence d'opérateur position et de densité de courant, apparaissent) [1].

Ceci a mené certains à considérer les particules élémentaires comme étant étendues. Cette extension a une nature qui dépend de la théorie utilisée pour décrire ces particules. Par exemple, une théorie quantique Géométro-Stochastique a été construite en reconsidérant la notion de mesure [1, 2]. Celle-ci étant toujours entachée d'erreurs dues à l'imperfection des appareils, la particule doit être décrite non seulement par la fonction d'onde habituelle mais aussi par une distribution reflétant ces erreurs et incorporant un paramètre le longueur l_0 de l'ordre de la longueur de Planck. La mesure étant opérationnellement la seule connaissance que nous ayons de la particule, la distribution précédente peut être interprétée comme la fonction d'onde propre de la particule rendant compte de son extension stochastique [1]. L'introduction de la relativité dans cette théorie aboutit à une structure géométrique de fibré [2].

Un deuxième exemple est une théorie semi-classique reposant sur la structure de fibré depuis le début [3, 4]. L'extension de la particule est liée au rayon de courbure R d'un espace de de Sitter représentant son espace interne. Le fibré en question possède l'espace-temps comme base, l'espace interne de de Sitter comme fibre et le groupe de de Sitter comme groupe structural lié à l'interaction forte. L'interaction gravitationnelle peut être décrite par le sous-groupe de Lorentz déjà contenu dans le groupe de de Sitter ou-bien par un groupe de Lorentz supplémentaire indépendant de celui-ci. La contraction de cette structure a été réalisée selon Inönü-Wigner dans le premier point de vue [5]. La structure engendré est un fibré avec le même espace de base mais dont le groupe de jauge est le groupe de Poincaré. La fibre est l'espace de Minkowski engendré par la contraction de l'espace de de Sitter. Cet espace de Minkowski est identifié à l'espace tangent à la base de sorte que le sous-groupe de Lorentz représente la gravitation [5].

Dans ce travail, nous reconsidérons un modèle de particules étendues quantiques avec une symétrie de de Sitter [6]. La particule est supposée être composée de modes quantiques ponctuels. La structure géométrique est analogue à celle de la théorie Géométro-Stochastique (ou semi-classique), la quantification est réalisée par la méthode des représentations induites [7] et les interprétations physiques sont puisées de la théorie fonctionnelle de Destouches [8], généralisation de la théorie de la double solution de de Broglie. Précisément nous reconstruisons ce modèle pour une symétrie interne de Poincaré. L'utilisation du groupe de Poincaré comme groupe de symétrie interne a été motivé par le faite que les modes internes peuvent se mouvoir dans des espaces identiques aux espaces-temps et par le faite que le groupe de Poincaré est le contracté selon Inönü-Wigner du groupe de de Sitter. Si ce dernier est susceptible de représenter l'interaction forte, son contracté représentera une interaction qui, à notre avis pourrait être "une gravitation microscopique".

Dans le premier paragraphe, nous rappelons d'abord la structure géométrique du modèle semi-classique du hadron avec une symétrie de de Sitter [3], le courant de matière qui y a été défini [4] puis la contraction de cette structure selon Inönü-Wigner [5]. Cependant, nous n'effectuons pas l'identification entre l'espace tangent à la base et l'espace tangent à la fibre (l'espace de Minkowski engendré par la contraction). Ces deux espaces peuvent glisser l'un sur l'autre tout en restant tangent. Suite à cette contraction, nous obtenons un courant de matière composé d'une partie tensorielle et d'une partie vectorielle. Dans le second paragraphe, nous donnons un formalisme lagrangien au modèle obtenu par la contraction dans le premier paragraphe. Un lagrangien invariant sous les transformations de jauge du groupe $\widetilde{ISO}\,(3,1) \otimes U\,(1)$ est construit. Le premier groupe est le groupe de recouvrement du groupe de Poincaré représentant l'interaction microscopique et le second représente l'interaction électro-magnétique. Dans le troisième paragraphe, nous reprenons le modèle géométro-différentiel des particules quantiques étendues à symétrie de de Sitter [6] et nous l'appliquons aux particules à symétrie de Poincaré. Le champ des particules est quantifié par la méthode des représentations induites [7]. Le propagateur est obtenu dans le cas où les espaces tangents à la base et à la fibre ne sont pas identifiés et dans le cas contraire. Dans le premier, nous ignorons toutes les interactions. Dans le second, nous ne considérons que le champ de jauge de Poincaré engendré par la contraction. Ce champ de jauge n'est pas quantifié. Dans le quatrième paragraphe, nous donnons la conclusion.

2 Structure géométrique du modèle de la particule étendue à symétrie de Poincaré

Nous allons reprendre dans un premier temps la théorie de jauge de l'interaction forte basée sur une structure en fibré [3]. Cette théorie permettra, par contraction selon Inönü-Wigner, de construire une théorie de jauge qui décrira une particule qui ressent une interaction dont le groupe de symétrie est celui de Poincaré [5]. Il est sous entendu que l'espace de Minkowski, obtenu après contraction est identifié à l'espace tangent à la base; c'est à dire que le sous groupe de Lorentz est lié à la gravitation macroscopique. En suite, nous appliquerons la contraction en n'identifiant pas ces deux espaces et verrons les conséquences de ceci sur les courants.

La théorie semi-classique [3] est basée sur la structure en fibré de de Sitter suivante:

$$T^R(U_4) = \big(B = U_4; F = V_4^R = SO(4,1)/SO(3,1); G = SO(4,1)\big) \quad (1)$$

La base B est l'espace-temps de Riemann-Cartan, la fibre F est un espace quotient non compact isomorphe à l'hyperboloïde de de Sitter

$$\xi^a \xi_a = \xi^a \xi^b \eta_{ab} = -R^2 \,;\, \eta_{ab} = diag\,(1, -1, -1, -1, -1) \quad (2)$$

Le groupe structural est le groupe de de Sitter.

La matière hadronique est représentée par un champ d'onde bilocal bispinoriel $\Psi(x,\xi)$ qui est un produit d'un spineur de Lorentz φ et d'un spineur de de Sitter Φ:

$$\Psi(x,\xi) = \left(\Psi^{AA'}(x,\xi) = \varphi^A(x)\,\Phi_x^{A'}(\xi)\,;\, A, A' = 1,2,3,4\right) \quad (3)$$

C'est une section efficace [9] du fibré spinoriel $S^R(U_4)$:

$$S^R(U_4) = (B = C[L^R(U_4)]; F = C_4; G = USp\,(2,2)) \quad (4)$$

$C[L^R(U_4)]$ est une jauge sur le fibré principal de de Sitter $L^R(U_4)$ associé à $T^R(U_4)$, c'est à dire une section de $L^R(U_4)$ [5].

L'interaction forte est représentée par les coefficients $\Gamma_{\mu ab}(x)$ liés à la connexion spinorielle de $S^R(U_4)$ par:

$$\Gamma^R(x) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^R_{\mu ab} M^{ab}\right) dx^\mu \tag{5}$$

où M^{ab} est le générateur, de l'algèbre de Lie de $Usp(2,2)$ (groupe de recouvrement du groupe de de Sitter), défini en termes des matrices 4×4 de Dirac

$$M^{ab} = \frac{i}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right]; \qquad a,b = 0,1,2,3,5. \tag{6}$$

Si nous voulons rendre compte de la gravitation associée à un groupe $SO(3,1)$ indépendant de $SO(4,1)$, un terme supplémentaire devra être ajouté à la connexion précédente. La connexion prendra alors la forme

$$\Gamma(x) + \Gamma^R(x) = \frac{1}{2} dx^\mu \Gamma_{\mu ij} M^{ij} + \frac{1}{2} dx^\mu \Gamma^R_{\mu ab} M^{ab} \tag{7}$$

où $\Gamma_{\mu ij}$ sont les coefficients de rotations de Ricci et M^{ij} les générateurs du groupe de Lorentz. Ainsi, la dérivée covariante est

$$D\Psi(x,\xi) = \left(d + i\Gamma(x) + i\Gamma^R(x)\right)\Psi(x,\xi) \tag{8}$$

Ces termes définissent l'aspect géométrique de la théorie du hadron. Or la matière hadronique influence localement la géométrie du fibré en y générant une courbure locale de de Sitter, dont le tenseur $R^R_{\mu\nu ab}(x)$, lié à la connexion de de Sitter Γ^R, obéit à l'équation courant-courbure [4]:

$$D^\mu R^R_{\mu\nu ab} = \overline{\chi} J_{\nu ab}(x) \tag{9}$$

Le courant est

$$J_{\nu ab}(x) = \int_{V_4^R} \overline{\Psi}(x,\xi)\left(\gamma_v \otimes M_{ab}\right)\Psi(x,\xi)\, d\mu(\xi) \tag{10}$$

Le conjugué du champ et la mesure invariante de l'espace de de Sitter sont respectivement donnés par

$$\overline{\Psi}(x,\xi) = \overline{\varphi}(x)\,\overline{\Phi}_x(\xi) \tag{11}$$

et

$$d\mu(\xi) = \frac{1}{\mid \xi^5 \mid^2} d\xi^0 \wedge d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3 \tag{12}$$

Le courant peut se mettre sous la forme

$$J_{\nu ab}\left(x\right) = j_{\nu}^{D}\left(x\right) F_{ab}\left(x\right) \tag{13}$$

où $j_{\nu}^{D}\left(x\right)$ est le courant conventionnel de Dirac correspondant au champ quantique décrivant les particules ponctuelles dans l'espace-temps de Minkowski, et

$$F_{ab}\left(x\right) = \int_{V_{4}^{R}} \overline{\Phi}_{x}\left(\xi\right) M_{ab} \Phi_{x}\left(\xi\right) d\mu\left(\xi\right) \tag{14}$$

peut être interprété comme un facteur de forme lié à la partie interne de de Sitter.

Dans le but d'obtenir une structure géométrique de base susceptible de décrire une particule qui possède le groupe de Poincaré comme groupe de symétrie, la théorie de l'interaction forte précédente est contractée selon Inönü-Wigner. Ce processus implique la contraction du groupe structural, de la fibre et donc du fibré de de Sitter [5].

Lorsque la contraction est réalisée, le groupe de de Sitter se réduit au groupe de Poincaré, et l'espace interne se réduit à l'espace tangent de Minkowski. Deux alternatives s'offrent à nous:

L'espace interne ainsi obtenu est identifié à l'espace tangent à la base. La sous-symétrie de Lorentz contenue dans la symétrie de Poincaré est alors liée à la gravitation [5].

Nous pouvons laisser agir les deux symétries parallèlement, la symétrie de de Sitter liée à l'interaction forte qui agit dans l'espace interne et une symétrie de Lorentz indépendante liée à la gravitation qui agit dans l'espace-temps [3]. Dans ce travail, nous adopterons ce dernier point de vue. Après contraction, nous obtenons une symétrie de Poincaré et une symétrie de Lorentz qui sont indépendantes et qui agissent respectivement dans l'espace des variables internes et dans l'espace-temps.

La contraction du modèle du hadron utilise la contraction selon Inönü-Wigner de l'algèbre de Lie de de Sitter. Nous étudierons les conséquences de cette contraction sur le courant de matière $J_{\nu ab}\left(x\right)$.

L'algèbre de Lie du groupe de de Sitter peut se mettre sous la forme de la somme de la sous-algèbre de Lorentz et du quadri-espace vectoriel correspondant aux transformations propres de de Sitter [5]. Ces espaces peuvent être respectivement générés par les opérateurs:

$$M^{ij} = \frac{i}{4}\left[\gamma^i, \gamma^j\right]; \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{15}$$

et

$$\Pi_i = \frac{1}{R} M_{5i} = \frac{1}{R} L_{5i}; \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{16}$$

L'opérateur différentiel $L_{ab} = i\left(\xi_a \partial_b - \xi_b \partial_a\right)$ satisfait aux mêmes relations de commutation que les générateurs de l'algèbre de de Sitter [3]. M^{ij} et Π_i satisfont aux relations de commutation suivantes [5]

$$i\left[M_{ij}, M_{kl}\right] = \eta_{ik} M_{jl} + \eta_{jl} M_{ik} - \eta_{il} M_{jk} - \eta_{jk} M_{il} \tag{17}$$

$$i\left[\Pi_i, M_{jk}\right] = \eta_{ik} \Pi_j - \eta_{ij} \Pi_k \tag{18}$$

$$\left[\Pi_i, \Pi_k\right] = -\frac{1}{R^2} M_{ik} \tag{19}$$

avec $\eta_{ik} = diag\left(1, -1, -1, -1\right)$.

Ces relations de commutation deviennent, à la limite $\epsilon = \frac{1}{R} \to 0$ et au point $\xi_0 = (0, 0, 0, 0, -R)$ pour la relation (16) [5]

$$i\left[M_{ij}, M_{kl}\right] = \eta_{ik} M_{jl} + \eta_{jl} M_{ik} - \eta_{il} M_{jk} - \eta_{jk} M_{il} \tag{20}$$

$$i\left[P_i, M_{jk}\right] = \eta_{ik} P_j - \eta_{ij} P_k \tag{21}$$

$$\left[P_i, P_k\right] = 0 \tag{22}$$

où

$$P_i = i\widetilde{\partial}_i; \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{23}$$

$\widetilde{\partial}_i$ est un opérateur différentiel dans l'espace des variables internes (fibre) qui sera donné plus loin. On constate donc que M^{ij} et P_i sont les opérateurs qui génèrent l'algèbre de Poincaré.

Lors de la contraction, la fibre V_4^R, caractérisée par l'hypersurface

$$\xi^i \xi^j \eta_{ij} - \widetilde{\xi}^5 \widetilde{\xi}^5 R^2 = -R^2 \ \ avec \ \ \widetilde{\xi}^5 = \frac{\xi^5}{R} \tag{24}$$

se réduit à deux hyperplans isomorphes à $ISO\,(3,1)\,/SO\,(3,1)$ définis par $\widetilde{\xi}^5 = \pm 1$ et $\widetilde{\xi}^i$ quelconque. Seul l'hyperplan $\widetilde{\xi}^5 = -1$ possède un point de contact avec la base qui représente l'origine de la fibre et peut être soudé à la base [5].

La structure géométrique de base ainsi obtenue est

$$T\,(U_4) = (B = U_4; F = M_4; G = ISO(3,1) \otimes SO\,(3,1)) \tag{25}$$

La base est toujours l'espace-temps de Riemann-Cartan, la fibre est un espace plan interne de Minkowski réalisé comme un espace quotient $M_4 = ISO\,(3,1)\,/SO\,(3,1)$. Le groupe structural est le produit du groupe de Poincaré représentant une interaction microscopique qui agit sur les variables internes et du groupe de Lorentz représentant l'interaction gravitationnelle macroscopique. Les coordonnées dans la fibre sont notées $\widetilde{x}$ et les générateurs des translations dans cette même fibre sont représentés par les opérateurs différentiels:

$$P_i = i\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i} \tag{26}$$

La connexion devient [5]

$$\widetilde{\Gamma}_\mu\,(x) = \frac{1}{2}\widetilde{\Gamma}_{\mu ij}\,(x)\,M^{ij} + v^i_\mu\,(x)\,P_i + \Gamma_\mu \tag{27}$$

$\widetilde{\Gamma}_{\mu ij}\,(x)$ et $v^i_\mu\,(x)$ sont respectivement les champs de jauge liés à la partie rotationnelle et les 16 champs de jauge liés à la partie translationnelle du groupe de Poincaré et Γ_μ est la connexion gravitationnelle classique [10]. Les champs de matière sont, conformément à (3), de la forme

$$\Psi\,(x, \widetilde{x}) = \varphi\,(x)\,\Phi_x\,(\widetilde{x}) \tag{28}$$

Nous définissons également le courant de matière par contraction du courant $J_{\mu ab}\,(x)$; à la limite $R \to \infty$, ce courant se scinde en 2 courants $\{J_{\mu ij}\,(x)\ ;\ J_{\mu i}\,(x)\}$.

$$J_{\mu ij}\,(x) = j^D_\mu\,(x) \int_{M_4} \overline{\Phi}_x\,(\widetilde{x})\,M_{ij}\Phi_x\,(\widetilde{x})\,d\mu\,(\widetilde{x}) \tag{29}$$

et

$$J_{\mu i}\left(x\right)=j_{\mu}^{D}\left(x\right)\int_{M_{4}}\overline{\Phi}_{x}\left(\widetilde{x}\right)P_{i}\Phi_{x}\left(\widetilde{x}\right)d\mu\left(\widetilde{x}\right) \tag{30}$$

$d\mu\left(\widetilde{x}\right)=d\widetilde{x}^{0}\wedge d\widetilde{x}^{1}\wedge d\widetilde{x}^{2}\wedge d\widetilde{x}^{3}$ est la mesure invariante sur M_4. Il y a un courant dû à la partie lorentzienne et une contribution de la partie translationnelle.

Lorsque l'espace tangent à la base et l'espace tangent à la fibre sont identifiés, seuls les champs $\widetilde{\Gamma}_{\mu ij}\left(x\right)$ et $v_{\mu}^{i}\left(x\right)$ doivent être considérer. Une théorie de jauge du groupe de Poincaré a été construite dans ce sens en définissant la structure géométrique d'emblée et non pas par contraction [10]. La matière microscopique est décrite par un champ scalaire[1] $\Phi_x(\tilde{x},\tilde{y})$, au lieu de (28), au moyen duquel sont définis un tenseur énérgie-impulsion $T_{\mu\nu}(\Phi)$ et un courant $J_{ijk}(\Phi)$. La partie métrique de la connexion décrit la gravitation classique engendrée par un tenseur énérgie-impulsion d'une matière macroscopique. La partie non métrique, la torsion, est considérée comme une interaction microscopique (à courte portée) non obligatoirement gravitationnelle. Cette interaction est décrite par une équation courant-courbure analogue à (9) liant le courant $J_{ijk}(\Phi)$ à la courbure de la connexion $\widetilde{\Gamma}_{\mu ij}\left(x\right)$. Elle se réduit à des équations différentielles non linéaire entre ce courant est la torsion de l'espace-temps de Riemann-Cartan U_4.

L'identification n'a pas été réalisée dans notre cas. La théorie de la gravitation classique est décrite alors par la connexion $\Gamma_{\mu ij}(x)$ qui est supposée être métrique. La connexion $\widetilde{\Gamma}_{\mu ij}\left(x\right)$, reliquat d'une interaction microscopique $\Gamma^{R}_{\mu ab}(x)$ de de Sitter, pourrait éventuellement garder ce caractère microscopique et décrire une gravitation à courte portée pouvant être métrique ou non. Dans le second cas, la torsion pourrait décrire une autre interaction microscopique comme dans le travail de la Réf. [10]. L'étude de la contraction de l'équation courant-courbure (9) pourrait porter quelques élaircissements à ces questions. Nous n'aborderons pas ce problème dans ce travail et nous passons à une théorie lagrangienne par généralisation directe de celle de l'électro-dynamique.

---

[1] L'espace des variables internes contient, outre les coordonnées $\widetilde{x}$ de l'espace de Minkowski, des variables supplémentaires $\widetilde{y}$ pouvant être associées au spin.

3 Interprétation lagrangienne du modèle semi-classique de particules à symétrie de Poincaré

Dans la théorie de jauge conventionnelle non-géométrique de l'interaction électro-magnétique, effectuons les changements suivants [9]:

$$\Psi(x) \to \Psi(x, \tilde{x}) = \Psi(x)\,\Phi_x(\tilde{x}) \tag{31}$$

$$\bar{\Psi}(x) \to \overline{\Psi}(x, \tilde{x}) = \overline{\Psi}(x)\,\overline{\Phi}_x(\tilde{x}) \tag{32}$$

$$\overrightarrow{\partial_\mu} \to \overrightarrow{D_\mu} = \overrightarrow{\partial_\mu} + ieA_\mu + i\,\widetilde{\Gamma}_\mu \tag{33}$$

Nous n'avons pas tenu compte de l'interaction gravitationnelle. Le lagrangien invariant de jauge sera de la forme

$$\begin{aligned} L(x, \widetilde{x}) = \tfrac{i}{2}(\overline{\Psi}\gamma^\mu \overrightarrow{\partial_\mu}\,\Psi - \overline{\Psi}\,\overleftarrow{\partial}_\mu\,\gamma^\mu\Psi)\ &-m\overline{\Psi}\Psi - \overline{\Psi}\gamma^\mu e A_\mu \Psi \\ &-\tfrac{1}{2}\overline{\Psi}\left(\gamma^\mu\widetilde{\Gamma}_\mu + \widetilde{\Gamma}_\mu\gamma^\mu\right)\Psi \end{aligned} \tag{34}$$

En intégrant sur la fibre M_4 (en faisant une moyenne sur les degrés de liberté interne $\widetilde{x}$), ce lagrangien devient

$$L'(x) = \int_{M_4} L_0(x, \widetilde{x})\,d\mu(\widetilde{x}) - eA_\mu J^\mu(x) - \frac{1}{2}\widetilde{\Gamma}_{\mu ij} J^{\mu ij}(x) - \frac{1}{2} v^i_\mu J^\mu_i \tag{35}$$

$L_0(x, \widetilde{x})$ est analogue au lagrangien d'une particule ponctuelle pour laquelle la fonction d'onde est remplacée par $\Psi(x, \widetilde{x})$.

$$J^\mu(x) = j^\mu_D(x) \int_{M_4} \overline{\Phi}_x(\widetilde{x})\,\Phi(\widetilde{x})\,d\mu(\widetilde{x}) = j^\mu_D(x)\,F(x) \tag{36}$$

$$J^{\mu ij}(x) = j^\mu_D(x) \int_{M_4} \overline{\Phi}_x(\widetilde{x})\,M^{ij}\,\Phi_x(\widetilde{x})\,d\mu(\widetilde{x}) = j^\mu_D(x)\,F^{ij}(x) \tag{37}$$

$$J^\mu_i(x) = j^\mu_D(x) \int_{M_4} \overline{\Phi}_x(\widetilde{x})\,\widetilde{\partial}_i\Phi_x(\widetilde{x})\,d\mu(\widetilde{x}) = j^\mu_D(x)\,F_i(x) \tag{38}$$

Les termes $F(x)$, $F_i(x)$ et $F^{ij}(x)$ sont des facteurs de formes respectivement scalaire, vectoriel et tensoriel pour le groupe de Poincaré interne. Ce sont des manifestations différentes de l'extension de la particule qui dépendent de l'interaction. En effet, le second terme du lagrangien $L'(x)$ représente un terme d'interaction entre le champs éléctro-magnétique A_μ et le courant $J^\mu(x)$, ce dernier est le produit du courant de Dirac conventionnel (pour une particule spinorielle ponctuelle) et du facteur de forme scalaire $F(x)$. Le troisième terme est un terme d'interaction entre les coefficients de connexions $\widetilde{\Gamma}_{\mu ij}$ et le courant tensoriel de matière $J^{\mu ij}$ qui est le produit du courant de Dirac et du facteur de forme tensoriel F^{ij}. Le dernier terme fait état d'une interaction entre les 16 champs de translation v^i_μ et le courant de matière vectoriel J^μ_i contenant le facteur de forme vectoriel F^i.

Par analogie avec la théorie de l'éléctrodynamique, le lagrangien total s'obtient en ajoutant à $L'(x)$ les termes cinématiques $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ et $-\frac{1}{4}R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ [9], liés respectivement aux champs de jauge électro-magnétique et interne libres.

L'hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_{int}(t) = \int_{U_4} d_3x \left[(eA_\mu J^\mu) + \frac{1}{2}\left(\widetilde{\Gamma}_{\mu ij} J^{\mu ij} + v^i_\mu J^\mu_i \right) \right] \tag{39}$$

et la matrice de diffusion

$$\begin{aligned} S &= T \exp\left[-i \textstyle\int H_{int}(t)\, dt \right] \\ &= T \exp\left[-i \textstyle\int d_4x \left(eA_\mu J^\mu + \frac{1}{2}(\widetilde{\Gamma}_{\mu ij} J^{\mu ij} + v^i_\mu J^\mu_i \right) \right] \end{aligned} \tag{40}$$

4 Conception géométro-différentielle d'une particule étendue à symétrie de Poincaré et la quantification du champ associé par la méthode des représentations induites

Nous reconsidérons dans ce paragraphe un modèle géométro-différentiel de la particule quantique étendue à symétrie de de Sitter [6] et nous l'appliquons pour le cas de la symétrie de Poincaré. Du point de vue géométrique la particule est représentée par le point de contact entre la base et la fibre. Ce point représente l'aspect partiel de la réalité physique et caractérise l'évolution selon la mécanique quantique conventionnelle au moyen de la fonctionnelle prévisionnelle $\varphi(x)$. Du point de vue physique la particule est représentée par les élements d'un fibré de Hilbert dont la base est l'espace-temps de Riemann-Cartan, la fibre un espace d'Hilbert de la représentation induite du groupe de Poincaré (groupe de symétrie interne) et le groupe structural la représentation induite.

La quantification du champ de particules se fait selon la méthode des représentations induites [7]. La commutation des représentations configuration et impulsion permet l'obtention du propagateur.

Dans un premier temps, négligeons toutes les connexions. Nous supposerons de plus que la base ainsi que la fibre possèdent le même groupe de symétrie $ISO\,(3,1)$.

L'application de cette méthode à notre modèle de particule nécessite la définition des fibrés suivants:

-Le fibré configuration-configuration

$$E^{M} = (B = M_4, F = M_4', G = ISO\,(3,1)) \tag{41}$$

-Le fibré configuration-impulsion

$$E^{C} = \big(B = M_4, F = C_{+1}', G = ISO\,(3,1)\big) \tag{42}$$

-Le fibré impulsion-configuration

$$F^{M} = (B = C_{+1}, F = M_4', G = ISO\,(3,1)) \tag{43}$$

-Le fibré impulsion-impulsion

$$F^{C} = \big(B = C_{+1}, F = C_{+1}', G = ISO\,(3,1)\big) \tag{44}$$

M_4, M_4' sont respectivement l'espace-temps plan de Minkowski et l'espace interne plan également du même type; C_{+1}, C_{+1}' les hyperboloides des vitesses associés aux représentants géométriques et aux modes internes.

A ces fibrés nous associons les fibrés d'Hilbert dont les fibres sont des espaces de représentation de $ISO(3,1)$ et dont les groupes de structure sont les représentations corréspondantes. Nous avons:

Le fibré

$$E^{D} = \big(B = M_4, F = H^{D}, U^{D}\,(G)\big) \tag{45}$$

La particule est représentée par la section

$$\begin{array}{ccc} \Psi & : & M_4 \to E^D \\ x & \longmapsto & \Psi_x \end{array} \tag{46}$$

Les prévisions se calculent par la fonctionnelle

$$X\left[\Psi\right](x,\widetilde{x}) = \psi\left(x,\widetilde{x}\right) \tag{47}$$

Le fibré

$$E^{mj} = \left(B = M_4, F = H^{mj}, U^{mj}\left(G\right)\right) \tag{48}$$

dont les section sont

$$\begin{array}{ccc} \Psi^{mj} & : & M_4 \to E^{mj} \\ x & \mapsto & \Psi^{mj}_x \end{array} \tag{49}$$

et la fonctionnelle est

$$X^{mj}\left[\Psi^{mj}\right](x,\widetilde{v}) = \psi^{mj}\left(x,\widetilde{v}\right) \tag{50}$$

Le fibré

$$F^D = \left(B = C_{+1}, F = H^D, U^D\left(G\right)\right) \tag{51}$$

avec des sections

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & C_{+1} \to F^D \\ v & \mapsto & \Phi_v \end{array} \tag{52}$$

et des fonctionnelles

$$X_{MJ}\left[\Phi\right](v,\widetilde{x}) = \psi_{MJ}\left(v,\widetilde{x}\right) \tag{53}$$

Le fibré

$$F^{MJ,mj} = \left(B = C_{+1}, F = H^{mj}, U^{mj}\left(G\right)\right) \tag{54}$$

avec des sections

$$\begin{array}{ccc} \Phi^{mj} & : & C_{+1} \to F^{MJ,mj} \\ v & \mapsto & \Phi^{mj}_v \end{array} \tag{55}$$

et des fonctionnelles

$$X_{MJ}^{mj}\left[\Phi^{mj}\right](v,\widetilde{v}) = \psi_{MJ}^{mj}(v,\widetilde{v}) \tag{56}$$

Des processus de localisation et de matérialisation de la particule peuvent être définis dans ce modèle [6]. La localisation est le passage de la représentation impulsion, unitaire et irréductible caractérisée par la masse et le spin, à la composante irréductible de la représentation configuration c'est à dire la commutation ces deux représentations. La représentation configuration induite à partir de la représentation D du sous-groupe de Lorentz est réductible. La matérialisation est la commutation inverse. La localisation complète du corpuscule étendu correspond à la localisation de son représentant géométrique et de la localisation de son mode interne indiféremment de leur ordre [6]. Nous pouvons considérer, par exemple, le schéma suivant:

$$F^{MJ,mj} \to E^{mj} \to E^{D} \tag{57}$$

La matérialisation totale de la particule se compose d'une matérialisation du représentant géométrique et d'une matérialisation du mode interne. Nous pouvons considérer le schéma:

$$E^{D} \to E^{mj} \to F^{MJ,mj} \tag{58}$$

Notons que nous aurions pu passer aussi bien par F^{MJ} que par E^{mj}.

Le processus de propagation du champs du point $(x,\widetilde{x})$ au point $(x',\widetilde{x}')$ est une combinaison adéquate de deux processus de localisation et de deux processus de matérialisation. L'un des processus est externe alors que l'autre est interne. Plusieurs possibilités, débutant toutes dans E^D et se terminant dans E^D, s'offrent à nous. L'une d'entre elles, est la composition d'une propagation interne, passant obligatoirement à travers un état interne matériel appartenant à E^{mj}, et d'une propagation externe passant obligatoirement par un état externe matériel appartenant F^{MJ}. Le schéma correspondant est:

$$E^{D} \to F^{D} \to E^{D} \to E^{mj} \to E^{D}$$

$$\psi(x,\widetilde{x}) \longmapsto \psi_{MJ}(v,\widetilde{x}) \longmapsto \psi_{MJ}(x',\widetilde{x}) \longmapsto \psi_{MJ}^{mj}(x',\widetilde{v}) \longmapsto \psi_{MJ}^{mj}(x',\widetilde{x}') \tag{59}$$

Les indices MJ et mj sont ajoutés aux fonctions dans les représentations configurations pour rappeler qu'elles appartiennent à leurs composantes irréductibles. Le propagateur causal est alors

$$\Pi^{mj,\epsilon}_{MJ}\left(x'-x;\widetilde{x}'-\widetilde{x}\right)=\Pi^{\epsilon}_{MJ}\left(x'-x\right)\Pi^{mj,\epsilon}\left(\widetilde{x}'-\widetilde{x}\right) \tag{60}$$

où $\Pi^{\epsilon}_{MJ}\left(x'-x\right)$ est le propagateur causal dans l'espace-temps, M et J sont respectivement la masse et le spin du représentant géométrique du corpuscule.

$$\Pi^{\epsilon}_{MJ}\left(x'-x\right)=\int_{C_{+1}}dv\exp\left[-i\epsilon Mv(x'-x)\right]S^{\epsilon}_{J}\left(v\right) \tag{61}$$

$\epsilon=\pm1$ et $S^{\epsilon}_{MJ}\left(v\right)=D\left(v_L\right)J^{\epsilon}_{J}K^{\epsilon}_{J}D\left(v_L\right)^{-1}$. Le terme $D\left(v_L\right)$ est la représentation du sous-groupe de Lorentz. J^{ϵ}_{J} est l'opérateur de commutation des représentations configuration et impulsion et K^{ϵ}_{J} l'opérateur de la commutation inverse.

Le propagateur des modes internes dans la fibre

$$\begin{aligned}\Pi^{mj,\epsilon}\left(\widetilde{x}'-\widetilde{x}\right)&=\textstyle\int_{C_{+1}}d\widetilde{v}\exp\left[-i\epsilon m\widetilde{v}(\widetilde{x}'-\widetilde{x})\right]s^{\epsilon}_{j}\left(\widetilde{v}\right)\\ s^{\epsilon}_{j}(\tilde{v})&=D\left(\widetilde{v}_L\right)j^{\epsilon}_{j}k^{\epsilon}_{j}D\left(\widetilde{v}_L\right)\end{aligned} \tag{62}$$

dépend de la masse m et du spin j du mode interne.

Dans le cas où la connexion $\widetilde{\Gamma}\left(x\right)$ n'est pas négligée, seuls les fibrés E^C et E^M auxquels sont associés les fibrés d'Hilbert E^{mj} et E^D sont utilisés. Aussi, la partie lorentzienne de cette connexion a le sens de la gravitation car l'identification entre les espaces tangents à la base et à la fibre est sous-entendue [6].

Un propagateur semi-classique analogue à celui de la théorie de la quantification Géométro-Stochastique [2] est d'abord défini [6]. Il est obtenu par un transport parallèle le long d'un parcours γ de l'espace-temps suivi d'une propagation quantique dans la fibre

$$\psi\left(x,\widetilde{x}\right)\underset{U^{-1}(p)}{\longmapsto}\psi\left(x',\widetilde{x}_0\right)\underset{\Pi_{mj\left(\widetilde{x}'-\widetilde{x}_0\right)}}{\longmapsto}\psi^{mj}\left(x',\widetilde{x}'\right) \tag{63}$$

le propagateur semi-classique est:

$$\Pi^{mj}_{x,x'}\left(\widetilde{x}-\widetilde{x}_0\right)=U^{-1}\left(p\right)\Pi^{mj}\left(\widetilde{x}'-\widetilde{x}_0\right) \tag{64}$$

où

$$U^{-1}(p) = \exp\left[-i\int_{\gamma}\widetilde{\Gamma}_{\mu}(x)\,dx^{\mu}\right] \tag{65}$$

Le propagateur quantique est obtenu en décomposant les parcours γ en des segments de géodésique et en faisant une moyenne au sens des intégrales de parcours sur tous les chemins [2, 6]:

$$\begin{aligned}\psi(x',\widetilde{x}') &= \lim_{n\to\infty}\int K(x',\widetilde{x}';x_{n-1},\widetilde{x}_{n-1})\,d\Sigma(x_{n-1})\,d\mu(\tilde{x}_{n-1})\times \\ &\quad K(x_{n-1},\widetilde{x}_{n-1};x_{n-2},\widetilde{x}_{n-2})\;d\Sigma(x_{n-2})\,d\mu(\tilde{x}_{n-2})\times ... \\ &...K(x_{2,}\widetilde{x}_2;x_1,\widetilde{x}_1)\;d\Sigma(x_1)\,d\mu(\tilde{x}_1)d\Sigma x_1\,K(x_1,\widetilde{x}_1;x,\widetilde{x}_0)\;\times(\psi(x,\widetilde{x}_0))\end{aligned} \tag{66}$$

où

$$K(x_n,\widetilde{x}_n;x_{n-1},\widetilde{x}_{n-1}) = \Pi^{mj}_{x_{n-1},x_n}(\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_{n-1}) \tag{67}$$

et $\sum(x_n)$ une hypersurface genre espace coupant chaque parcours γ au point x_n.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons décrit une interaction microscopique en termes de théorie de jauge basée sur le groupe de Poincaré. Cette théorie est obtenue en contractant selon Inönü-Wigner la théorie de l'interaction forte [5, 3] qui utilise le groupe de de Sitter comme groupe de symétrie.

L'aspect quantique de la matière est représenté par un champ bispinoriel $\psi(x,\widetilde{x})$ défini dans le fibré $T(U_4)$ ayant l'espace-temps de Riemann-Cartan comme base et un espace plan de Minkowski comme fibre. Le courant $\left\{J_{\mu ij};J^i_\mu\right\}$, obtenu par contraction du courant hadronique, comporte une partie liée au générateur M_{ij} du sous groupe $SO(3,1)$ et une partie liée au générateur P_i du sous groupe de translation. Ces parties sont en fait des produits du courant de Dirac d'une particule ponctuelle par des facteurs de forme contenant les générateurs précédents.

Nous avons construit également la théorie lagrangienne associée à cette formulation géométrique de la théorie de jauge de Poincaré. L'interaction étant introduite comme un couplage minimal entre les champs de jauge (coefficients de la connexion) et les courants. Ceci a mis en évidence l'intervention des facteurs de forme dont le caractère tensoriel vis-à-vis du groupe de jauge de Poincaré suit celui du champ de jauge. Le champ éléctro-magnétique qui est un scalaire vis-à-vis du groupe de Poincaré interne est couplé à un facteur de forme scalaire. Les coefficients $\tilde{\Gamma}_{\mu ij}$ et v^i_μ de la connexion sont couplés à des facteurs de forme tensoriels (d'ordres deux) et vectoriel, respectivement.

Nous avons ensuite quantifié le champ associé aux particules par la méthode des représentations induites. Nous avons obtenu, en négligeant la connexion $\widetilde{\Gamma}(x)$, un propagateur produit des propagateurs de l'espace-temps et de la fibre. Cette forme en produit est due au fait que l'espace tangent à la base n'a pas été identifié à l'espace tangent à la fibre. Pour introduire la connexion, il nous a fallu identifier ces deux espaces tangents et introduire un propagateur semi-classique qui est le résultat d'un transport classique dans l'espace-temps suivi d'une propagation quantique dans la fibre. Le propagateur final est une moyenne sur tous les chemins de ces propagateurs semi-classiques et ne se réduit pas à la forme produit en négligeant la connexion.

Notons néanmoins que l'introduction de la connexion $\widetilde{\Gamma}(x)$ dans le cas de la non identification des deux espaces tangents peut être réalisée en utilisant la notion de groupe de trajectoires. Ce travail a été fait pour le groupe de Galilée [11] et est en cours d'élaboration pour le groupe de Poincaré.

Notons aussi que la connexion $\tilde{\Gamma}$ a été considérée comme classique dans les deux cas. L'interaction liée au sous-groupe de Lorentz possède la même symétrie que l'interaction gravitaionnelle, il serait tentant de l'interpréter comme une interaction gravitaionnelle microscopique dans le cas de la non identification des espaces tangents et comme contenant les deux interactions gravitationnelles, microscopique et classique, dans le cas contraire.

Références

[1] E. Prugovecky "Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time", Reidel, Dordrecht, 1986.

[2] E. Prugovecky Nuovo Cimento t. **89 A**, 1985, p. 105.

[3] W. Dreschler Fortschr. Phys. t. **23**,1975, p. 607.

[4] W. Dreschler Found. Phys. t. **7**,1977, p. 629.

[5] W. Dreschler J. Math. Phys., t. **18**,1977, p. 1358.

[6] A. Smida, M. Hachemane et M. Fellah Found. Phys. t. **21**, 1995, p. 513.

[7] M. B. Mensky "The Method of Induced Representations, Space-Time and the Concept of Particle" (en russe) Nauka, Moscow 1976.

[8] J. L. Destouches “ La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules”, Gautier-Villars, Paris 1956.

[9] W. Dreschler and M. E. Mayer “Fibre Bundle Technics in Gauge Theories” vol 67, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Heidleberg, 1977.

[10] W. Dreschler Ann. Inst. Henri Poincaré, t. **37**, 1982, p. 155.

[11] M. Hachemane, M. A. Benbitour et A. Smida Found. Phys. t. **27**, 1997, p.645.

(Manuscrit reçu le 6 janvier 1998)