Vérité scientifique et trous noirs (deuxième partie) Symétries relatives au groupe des rotations

Nikias Stavroulakis

Solomou 35, 15233 Chalandri, Grèce

RÉSUMÉ. La première partie du présent article était destinée à mettre en évidence une série de transgressions mathématiques qui ont conduit, entre autres, à la théorie des trous noirs. Dans la deuxième partie, on se propose de clarifier la totalité des hypothèses mathématiques qui interviennent dans les problèmes relatifs au champ gravitationnel d'une distribution sphérique de matière. Contrairement à l'approche traditionnelle, qui supprime le référentiel physique du problème en le remplaçant par la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$, on fait ressortir d'abord le rôle de la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Ensuite on montre que les symétries sous-jacentes aux problèmes en question rentrent dans le cadre général des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants sur $\mathbb{R}^n$, qui sont conçus indépendamment de toute notion métrique. C'est pourquoi nous présentons les propriétés principales de ces champs de tenseurs dont l'intérêt ne se limite d'ailleurs pas aux problèmes gravitationnels. En ce qui concerne l'action de $SO(3)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, qui reste classiquement indéfinissable, elle se précise maintenant par l'intermédiaire de l'action d'un sous-groupe, noté $S\Theta(4)$, de $SO(4)$. Cela permet d'introduire les champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ qui entraînent la définition naturelle des métriques spatio-temporelles envisagées et la position correcte de tous les problèmes qui s'y rattachent. Nous insistons en particulier sur les conditions de différentiabilité sur la sous-variété $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$ qui sont inconcevables dans le cadre de l'approche classique des problèmes.

ABSTRACT. The first part of this paper was intended to bring out several transgressions of mathematical principles wich led, among other things, to the theory of black holes. The second part aims at establishing rigorously the mathematical foundations of the problems related to the gravitational field of a spherical distribution of matter. Contrary to the classical method, which suppresses the natural *system of reference and replaces it by the manifold with boundary* $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$*, we firstly emphasize the fundamental role of the manifold* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*. Next we make it clear that the underlying symmetries originate in the fundamental and no metrical concept of* $SO(n)$*-invariant tensor field. This is why we expound the principal properties of these tensor fields which are involved in many other situations. Regarding the action of* $SO(3)$ *on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, which is undefined classically, we show that it is conceived by means of the action of a subgroup, denoted by* $S\Theta(4)$*, of* $S0(4)$ *on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*. This allows to introduce the* $S\Theta(4)$*-invariant tensor fields on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *and clarify all the problems related to the gravitational field of a spherical mass. We insiste specifically on the conditions of differentiability on* $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$ *which are unthinkable in the classical treatment of the problems.*

6. Considérations préliminaires

La notion intuitive d'isotropie autour d'un point O dans l'espace à trois dimensions se traduit mathématiquement par l'invariance vis-à-vis des opérations du groupe des rotations sur $\mathbb{R}^3$. C'est cette idée qui intervient dans la conception du champ gravitationnel engendré par une distribution "parfaitement sphérique" de matière. Or, puisque la métrique spatio-temporelle correspondante est conçue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, l'action du groupe $SO(3)$ se réalise maintenant par l'intermédiaire de l'action d'un sous-groupe, noté $S\Theta(4)$, de $S0(4)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, ce qui donne lieu à la notion de $S\Theta(4)$-invariance. Naturellement, l'origine de $\mathbb{R}^3$ en tant que centre de symétrie garde son rôle, mais elle intervient dans le problème au moyen de sa ligne d'univers $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$. Les métriques spatio-temporelles $S\Theta(4)$-invariantes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sont donc conçues sur la base d'idées claires et simples. Cependant leur conception a subi dès 1916 une altération inattendue à cause de l'usage abusif et exclusif des soi-disant coordonnées polaires. Celles-ci entraînent tout d'abord deux transgressions conceptuelles qui passent toujours inaperçues.

Premièrement, comme elles sont définies sur $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, elles suppriment le centre de symétrie $(0,0,0)$, donc aussi sa ligne d'univers $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$. En d'autres termes elles suppriment la localisation de la boule de matière engendrant le champ gravitationnel.

Deuxièmement, dès que la valeur $r = 0$ est prise en considération, comme il est de règle, elles conduisent subrepticement à un changement de variété, plus précisément au remplacement de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$.

Malgré une opinion très enracinée, les coordonnées polaires ne constituent pas un système de référence physique. Même Poincaré pensait à tort qu'elles sont utilisables au même titre que les coordonnées cartésiennes :

"Que doit-on penser de cette question : la géométrie euclidienne est-elle vraie ? Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses" [2].

Regardons de plus près la situation dans le cadre de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Alors, quand on dit qu'un point est défini par ses coordonnées cartésiennes, on se réfère à un système orthonormé par rapport auquel elles sont conçues. Mais quand on dit que le point est défini par ses coordonnées polaires r, θ, ϕ, quel est le système de référence ? On se rapporte encore au même système orthonormé par rapport auquel on mesure la distance r et les angles θ, ϕ relatifs aux points distincts de l'origine. Dire que le point est défini par ses coordonnées polaires r, θ, ϕ sans se rapporter au système orthonormé n'a aucun sens. Dans leur conception primitive, les coordonnées polaires n'ont pas une existence autonome. Or, il est de règle de considérer le système des coordonnées polaires comme système de référence physique en le complétant par l'adjonction de "l'origine $r = 0$". Or, ce dernier terme n'a absolument aucun sens : la valeur $r = 0$ définit le bord $\{0\} \times S^2$ de $[0, +\infty[\times S^2$ qui n'a aucune signification physique.

La confusion qui subsiste sur l'utilisation des coordonnées polaires se répercute dans la conception des métriques spatio-temporelles $S\Theta(4)$-invariantes, appelées classiquement à symétrie sphérique ou à symétrie centrale. Considérons, par exemple, le point de vue des auteurs de la monographie : "Exact Solutions of Einstein's Field Equations".

"Originally problems with spherical symmetry were treated more or less intuitively. In the modern literature the group theoretical approach is preferred and spherical symmetry is invariantly defined as follows : A space-time V_4 is said to be spherically symmetric if it admits a group ... of motions acting on spacelike 2-spaces S_2 and if the non-metric fields inherit the same symmetry ... We specialize the metric ... to spherical symmetry :

$$ds^2 = Y^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{2\lambda}dr^2 - e^{2\nu}dt^2$$

$$Y = Y(r,t), \quad \lambda = \lambda(r,t), \quad \nu = \nu(r,t)\text{"} \quad [1]$$

Ces assertions appellent quelques remarques :

Premièrement, la référence à une variété générale V_4, n'ajoute absolument rien à la généralité de la définition. La métrique standard proposée est une métrique tronquée conçue soit sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times S^2$ soit sur la variété à bord $\mathbb{R}\times[0,+\infty[\times S^2$. Quoiqu'il en soit, le centre de symétrie et sa ligne d'univers sont supprimés, de sorte que la localisation de la source du champ et l'isotropie de la métrique spatio-temporelle sont impossibles à définir.

Deuxièmement, la définition proposée est basée sur une idée foncièrement erronée : le groupe n'opère pas uniquement sur les surfaces de genre espace ; il opère sur la totalité du tenseur métrique par l'intermédiaire d'un sous-groupe de $SO(4)$.

Troisièmement, la métrique proposée ne permet pas la vérification des conditions aux limites.

Quatrièmement, la définition en question conduit nécessairement à une métrique tronquée sur $\mathbb{R}\times\ ]0,+\infty[\times S^2$ dont le pendant sur $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\})$, à savoir

$$\frac{Y^2}{\|x\|^2}dx^2+\Big(e^{2\lambda}-\frac{Y^2}{\|x\|^2}\Big)\frac{(xdx)^2}{\|x\|^2}-e^{2\nu}dt^2$$

$$\Big(Y=Y(\|x\|,t),\quad \lambda=\lambda(\|x\|,t),\quad \nu=\nu(\|x\|,t)\Big)$$

est en général discontinu pour $x=(0,0,0)$.

Afin de clarifier la situation, il est nécessaire de se libérer d'abord de l'assujettissement aux métriques et d'étudier de façon générale les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants sur l'espace orienté $\mathbb{R}^n$ quelle que soit la dimension n. Cette approche présente des avantages considérables en raison de l'introduction de concepts et de propriétés subtils qui sont inconcevables dans le cadre traditionnel. En particulier la distinction claire entre les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants et les champs de tenseurs $O(n)$-invariants, ainsi que la mise en évidence des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants purs, apportent des idées susceptibles de jouer un rôle substantiel dans plusieurs problèmes de la physique mathématique. D'autre part tout ce qui concerne les métriques spatio-temporelles $S\Theta(4)$-invariantes résulte de la théorie générale des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants. En particulier la forme générale d'une métrique spatio-temporelle $S\Theta(4)$-invariante sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ s'obtient en tenant compte uniquement des champs de tenseurs covariants $SO(3)$-invariants de degrés 0, 1, 2. On n'a besoin ni de champs de vecteurs de Killing (qui sont d'ailleurs insuffisants) ni de transformations implicites.

Soit maintenant Γ l'algèbre des fonctions de $\|x\|$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, fonctions supposées C^∞ par rapport aux coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$, notées ici avec des indices en bas. Nous allons voir que les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants sur $\mathbb{R}^n$ constituent un Γ-module, de sorte que nous devons d'abord établir les conditions de différentiabilité des fonctions de la forme $f(\|x\|)$ par rapport aux coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

7. Conditions de différentiabilité de $f(\|x\|)$

L'écriture $f(\|x\|)$ présuppose naturellement que la fonction $f(u)$ est définie au moins sur la demi-droite $[0, +\infty[$.

Proposition 7.1. *Supposons que la fonction $f(u)$ soit C^∞ sur $[0, +\infty[$, ses dérivées pour $u = 0$ étant, bien entendu, des dérivées à droite. Alors $f(\|x\|)$ en tant que fonction de $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ est C^∞ sur l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, si et seulement si les dérivées à droite d'ordre impair de $f(u)$ à l'origine sont nulles.*

Démonstration . La condition est nécessaire. En effet, si $f(\|x\|)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, ses restrictions aux axes, c'est-à-dire les fonctions

$$f(|x_1|), \quad f(|x_2|), \quad ..., \quad f(|x_n|)$$

sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ ou, en d'autres termes, $f(|v|)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Cela équivaut à dire que $g(v) = f(|v|)$ est une fonction paire C^∞ sur $\mathbb{R}$. Or la condition

$$g(-v) = g(v)$$

entraîne

$$(-1)^s g^{(s)}(-v) = g^{(s)}(v),$$

donc aussi

$$-g^{(2k+1)}(0) = g^{(2k+1)}(0), \quad \text{d'où} \quad g^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(2k+1)}(+0) = 0.$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Or, si elle est satisfaite, la fonction $f(\|x\|)$ est manifestement C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}$. Il reste à montrer que ses dérivées de tout ordre existent et sont continues à l'origine.

Si l'on pose $g(v) = f(|v|)$, on définit une fonction paire C^∞ sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Nous allons montrer que $g(v)$ possède aussi des dérivées de tout ordre pour $v = 0$.

Compte tenu de $g^{(s)}(v) = f^s(v)$ pour $v > 0$, et $g^{(s)}(v) = (-1)^s f^{(s)}(-v)$ pour $v < 0$, on a

$$\lim_{0<v\to 0} g^{(2k)}(v) = f^{(2k)}(+0) = \lim_{0>v\to 0} g^{(2k)}(v)$$

et

$$\lim_{0<v\to 0} g^{(2k+1)}(v) = f^{(2k+1)}(+0) = 0 = -f^{(2k+1)}(+0) = \lim_{0>v\to 0} g^{(2k+1)}(v)$$

ce qui entraîne l'existence des dérivées $g^{(2k)}(0)$ et $g^{(2k+1)}(0) = 0$.

En vertu de $g'(0) = 0$, on a maintenant

$$g'(v) = v \int_0^1 g''(tv)dt$$

et puisque les dérivations sous le signe d'intégration sont autorisées, la fonction $g_1(v)$ obtenue en posant

$$g_1(v) = \frac{g'(v)}{v} = \int_0^1 g''(tv)dt, \quad g_1(0) = g''(0),$$

est une fonction paire C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En raisonnant par récurrence ont définit sur $\mathbb{R}$ une suite infinie de fonctions paires indéfiniment dérivables. En effet, si la fonction paire $g_{k-1}(v)$, $k \geq 2$, est déjà définie, on a $g'_{k-1}(0) = 0$, ce qui permet d'écrire

$$g'_{k-1}(v) = v \int_0^1 g''_{k-1}(tv)dt \quad ,$$

de sorte que $g_k(v)$ s'obtient en posant

$$g_k(v) = \frac{g'_{k-1}(v)}{v} = \int_0^1 g''_{k-1}(tv)dt, \quad g_k(0) = g''_{k-1}(0).$$

Cela dit, puisque $\|x\| = \rho \geq 0$, les fonctions

$$f(\rho) = g(\rho) \quad ,$$

$$f_1(\rho) = \frac{f'(\rho)}{\rho} = \frac{g'(\rho)}{\rho} = g_1(\rho) \quad , \quad f_1(0) = f''(+0),$$

$$f_2(\rho) = \frac{f_1'(\rho)}{\rho} = \frac{g_1'(\rho)}{\rho} = g_2(\rho) \quad , \quad f_2(0) = f_1''(+0),$$

$$\cdots$$

$$f_k(\rho) = \frac{f_{k-1}'(\rho)}{\rho} = \frac{g_{k-1}'(\rho)}{\rho} = g_k(\rho) \quad , \quad f_k(0) = f_{k-1}''(+0),$$

$$\cdots$$

sont C^∞ sur $[0, +\infty[$ par rapport à la norme $\rho = \|x\|$, de sorte que les dérivées de $f(\|x\|)$ par rapport aux coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$, à savoir

$$\frac{\partial f(\|x\|)}{\partial x_i} = \frac{f'(\rho)}{\rho} x_i = x_i f_1(\rho) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f(\|x\|)}{\partial x_i^2} = f_1(\rho) + f_1'(\rho)\frac{x_i^2}{\rho} = f_1(\rho) + x_i^2 f_2(\rho) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f(\|x\|)}{\partial x_i \partial x_j} = x_i x_j f_2(\rho) \quad , \quad (i \neq j) \quad ,$$

$$\frac{\partial^3 f(\|x\|)}{\partial x_i^3} = 3x_i f_2(\rho) + x_i^3 f_3(\rho) \quad ,$$

$$\frac{\partial^3 f(\|x\|)}{\partial x_i^2 \partial x_j} = x_j f_2(\rho) + x_i^2 x_j f_3(\rho) \quad , \quad (i \neq j) \quad ,$$

$$\frac{\partial^3 f(\|x\|)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = x_i x_j x_k f_3(\rho) \quad , \quad (i \neq j \neq k \neq i) \quad ,$$

$$\cdots$$

sont partout bien définies et continues.

Corollaire 7.1.1. *Avec les hypothèses de la proposition, pour tout entier positif ℓ, les dérivées de $f(\|x\|)$ d'ordre ℓ par rapport aux coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont les composantes d'un champ covariant $O(n)$-invariant de tenseurs sur $\mathbb{R}^n$ de degré ℓ.*

Cela se déduit d'un résultat qui sera établi plus tard (cf. corollaire 8.7.2.).

Corollaire 7.1.2. *Si la fonction $f(u)$ est paire et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f(\|x\|)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 7.1. Pour le calcul pratique des dérivées de $f(\|x\|)$, on n'a pas besoin d'introduire les fonctions $f_1, f_2, f_3, \cdots$ En dérivant directement pour $\rho > 0$, on obtient

$$\frac{\partial f(\|x\|)}{\partial x_i} = f'(\rho)\frac{x_i}{\rho} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f(\|x\|)}{\partial x_i^2} = \frac{f'(\rho)}{\rho} + \frac{x_i^2}{\rho^2}\left(f''(\rho) - \frac{f'(\rho)}{\rho}\right) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f(\|x\|)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{x_i x_j}{\rho^2}\left(f''(\rho) - \frac{f'(\rho)}{\rho}\right), \quad (i \neq j) \quad ,$$

$$\cdots$$

Les expressions ainsi obtenues ne sont pas définies directement pour $\rho = 0$, mais, en vertu des hypothèses, leurs limites, pour $\rho \to 0$, existent et sont égales, naturellement, aux dérivées de $f(\|x\|)$ à l'origine. On peut donc les utiliser dans les calculs sans inconvénient.

Remarque 7.2. Supposons que la fonction $g(u) = f(|u|)$ soit analytique sur un voisinage de l'origine, donc aussi développable en série sur un certain intervalle $]-\alpha, \alpha[$. Alors, compte tenu de

$$g^{(2k+1)}(0) = f^{2k+1}(+0) = 0 \quad , \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

il en résulte

$$g(u) = f(|u|) = f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(+0) \quad ,$$

ce qui donne

$$f(\|x\|) = f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\|x\|^2)^m}{(2m)!} f^{(2m)}(+0)$$

et définit en conséquence $f(\|x\|)$ comme fonction analytique de $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, donc aussi comme fonction analytique des coordonnées $x_1, \cdots, x_n$ sur la boule $\|x\| < \alpha$.

Proposition 7.2. *Supposons que la fonction $f(t, u)$ soit indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Alors $f(t, \|x\|)$ en tant que fonction de*

$(t, x_1, \cdots, x_n)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout entier positif impair q, les dérivées

$$\frac{\partial^{p+q} f(t,+0)}{\partial t^p \partial u^q}, \quad (p = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

sont nulles.

La démonstration s'obtient en appliquant la proposition 7.1. à la fonction $f(t, u)$, et à chacune des dérivées

$$\frac{\partial^p f(t,u)}{\partial t^p}, \quad (p = 1, 2, 3, \cdots),$$

la variable t jouant alors le rôle de paramètre.

Remarque 7.3. Les hypothèses de la proposition étant satisfaites, il suffit d'introduire dans les calculs les dérivées de $f(t, \|x\|)$ pour $\|x\| > 0$. En effet, celles-ci tendent alors, lorsque $\|x\| \to 0$, vers des valeurs bien définies égales, naturellement, aux dérivées de $f(t, \|x\|)$ sur $\mathbb{R} \times \{(0, 0, \cdots, 0)\}$.

Corollaire 7.2. *Si la fonction $f(t, u)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et paire par rapport à u, alors la fonction $f(t, \|x\|)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

Cela dit, afin de fonder sur une base solide la théorie des métriques spatio-temporelles $S\Theta(4)$-invariantes et l'étude des équations de gravitation correspondantes, nous allons exposer les propriétés principales des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants sur l'espace orienté $\mathbb{R}^n$ sans nous limiter à la dimension 3.

La théorie générale des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants a été présentée pour la première fois dans l'article [3] auquel nous ferons souvent référence en acceptant certains énoncés sans démonstration. L'article en question se propose surtout d'indiquer la construction de champs de tenseurs $SO(n)$-invariants continus sur $\mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}$, ce qui constitue un travail préliminaire indispensable pour pouvoir aborder ensuite les problèmes relatifs à la différentibilité sur $\mathbb{R}^n$.

8. Champs de tenseurs $SO(n)$-invariants sur $\mathbb{R}^n$

On désigne, comme d'habitude, par $O(n)$ et $SO(n)$ respectivement le groupe orthogonal et son sous-groupe des rotations pour la dimension n. Rappelons que les éléments de $O(n)$ sont les matrices réelles A d'ordre

n pour lesquelles $A\hat{A} = I$, $\hat{A}$ étant la transposée de A. Les éléments de $SO(n)$ satisfont en outre à la condition dét $A = 1$.

Cela dit, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera supposé orienté par sa base canonique

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x^2} \quad , \quad ..., \quad \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \quad ,$$

ce qui entraîne l'orientation de son espace dual par la base duale correspondante

$$(dx^1, dx^2, \cdots, dx^n).$$

Etant donné un champ de tenseurs $T(x)$ sur l'espace orienté $\mathbb{R}^n$, on désigne en général par $A \cdot T(x)$ son transformé par un élément A du groupe linéaire $Gl(n; \mathbb{R})$. *Alors nous dirons que* $T(x)$ *est* $SO(n)$*-invariant (resp.* $O(n)$*-invariant), si*

$$A \cdot T(x) = T(Ax)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *et pour tout* $A \in SO(n)$ *(resp.* $A \in O(n)$*).*

Supposons que $T(x)$ soit $SO(n)$-invariant. Alors si

$$A \cdot T(x) = -T(Ax)$$

pour tout $A \in O(n) - SO(n)$ (c'est-à-dire pour tout élément A de $O(n)$ n'appartenant pas à $SO(n)$), nous dirons que $T(x)$ est $SO(n)$-*invariant pur.*

Exemple. Soient

$$\omega^1(x) = x^1 dx^1 + x^2 dx^2 \quad , \quad \omega^2(x) = x^1 dx^2 - x^2 dx^1$$

Alors la forme $\omega^1(x)$ (resp. $\omega^2(x)$) est $O(2)$-invariante (resp. $SO(2)$-invariante pure) sur $\mathbb{R}^2$.

Les définitions que nous venons de poser ne sont pas liées à la notion de continuité ou de différentiabilité. Cependant pour avoir une théorie utile, les champs de tenseurs considérés seront supposés C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Soit Γ l'algèbre des fonctions de $\|x\|$, avec $x \in \mathbb{R}^n$, fonctions supposées indéfiniment dérivables par rapport aux coordonnées $x^1, x^2, \cdots, x^n$, donc satisfaisant aux conditions de la proposition 7.1.

Etant donné que, quel que soit $A \in O(n)$ (donc en particulier quel que soit $A \in SO(n)$), la norme de Ax est égale à la norme de x, on a

$$A \cdot \Big(f(\|x\|)T(x)\Big) = f(\| Ax \|)(A \cdot T(x))$$

pour toute fonction $f \in \Gamma$, de sorte que, si le champ de tenseurs $T(x)$ est $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant), il en résulte

$$A \cdot \Big(f(\|x\|)T(x)\Big) = f(\| Ax \|)T(Ax).$$

Autrement dit, la $SO(n)$-invariance (resp. $O(n)$-invariance) de $T(x)$ entraîne la $SO(n)$-invariance (resp. $O(n)$-invariance) de $f(\|x\|)T(x)$.

Par conséquent l'ensemble des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants (resp. $O(n)$-invariants) sur l'espace orienté $\mathbb{R}^n$ est un Γ-module qui sera noté $\Gamma SO(n)$ (resp. $\Gamma O(n)$). Puisque tout champ de tenseurs $O(n)$-invariant est aussi $SO(n)$-invariant, nous avons l'inclusion

$$\Gamma O(n) \subset \Gamma SO(n)$$

c'est-à-dire que $\Gamma O(n)$ est un sous-module de $\Gamma SO(n)$.

En ce qui concerne les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants purs, ils constituent aussi un Γ-module, sous-module de $\Gamma SO(n)$, qui sera noté $\Gamma PSO(n)$:

$$\Gamma PSO(n) \subset \Gamma SO(n).$$

Proposition 8.1. *Supposons que le champ de tenseurs $T(x)$ soit $SO(n)$-invariant. Alors, pour que $T(x)$ soit $O(n)$-invariant (resp. $SO(n)$-invariant pur) il faut et il suffit qu'il existe un élément $B \in O(n) - SO(n)$ tel que*

$$B \cdot T(x) = T(Bx) \quad \textit{(resp.} \quad B \cdot T(x) = -T(Bx)).$$

En effet, pour tout autre $E \in O(n) - SO(n)$, il existe $D \in SO(n)$ tel que $E = DB$, d'où

$$E \cdot T(x) = DB \cdot T(x) = D \cdot T(Bx) = T(DBx) = T(Ex)$$

(resp. $E \cdot T(x) = D \cdot (B \cdot T(x)) = D \cdot (-T(Bx)) = -T(DBx) = -T(Ex)$).

Proposition 8.2. *Si le champ de tenseurs $T(x)$ est $SO(n)$-invariant, alors, pour tout élément $H \in O(n) - SO(n)$, le champ de tenseurs :*

$$Q(x) = H^{-1} \cdot T(Hx)$$

est aussi $SO(n)$-invariant. En outre $Q(x)$ ne dépend pas du choix de H dans $O(n) - SO(n)$.

Démonstration. Quel que soit $A \in Gl(n; \mathbb{R})$, on a

$$A \cdot Q(x) = AH^{-1}T(Hx) = H^{-1}(HAH^{-1}) \cdot T(Hx)$$

Or, si $A \in SO(n)$, on a aussi $HAH^{-1} \in SO(n)$ et puisque $T(x)$ est $SO(n)$-invariant, il en résulte

$$A \cdot Q(x) = H^{-1} \cdot T(HAH^{-1}Hx) = H^{-1} \cdot T(HAx)$$

c'est-à-dire

$$A \cdot Q(x) = Q(Ax) \quad ,$$

ce qui prouve notre première assertion.

D'autre part, si l'on considère un autre élément $B \in O(n) - SO(n)$, alors il existe $D \in SO(n)$ tel que $B = DH$ de sorte que

$$B^{-1} \cdot T(Bx) = H^{-1}D^{-1} \cdot T(Bx) = H^{-1} \cdot T(D^{-1}Bx) = H^{-1} \cdot T(Hx) \quad ,$$

ce qui prouve aussi notre deuxième assertion.

Exemple. Considérons un champ covariant de degré p sur $\mathbb{R}^n$:

$$T(x) = \sum T_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x^1, x^2, \cdots, x^n) dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p} \ .$$

Soit H la matrice qui résulte de la matrice unité d'ordre n en y remplaçant son premier coefficient par -1. Alors $H \in O(n) - SO(n)$ et $H^{-1} \cdot T(Hx) = \sum (-1)^{\tau_1} T_{i_1 i_2 \cdots i_p}(-x^1, x^2, \cdots, x^n) dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$ où $\tau_1 = \tau_1(i_1, i_2, \cdots, i_p)$ désigne le nombre des indices égaux à 1 dans la suite correspondante $i_1, i_2, \cdots, i_\rho$. D'après la proposition, si $T(x)$ est $SO(n)$-invariant, alors $H^{-1} \cdot T(Hx)$ est aussi $SO(n)$-invariant.

Proposition 8.3. $\Gamma SO(n)$ *est la somme directe des* Γ*-modules* $\Gamma O(n)$ *et* $\Gamma PSO(n)$ *:*

$$\Gamma SO(n) = \Gamma O(n) \oplus \Gamma PSO(n).$$

Autrement dit, étant donné un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant $T(x)$, on peut déterminer de façon unique un champ de tenseurs $O(n)$-invariant $L(x)$ et un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant pur $M(x)$ tels que

$$T(x) = L(x) + M(x).$$

Démonstration. Choississant un élément $H \in O(n) - SO(n)$, on définit le champ $SO(n)$-invariant :

$$H^{-1} \cdot T(Hx)$$

conformément à la proposition précédente. Par conséquent les champs de tenseurs :

$$L(x) = \frac{T(x) + H^{-1} \cdot T(Hx)}{2} \quad , \quad M(x) = \frac{T(x) - H^{-1} \cdot T(Hx)}{2}$$

sont aussi $SO(n)$-invariants. Or, puisque $T(x)$ est $SO(n)$-invariant et $HH \in SO(n)$, il en résulte $T(HHx) = HH \cdot T(x)$ donc aussi

$$H^{-1} \cdot T(HHx) = H \cdot T(x)$$

Cela entraîne

$$L(Hx) = \frac{T(Hx) + H \cdot T(x)}{2} \quad , \quad M(Hx) = \frac{T(Hx) - H \cdot T(x)}{2}$$

D'autre part

$$H \cdot L(x) = \frac{H \cdot T(x) + T(Hx)}{2} \quad , \quad H \cdot M(x) = \frac{H \cdot T(x) - T(Hx)}{2}$$

de sorte que

$$H \cdot L(x) = L(Hx) \quad \text{et} \quad H \cdot M(x) = -M(Hx)$$

D'après la proposition 8.1, $L(x)$ est $O(n)$-invariant et $M(x)$ est $SO(n)$-invariant pur. Nous obtenons donc la décomposition annoncée :

$$T(x) = L(x) + M(x)$$

qui est unique du fait que

$$\Gamma O(n) \cap \Gamma PSO(n) = \{0\}.$$

Proposition 8.4. *Le produit tensoriel de deux champs de tenseurs $SO(n)$-invariants (resp. $O(n)$-invariants) est aussi $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant).*
Le produit tensoriel de deux champs de tenseurs $SO(n)$-invariants purs est $O(n)$-invariant.
Le produit tensoriel d'un champ de tenseurs $O(n)$-invariant et d'un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant pur est $SO(n)$-invariant pur.

Ces assertions résultent aussitôt de l'égalité

$$A \cdot \Big(L(x) \otimes Q(x) \Big) = A \cdot L(x) \otimes A \cdot Q(x)$$

qui est valable quels que soient les champs de tenseurs $L(x)$ et $Q(x)$ et quel que soit $A \in Gl(n;\mathbb{R})$.

Exemple. Le champ de tenseurs :

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} x^j dx^j$$

étant $O(n)$-invariant, le produit tensoriel

$$\otimes^p F(x) = \sum x^{j_1} \cdots x^{j_p} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_p}$$

est aussi $O(n)$-invariant.

Désormais nous noterons $(\Gamma SO(n))_p^q$ (resp. $(\Gamma O(n))_p^q$, resp. $(\Gamma PSO(n))_p^q$) le sous-module de $\Gamma SO(n)$ (resp. $\Gamma O(n)$, resp. $\Gamma PSO(n)$) constitué par les champs de tenseurs du type (q,p).

Proposition 8.5. *Si $q \geq 1$ et $p \geq 1$, toute contraction d'un champ de tenseurs $T \in (\Gamma SO(n))_p^q$ (resp. $T \in (\Gamma O(n))_p^q$, resp. $T \in (\Gamma PSO(n))_p^q$) donne lieu à un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur).*

En fait, cela traduit, dans un cas particulier, le fait que l'action de $G\ell(n;\mathbb{R})$ sur les tenseurs est permutable avec les contractions.

Cela dit, nous allons expliciter maintenant les définitions posées en termes de coordonnées.

Etant donnée une matrice

$$A = [A_i^j] = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} \in O(n) \quad ,$$

on note $\hat{A}$ sa transposée :

$$\hat{A} = [\hat{A}_i^j] = [A_j^i] = A^{-1}$$

et l'on considère la transformation $y = Ax$ avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

ainsi que sa réciproque $x = \hat{A}y$.

Alors

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = A_j^i \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \hat{A}_j^i$$

de sorte q'un champ de tenseurs de type (q, p) :

$$T(x) = \sum T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p} \qquad (8.1)$$

est $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant) si et seulement si les conditions :

$$T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}(Ax) = \sum T_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}^{\beta_1 \cdots \beta_q}(x) A_{\beta_1}^{j_1} \cdots A_{\beta_q}^{j_q} \hat{A}_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \hat{A}_{i_p}^{\alpha_p} \qquad (8.2)$$

sont satisfaites pour toute matrice $A \in SO(n)$ (resp. $A \in O(n)$).

Si l'on y remplace x par $\hat{A}y$ et ensuite $\hat{A}$ par A, on obtient aussi le critère ci-après :

Le champ de tenseurs (8.1) est $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant) si et seulement si ses composantes satisfont aux conditions :

$$T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}(x) = \sum T_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}^{\beta_1 \cdots \beta_q}(Ax) \hat{A}_{\beta_1}^{j_1} \cdots \hat{A}_{\beta_q}^{j_q} A_{i_1}^{\alpha_1} \cdots A_{i_p}^{\alpha_p} \qquad (8.3)$$

pour toute matrice $A \in SO(n)$ (resp. $A \in O(n)$).

Naturellement, pour un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant pur, on aura les conditions (8.2) ou (8.3) lorsque $A \in SO(n)$ et les conditions qui en résultent si l'on change le signe des premiers membres lorsque $A \in O(n) - SO(n)$.

Cela dit, I étant la matrice unité d'ordre n, on a :

$$(-1)I = -I \in O(n) \quad \text{quel que soit} \quad n,$$

$$\text{et} \quad -I \in SO(n) \quad \text{si et seulement si} \quad n \quad \text{est pair.}$$

Cette propriété entraîne les remarques ci-après :

Remarque 8.1. *Si le champ de tenseurs (8.1) est $O(n)$-invariant, on a :*

$$T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(-x) = \varepsilon T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(x)$$

avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que $p + q$ est pair ou impair.

Pour le voir, on applique les relations (8.2) avec $A = -I$.

Remarque 8.2. *Si le champ de tenseurs (8.1) est $SO(n)$-invariant et si l'entier n est pair alors :*

$$T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(-x) = \varepsilon T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(x)$$

avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que $p + q$ est pair ou impair.

Remarque 8.3. *Supposons que le champ de tenseurs (8.1) soit $SO(n)$-invariant pur. Alors :*

a) *si n est pair, on a*

$$T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(-x) = \varepsilon T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(x)$$

avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que $p + q$ est pair ou impair.

b) *si n est impair, on a*

$$T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(-x) = \varepsilon T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}(x)$$

avec $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que $p + q$ est impair ou pair.

La première assertion est une conséquence immédiate de la remarque 8.2. D'autre part, puisque $-I \in O(n) - SO(n)$ lorsque n est impair, pour obtenir la deuxième assertion, il suffit d'appliquer au cas où $A = -I$ les relations qui résultent de (8.2) par changement de signes des premiers membres.

Dans les applications, il est souvent commode de tester la $SO(n)$-invariance (resp. la $O(n)$-invariance, resp. la $SO(n)$-invariance pure) en tenant compte du changement de base et du changement de base duale relatifs à la transformation $y = Ax$. Or la base canonique

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big)$$

se transforme au moyen de la matrice contragrediente $\widehat{A^{-1}} = A$, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial y^\beta} = \sum_{j=1}^{n} A_j^\beta \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Mais, pour respecter la règle habituelle de sommation sur les indices répétés, nous remplaçons A_j^β par son égal $\hat{A}_\beta^j$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial y^\beta} = \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_\beta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{8.4}$$

Pour ce qui concerne la base duale correspondante

$$(dx^1, \cdots, dx^n) \quad ,$$

elle se transforme au moyen de A, d'où

$$dy^\alpha = \sum_{i=1}^{n} A_i^\alpha dx^i \tag{8.5}$$

Considérons maintenant l'expression qui résulte de (8.1) en y remplaçant partout x par y :

$$T(y) = \sum T_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}^{\beta_1 \cdots \beta_q}(y) \frac{\partial}{\partial y^{\beta_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\beta_q}} \otimes dy^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dy^{\alpha_p}$$

Alors les conditions (8.3) sont équivalentes au critère suivant :

Proposition 8.6. *Le champ de tenseurs (8.1) est $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant), si et seulement si, en remplaçant, dans l'expression* *de $T(y)$, y par Ax, ainsi que $\frac{\partial}{\partial y\beta}$ et dy^α respectivement par (8.4) et (8.5), on trouve, après les réductions, $T(y) = T(x)$. D'autre part, (8.1) est $SO(n)$-invariant pur, si et seulement si l'on trouve $T(y) = T(x)$ lorsque $A \in SO(n)$ et $T(y) = -T(x)$ lorsque $A \in O(n) - SO(n)$.*

Cela dit, à partir d'un champ différentiable de tenseurs $SO(n)$-invariant, on peut en déduire d'autres au moyen de dérivations ordinaires. Celles-ci introduisent alors de nouveaux indices covariants dont les positions peuvent être choisies arbitrairement. La liberté de choix dans les positions des indices joue un certain rôle dans les calculs.

Proposition 8.7. *Supposons que le champ de tenseurs (8.1) soit $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.*
Alors en posant

$$\frac{\partial T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^k} = L^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_\ell k i_{\ell+1}\cdots i_p}(x)$$

on définit les composantes d'un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) de type $(q, p+1)$ sur $\mathbb{R}^n$. La position de l'indice k pouvant être choisie de $p+1$ manières, on obtient ainsi $p+1$ champs de tenseurs formellement différents (mais essentiellement identiques).

Démonstration. En dérivant les deux membres de (8.2) par rapport aux coordonnées de $y = Ax$ et en tenant compte de

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} = \hat{A}^\gamma_k$$

on obtient

$$\frac{\partial T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(y)}{\partial y^k} = \sum \frac{\partial T^{\beta_1\cdots\beta_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(x)}{\partial x^\gamma} \hat{A}^\gamma_k A^{j_1}_{\beta_1}\cdots A^{j_q}_{\beta_q}\hat{A}^{\alpha_1}_{i_1}\cdots\hat{A}^{\alpha_p}_{i_p}$$

ce qui s'écrit encore

$$L^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_\ell k i_{\ell+1}\cdots i_p}(y) = \sum L^{\beta_1\cdots\beta_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell\gamma\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_p}(x)\times$$
$$A^{j_1}_{\beta_1}\cdots A^{j_q}_{\beta_q}\hat{A}^{\alpha_1}_{i_1}\cdots\hat{A}^{\alpha_\ell}_{i_\ell}\hat{A}^\gamma_k\hat{A}^{\alpha_{\ell+1}}_{i_{\ell+1}}\cdots\hat{A}^{\alpha_p}_{i_p}$$

et démontre notre assertion pour un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant ou $O(n)$-invariant. Dans le cas d'un champ de tenseur $SO(n)$-invariant pur, on complète le raisonnement de façon évidente.

Corollaire 8.7.1. *Supposons que le champ de tenseurs (8.1) soit $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) et de classe C^r, $r \geq 1$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout entier positif $\ell \leq r$, les dérivés partielles d'ordre ℓ des composantes de $T(x)$ donnent lieu à $(p+1)(p+2)\cdots(p+\ell)$ champs de tenseurs $SO(n)$-invariants (resp. $O(n)$-invariants, resp. $SO(n)$-invariants purs) de type $(q, p+\ell)$ sur $\mathbb{R}^n$. Ces champs de tenseurs se distinguent les uns des autres par les positions des nouveaux indices de covariance, de sorte que l'on peut les identifier au moyen de permutations d'indices.*

Démonstration. Pour $\ell = 1$, on obtient $p+1$ champs de tenseurs d'après la proposition (8.7). A partir de chacun d'eux on obtient de la même façon, au moyen d'une nouvelle série de dérivations, $p+2$ champs de tenseurs, ce qui donne en tout $(p+1)(p+2)$ champs de tenseurs, et l'on voit que le résultat s'obtient par récurrence.

Corollaire 8.7.2. *Si $f \in \Gamma$, alors, pour tout entier positif ℓ, les dérivées partielles de $f(\|x\|)$ d'ordre ℓ forment un champ de tenseurs $O(n)$-invariant sur $\mathbb{R}^n$.*

En effet, la fonction $f(\|x\|)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ d'après la proposition 7.1. D'autre part, puisqu'elle dépend uniquement de $\|x\|$, elle est $O(n)$-invariante, de sorte que le corollaire 8.7.1. s'y applique.

Proposition 8.8. *Soient*

$$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(x)$$

les composantes d'un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) de type (q,p). Alors :

a) *Si $q \geq 1$, le transfert en bas, dans un rang déterminé, d'un indice contravariant de rang déterminé, définit les composantes d'un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) de type $(q-1, p+1)$.*

b) *Si $p \geq 1$, le transfert en haut, dans un rang déterminé, d'un indice covariant de rang déterminé, définit les composantes d'un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) de type $(q+1, p-1)$.*

c) *En particulier, si l'on pose*

$$L_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}(x) = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(x)$$

$$\Big(\quad \textit{resp.} \quad M^{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}(x) = T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(x)\Big)$$

on définit les composantes d'un champ de tenseurs covariants $L(x)$ (resp. d'un champ de tenseurs contravariants $M(x)$) $SO(n)$-invariant (resp. $O(n)$-invariant, resp. $SO(n)$-invariant pur) de degré $p+q$.

Tout cela est évident. En effet, compte tenu de $\hat{A}^k_\ell = A^\ell_k$, les transferts signalés d'indices n'affectent pas la validité des conditions (8.2).

En vertu de la proposition 8.8c, tout champ de tenseurs $SO(n)$-invariant peut être identifié à un champ de tenseurs covariants. Cela est vrai en particulier pour les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants de la physique mathématique, bien qu'ils s'introduisent le plus souvent comme champs de tenseurs de type mixte (q,p) avec $q>0$. Cette écriture facilite, certes, l'opération de contraction, mais n'est pas obligatoire. Pour aborder le problème fondamental relatif à la construction effective de champs de tenseurs $SO(n)$-invariants, il est recommandé de se limiter à l'écriture covariante, c'est-à-dire à la considération du Γ-module

$$\left(\Gamma SO(n)\right)^0_p \quad \text{pour} \quad p = 1,2,3,\cdots$$

Cela entraîne une simplification considérable des raisonnements.

9. Sur la construction des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants

Etant donné un point quelconque $x \in \mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\}$, il existe un élément $\Delta \in SO(n)$ qui applique x à un point du demi-axe des $x^1 > 0$, et puisque Δ conserve la norme on a

$$\Delta x = (\|x\|, 0, 0, \cdots, 0)$$

où l'on écrit abusivement sous forme de matrice-ligne le deuxième membre.

Si l'on fait varier x dans $\mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\}$, on obtient une application :

$$\Delta : \mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\} \to SO(n)$$

telle que

$$\Delta(x)x = (\|x\|, 0, 0, \cdots, 0)$$

Celle-ci est toujours discontinue à l'origine (cf. [3]). D'autre part lorsque $n=2$, elle est analytique et définie de façon unique sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,\ldots,0)\}$:

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\|x\|} & \frac{x^2}{\|x\|} \\ -\frac{x^2}{\|x\|} & \frac{x^1}{\|x\|} \end{pmatrix}, \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

Par contre, lorsque $n > 2$, elle ne peut pas être continue en tout point de $\mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\}$. On démontre alors [3] que, à tout couple de coordonnées $(x^i, x^j), i \neq j$, on peut associer un ouvert dense dans $\mathbb{R}^n$:

$$U_{ij} = U_{ji} = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \big| |x^i| + |x^j| > 0\}$$

tel qu'il existe une application analytique positivement homogène de degré zéro :

$$\Delta : U_{ij} \to SO(n)$$

donnant lieu à la condition

$$\Delta(x)x = (\|x\|, 0, 0, \cdots, 0).$$

Cette application n'est pas définie de façon unique. Quel que soit $B \in S0(n-1)$, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Delta(x)$$

donne lieu à la même condition. Mais la première ligne d'une telle matrice s'identifie toujours au vecteur :

$$\frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{x^1}{\|x\|} \quad , \quad \frac{x^2}{\|x\|} \quad , \ldots, \quad \frac{x^n}{\|x\|} \right) \quad ,$$

comme on s'en assure aussitôt en vertu de

$$\hat{\Delta}(x)\Delta(x) = I \quad ,$$

$\hat{\Delta}(x)$ étant la transposée de $\Delta(x)$.

Cela dit, soit

$$T(x) = T(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

un champ de tenseurs C^∞ et $SO(n)$-invariant sur $\mathbb{R}^n$. Alors, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\}$, il existe un ouvert U_{ij} tel que $x \in U_{ij}$, de sorte qu'en utilisant une application C^∞ :

$$\Delta \ : \ U_{ij} \to SO(n)$$

pour laquelle
$$\Delta(x)x = (\|x\|, 0, 0, \cdots, 0)$$
on obtient
$$\Delta(x) \cdot T(x) = T(\Delta(x)x) = T(\|x\|, 0, 0, \cdots, 0) \quad ,$$
d'où
$$T(x) = (\Delta(x))^{-1} \cdot T(\|x\|, 0, 0, \cdots, 0) = \hat{\Delta}(x) \cdot T(\|x\|, 0, 0, \cdots, 0).$$
Il en résulte deux conclusions :

a) *La restriction de $T(x)$ à $\mathbb{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}$ est complétement définie par sa restriction à la demi-droite ouverte :*
$$d = \{x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \big| x^1 > 0, x^2 = x^3 = \cdots = x^n = 0\}$$

b) $T(x^1, 0, \cdots, 0)$ *doit satisfaire à quelques conditions spécifiques au voisinage de $x^1 = 0$ de façon que*
$$\hat{\Delta}(x) \cdot T(\|x\|, 0, 0, \cdots, 0)$$
soit aussi bien défini et C^∞ à l'origine (et cela malgré la discontinuité de $\Delta(x)$ à l'origine).

La proposition ci-après est aussi évidente.

Proposition 9.1. *Soient $T(x)$ et $L(x)$ deux champs de tenseurs sur $\mathbb{R}^n$ indéfiniment dérivables, $SO(n)$-invariants et de même type (q, p). Alors, si*
$$T(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = L(x^1, 0, 0, \cdots, 0)$$
pour tout $x^1 > 0$, on aura $T(x) = L(x)$ sur R^n.

D'après ce qui précède, pour déterminer un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant sur $\mathbb{R}^n$, nous devons résoudre deux problèmes :

Premièrement, préciser les conditions satisfaites par les restrictions de ses composantes à la demi droite d.

Deuxièmement, établir les conditions spécifiques évoquées précédemment.

Le premier problème ne se pose pas lorsque $n = 2$. Alors les restrictions des composantes de $T(x) = T(x^1, x^2)$ à la demi-droite d

sont des fonctions différentiables quelconques satisfaisant aux conditions de différentiabilité requises pour $x^1 = 0$. Par contre, lorsque $n > 2$, les restrictions des composantes de $T(x) = T(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ à d satisfont à des conditions qui deviennent de plus en plus compliquées au fur et à mesure que $p + q$ augmente.

Cela dit, nous savons déjà que tout champ de tenseurs $SO(n)$-invariant peut être considéré comme un champ de tenseurs covariants, de sorte que nous pouvons nous limiter à la considération des Γ-modules :

$$\Big(\Gamma SO(n)\Big)_p^0 \quad , \quad (p = 1, 2, 3, \cdots).$$

Or, puisque, d'après la proposition 8.3.,

$$\Big(\Gamma SO(n)\Big)_p^0 = \Big(\Gamma O(n)\Big)_p^0 \oplus \Big(\Gamma PSO(n)\Big)_p^0 \quad ,$$

il suffit finalement d'étudier séparément d'une part les champs de tenseurs $O(n)$-invariants covariants et d'autre part les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants purs covariants.

Proposition 9.2. *Si $p \leq n - 2$, alors $(\Gamma PSO(n))_p^0 = 0$, donc aussi*

$$(\Gamma SO(n))_p^0 = (\Gamma O(n))_p^0.$$

Autrement dit, si $p \leq n - 2$, alors tout champ de tenseurs $SO(n)$-invariant de degré p est $O(n)$-invariant.

La démonstration de ce résultat se trouve dans [3].

La construction des champs de tenseurs $O(n)$-invariants et $SO(n)$-invariants purs s'obtient en mettant en évidence des systèmes de générateurs. Lorsque $n = 2$ ceux-ci sont définis par des produits tensoriels de divers ordres de

$$\omega^1(x) = x^1 dx^1 + x^2 dx^2 \quad \text{et} \quad \omega^2(x) = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 \quad ,$$

de sorte que les problèmes qui s'y rattachent ne présentent pas de difficultés spécifiques [3]. Cependant le cas où $n = 2$ est sans intérêt pour les problèmes gravitationnels. C'est pourquoi les constructions que nous allons indiquer sont relatives à des dimensions $n \geq 3$.

10. Construction de champs de tenseurs $O(n)$-invariants

Dans ce paragraphe nous allons construire les champs de tenseurs $O(n)$-invariants qui interviennent couramment dans les problèmes gravitationnels. Les constructions seront explicitées par les propositions 10.1, 10.2, 10.3 ci-dessous dont les démonstrations seront données de façon détaillée. Nous insisterons en particulier sur les conditions de différentiabilité à l'origine qui sont inconcevables dans l'approche classique des problèmes.

Proposition 10.1. *Si $n \geq 3$, alors $\Big(\Gamma SO(n)\Big)_1^0 = \Big(\Gamma O(n)\Big)_1^0$. En outre, $\Big(\Gamma O(n)\Big)_1^0$ est le Γ-module libre engendré par la forme $O(n)$-invariante :*

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} x^j dx^j$$

En d'autres termes, si $n \geq 3$, toute 1-forme $SO(n)$-invariante est $O(n)$-invariante et s'obtient en multipliant $F(x)$ par une fonction $f(\|x\|)$ satisfaisant aux conditions de la proposition 7.1.

Démonstration. L'égalité $\Big(\Gamma SO(n)\Big)_1^0 = \Big(\Gamma O(n)\Big)_1^0$ pour $n \geq 3$ résulte aussitôt de la proposition 9.2. Supposons donc que la forme

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} T_j(x) dx^j \quad , \quad \Big(x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)\Big) \quad ,$$

soit $O(n)$-invariante.

Soit A la matrice qui résulte de la matrice unité en y remplaçant $I_k^k = 1$ par -1. Alors $A \in O(n) - SO(n)$ et, d'après (8.2), on trouve

$$T_k(x^1, \cdots, x^{k-1}, -x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = -T_k(x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)$$

Par conséquent

$$T_k(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = 0 \quad , \quad k > 1 \quad ,$$

et

$$T_1(-x^1, 0, 0, \cdots, 0) = -T_1(x^1, 0, 0, \cdots, 0)$$

La restriction de $T(x)$ à l'axe des x^1 se réduit donc à la forme

$$T_1(x^1, 0, 0, \cdots, 0)dx^1$$

et puisque la fonction indéfiniment dérivable

$$h(x^1) = T_1(x^1, 0, 0, \cdots, 0)$$

est impaire, on a $h(0) = 0$ ce qui permet d'écrire

$$h(t) = t \int_0^1 h'(tu)du$$

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{h(t)}{t} \quad \text{pour} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = h'(0)$$

est donc une fonction paire indéfiniment dérivable. En vertu du corollaire 7.1.2., la fonction $f(\|x\|)$ est alors C^∞ partout par rapport aux coordonnées $x^1, x^2, \cdots, x^n$. Or, la restriction de $T(x)$ au demi-axe des $x^1 \geq 0$ s'écrit

$$f(x^1)x^1dx^1$$

et s'identifie en conséquence à la restriction au même demi-axe de la forme

$$f(\|x\|)F(x)$$

D'après la proposition 9.1, il en résulte

$$T(x) = f(\|x\|)F(x)$$

Proposition 10.2. $\Big(\Gamma O(n)\Big)_2^0$ *est le* Γ*-module libre engendré par les deux champs de tenseurs :*

$$E(x) = \sum_{j=1}^{n}(dx^j \otimes dx^j) \quad \text{et} \quad F(x) \otimes F(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x^i dx^i\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{n} x^j dx^j\Big)$$

Démonstration. Soit

$$T(x) = \sum T_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j \quad , \quad \Big(x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)\Big) \quad ,$$

un champ de tenseurs $O(n)$-invariant sur $\mathbb{R}^n$.

En utilisant d'abord la matrice qui résulte de la matrice unité si l'on y remplace $I_k^k = 1$ par -1, la condition (8.3) donne

$$T_{k\ell}(x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = -T_{k\ell}(x^1, \cdots, x^{k-1}, -x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)$$

et

$$T_{\ell k}(x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = -T_{\ell k}(x^1, \cdots, x^{k-1}, -x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)$$

avec $k \neq \ell$.

En utilisant ensuite la matrice qui résulte de la matrice unité si l'on y permute les lignes de rangs k et ℓ, $k < \ell$, la même condition donne

$$T_{kk}(x^1, \cdots, x^k, \cdots, x^\ell, \cdots, x^n) = T_{\ell\ell}(x^1, \cdots, x^\ell, \cdots, x^k, \cdots, x^n).$$

Par conséquent

$$T_{1k}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = T_{k1}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = 0 \quad \text{avec} \quad k > 1 \quad ,$$

$$T_{k\ell}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = 0 \quad \text{avec} \quad k > 1, \ell > 1, k \neq \ell \quad ,$$

$$T_{kk}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = T_{\ell\ell}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) \quad \text{avec} \quad k > 1, \ell > 1.$$

La restriction de $T(x)$ à l'axe des x^1 se réduit donc au tenseur

$$T_{11}(x^1, 0, 0, \cdots, 0)(dx^1 \otimes dx^1) + T_{22}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) \sum_{j=2}^{n} (dx^j \otimes dx^j).$$

D'autre part, puisque la remarque 8.1 entraîne

$$T_{kk}(-x^1, -x^2, \cdots, -x^n) = T_{kk}(x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad ,$$

les fonctions indéfiniment dérivables

$$h_1(x^1) = T_{11}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) \quad , \quad f_1(x^1) = T_{22}(x^1, 0, 0, \cdots, 0)$$

sont paires, de sorte que les fonctions $h_1(\|x\|)$ et $f_1(\|x\|)$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ en vertu du corollaire 7.1.2. En outre, compte tenu de

$$T_{11}(x^1, x^2, x^3 \cdots, x^n) = T_{22}(x^2, x^1, x^3 \cdots, x^n) \quad ,$$

on en déduit $h_1(0) = f_1(0)$.

Notons $h(t)$ la fonction indéfiniment dérivable $h_1(t) - f_1(t), t \in \mathbb{R}$. Puisqu'elle est paire, on a $h'(0) = 0$ et, compte tenu de $h(0) = 0$, la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale permet d'écrire

$$h(t) = t^2 \int_0^1 (1-u)h''(tu)du.$$

Par conséquent la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obtenue en posant

$$f_2(t) = \frac{h(t)}{t^2} \quad \text{pour} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f_2(0) = \frac{1}{2}h''(0)$$

est indéfiniment dérivable, et puisqu'elle est paire, la fonction $f_2(\|x\|)$ appartient à l'algèbre Γ, d'après le corollaire 7.1.2.

Une vérification facile montre maintenant que la restriction de $T(x)$ au demi-axe des $x^1 \geq 0$ s'identifie à la restriction du champ de tenseurs

$$f_1(\|x\|)E(x) + f_2(\|x\|)(F(x) \otimes F(x))$$

au même demi-axe. D'après la proposition 9.1, on obtient donc en définitive

$$T(x) = f_1(\|x\|)E(x) + f_2(\|x\|)(F(x) \otimes F(x)) \qquad \textit{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 10.2. *Tout champ de tenseurs covariant $O(n)$-invariant de degré 2 est symétrique et ses composantes sont données par les formules :*

$$T_{ii}(x) = f_1(\|x\|) + (x^i)^2 f_2(\|x\|) \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad ,$$

$$T_{ij}(x) = x^i x^j f_2(\|x\|) \quad , \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n \ ; \ i \neq j)$$

les fonctions $f_1(\|x\|)$ et $f_2(\|x\|)$ appartenant à l'algèbre Γ.

Proposition 10.3. $\Big(\Gamma O(n)\Big)_3^0$ *est le Γ-module libre engendré par les quatre champs de tenseurs (générateurs) :*

$$F(x) \otimes F(x) \otimes F(x) \quad , \quad F(x) \otimes E(x)$$
$$\sum_{k=1}^{n} (dx^k \otimes F(x) \otimes dx^k) \quad , \quad E(x) \otimes F(x).$$

Démonstration. Soit

$$T(x) = \sum T_{ijk}(x) dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \quad , \quad \big(x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)\big)$$

un champ de tenseurs $O(n)$-invariant supposé C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

En premier lieu considérons une composante

$$T_{ijk}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

tel que l'indice 1 ne figure pas dans la suite ijk. Alors un certain indice $s \in \{2, 3, \cdots, n\}$ y figure une fois ou trois fois, et le raisonnement déjà utilisé donne :

$$T_{ijk}(x^1, \cdots, -x^s, \cdots, x^n) = -T_{ijk}(x^1, \cdots, x^s, \cdots, x^n) \quad ,$$

d'où

$$T_{ijk}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = 0$$

En deuxième lieu considérons une composante $T_{ijk}(x)$ telle que l'indice 1 figure deux fois dans la suite ijk. Alors un certain indice $s \in \{2, 3, \cdots, n\}$ y figure une fois, et le même raisonnement entraîne

$$T_{ijk}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = 0$$

En troisième lieu supposons que l'indice 1 figure une seule fois dans la suite ijk. Alors, si les deux autres indices sont distincts, on trouve encore

$$T_{ijk}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = 0.$$

Il reste donc à considérer le cas où ceux-ci sont identiques. Alors moyennant une matrice de permutation convenable, on obtient

$$T_{1ii}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = T_{1jj}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) \quad ,$$

$$T_{i1i}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = T_{j1j}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) \quad ,$$

$$T_{ii1}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) = T_{jj1}(x^1, 0, 0, \cdots, 0) \quad ,$$

$$(i \neq j, i \neq 1, j \neq 1) \quad ,$$

de sorte que l'on peut introduire les fonctions indéfiniment dérivables :

$$\alpha_1(t) = T_{122}(t, 0, 0, \cdots, 0) = T_{133}(t, 0, 0, \cdots, 0) = \cdots = T_{1nn}(t, 0, 0, \cdots, 0),$$

$\alpha_2(t) = T_{212}(t,0,0,\cdots,0) = T_{313}(t,0,0,\cdots,0) = \cdots = T_{n1n}(t,0,0,\cdots,0),$

$\alpha_3(t) = T_{221}(t,0,0,\cdots,0) = T_{331}(t,0,0,\cdots,0) = \cdots = T_{nn1}(t,0,0,\cdots,0),$

qui sont impaires d'après la remarque 8.1. Celle-ci entraîne aussi que la fonction indéfiniment dérivable :

$$\alpha(t) = T_{111}(t,0,0,\cdots,0)$$

est impaire. Il en résulte en particulier :

$$\alpha(0) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0 \quad ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\alpha(t) = t\int_0^1 \alpha'(tu)du \quad , \quad \alpha_k(t) = t\int_0^1 \alpha_k'(tu)du \quad , \quad (k=1,2,3) \quad ,$$

et de définir les fonctions paires indéfiniment dérivables :

$$\phi(t) = \frac{\alpha(t)}{t} = \int_0^1 \alpha'(tu)du \quad , \quad \phi(0) = \alpha'(0) \quad ,$$

$$f_k(t) = \frac{\alpha_k(t)}{t} = \int_0^1 \alpha_k'(tu)du \quad , \quad f_k(0) = \alpha_k'(0) \quad , \quad (k=1,2,3) \quad ,$$

de sorte que la restriction de $T(x)$ à l'axe des x^1 s'écrit :

$$L(x^1) = x^1\phi(x^1)(dx^1\otimes dx^1\otimes dx^1) + x^1 f_1(x^1)\sum_{k=2}^{n}(dx^1\otimes dx^k\otimes dx^k)$$

$$+x^1 f_2(x^1)\sum_{k=2}^{n}(dx^k\otimes dx^1\otimes dx^k) + x^1 f_3(x^1)\sum_{k=2}^{n}(dx^k\otimes dx^k\otimes dx^1).$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction paire C^∞ obtenue en posant

$$f(t) = \frac{\phi(t) - (f_1(t)+f_2(t)+f_3(t))}{t^2} \quad ,$$

fonction discontinue en général pour $t = 0$. On peut alors définir un champ de tenseurs $O(n)$-invariant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{(0,\ldots,0)\}$ en posant

$$M(x) = f(\|x\|)(F(x)\otimes F(x)\otimes F(x)) + f_1(\|x\|)(F(x)\otimes E(x))$$

$$+f_2(\|x\|)\sum_{k=1}^{n}(dx^k \otimes F(x) \otimes dx^k) + f_3(\|x\|)(E(x) \otimes F(x))$$

et l'on constate aussitôt que sa restriction à l'axe des x^1 est définie aussi pour $x^1 = 0$ et s'identifie à $L(x^1)$. Par conséquent, d'après la proposition 9.1, on a

$$T(x) = M(x)$$

pourvu que $M(x)$ soit aussi différentiable à l'origine. Nous allons démontrer que cette condition est satisfaite si et seulement si

$$\phi(0) = f_1(0) + f_2(0) + f_3(0).$$

Pour l'établir, on peut utiliser, par exemple, la composante $M_{122}(x)$ ou, mieux, la composante

$$M_{123}(x) = f(\|x\|)x^1x^2x^3.$$

Soit $\psi(t) = \phi(t) - (f_1(t) + f_2(t) + f_3(t))$, donc aussi $f(t) = \frac{\psi(t)}{t^2}$. La dérivée partielle de $M_{123}(x)$ par rapport à x^1 au point de coordonnées

$$x^1 = 0, x^2 = a, x^3 = b, x^4 = x^5 = \cdots = x^n = 0 \quad , \quad (a \neq 0, b \neq 0) \quad ,$$

est égale à

$$\lim_{x^1 \to 0} \frac{f(\sqrt{(x^1)^2 + a^2 + b^2})x^1ab}{x^1} = abf(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{ab}{a^2 + b^2}\psi(\sqrt{a^2 + b^2})$$

de sorte que, si $\psi(0) \neq 0$, elle ne possède pas de limite lorsque $a \to 0$, $b \to 0$, ce qui contredit la différentiabilité. Par conséquent $\psi(0) = 0$. Comme $\psi(t)$ est une fonction paire, on a aussi $\psi'(0) = 0$ et la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale donne

$$\psi(t) = t^2 \int_0^1 (1-u)\psi''(tu)du \quad ,$$

ce qui montre que la fonction paire

$$f(t) = \frac{\psi(t)}{t^2} \quad , \quad f(0) = \frac{1}{2}\psi''(0) \quad ,$$

est partout C^∞. Dans ces conditions, la fonction $f(\|x\|)$ appartient à l'algèbre Γ, d'après le corollaire 7.1.2, et puisqu'il en est de même des fonctions $f_1(\|x\|), f_2(\|x\|), f_3(\|x\|)$, $M(x)$ est partout C^∞ et l'on a en définitive

$$T(x) = M(x)$$

Cela démontre la propositon.

Corollaire 10.3. *Les composantes d'un champ de tenseurs* $T \in \Big(\Gamma O(n)\Big)^0_3$ *indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}^n$ *sont données par les formules :*

$$T_{iii}(x) = f(\|x\|)(x^i)^3 + (f_1(\|x\|) + f_2(\|x\|) + f_3(\|x\|))x^i \quad ,$$

$$T_{ijj}(x) = f(\|x\|)x^i(x^j)^2 + f_1(\|x\|)x^i \quad ,$$

$$T_{jij}(x) = f(\|x\|)x^i(x^j)^2 + f_2(\|x\|)x^i \quad ,$$

$$T_{jji}(x) = f(\|x\|)x^i(x^j)^2 + f_3(\|x\|)x^i \quad ,$$

$$T_{ijk}(x) = f(\|x\|)x^i x^j x^k \quad ,$$

$$(i, j, k = 1, 2, \cdots, n \ ; \ i \neq j \neq k \neq i) \quad ,$$

les fonctions $f(\|x\|), f_1(\|x\|), f_2(\|x\|), f_3(\|x\|)$ *appartenant à l'algèbre* Γ.

11. Construction de champs de tenseurs $SO(n)$-invariants purs

Puisque $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_p = 0$ pour $p \leq n-2$,d'après la proposition 9.2., nous avons à considérer les Γ-modules $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_p$ avec $p \geq n-1$.

Lorsque $n = 2$, on démontre [3] que $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_p$, $p \geq 1$, est le Γ-module libre engendré par les produits tensoriels à p facteurs de

$$\omega^1(x) = x^1 dx^1 + x^2 dx^2 \quad \text{et} \quad \omega^2(x) = x^1 dx^2 - x^2 dx^1$$

dans lesquels $\omega^2(x)$ figure un nombre impair de fois. Mais lorsque $n \geq 3$, la construction de $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_p$ se heurte à des difficultés considérables déjà pour $p = n+1$. On démontre encore [3] que $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_{n-1}$ (resp.

$\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_n$) est un Γ-module libre engendré par un générateur (resp. n générateurs).

Nous nous contentons de rappeler la structure de $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_{n-1}$.

Proposition 11.1. *Etant donnée une permutation quelconque σ de $1, 2, \cdots, n$, on note ε_σ son signe. Alors, pour tout entier $n \geq 2$, $\Big(\Gamma PSO(n)\Big)^0_{n-1}$ est le Γ-module libre engendré par le champ de tenseurs (générateur)*

$$N(x) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma x^{\sigma(1)} dx^{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma(n)} \quad ,$$

la somme étant étendue à toutes les permutations de $1, 2, \cdots, n$. Autrement dit, si $T(x)$ est un champ de tenseurs $SO(n)$-invariant pur C^∞ de degré $n-1$, alors il existe une fonction $f \in \Gamma$, définie de façon unique, telle que

$$T(x) = f(\|x\|)N(x)$$

Remarque 11.1. $N(x)$ s'identifie à la $(n-1)$-forme

$$(n-1)! \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Corollaire 11.1. $\Gamma PS0(3))^0_2$ *est le Γ-module libre engendré par le champ de tenseurs (générateur)*

$$N(x) = x^1(dx^2 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^2) + x^2(dx^3 \otimes dx^1 - dx^1 \otimes dx^3) \\ + x^3(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)$$

qui s'identifie à la forme

$$x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2$$

au facteur 2 près.

12. Champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

Les métriques spatio-temporelles relatives au champ gravitationnel d'une boule de matière rentrent dans le cadre général des champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, en notant $S\Theta(4)$ le sous-groupe de $SO(4)$ constitué par les matrices de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & O_H \\ O_V & A \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

avec

$$O_H = [0\ 0\ 0] \quad , \quad O_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A \in SO(3).$$

Un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sera noté (x^0, x) avec $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$, mais nous écrivons souvent t au lieu de x^0. Alors, d'après (12.1),

$$B \cdot (x^0, x) = B \cdot (t, x) = (t, Ax).$$

Par conséquent, un champ de tenseurs $T(x^0, x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sera $S\Theta(4)$-invariant si

$$B \cdot T(x^0, x) = T(x^0, Ax)$$

quelle que soit la matrice $A \in SO(3)$.

Soit Γ_0 l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables

$$f(x^0, \|x\|) = f(t, \|x\|) \quad , \quad \left(\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\right)$$

par rapport aux coordonnées t, x^1, x^2, x^3 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (cf. proposition 7.2.).

Alors l'ensemble des champs de tenseurs indéfiniment dérivables $S\Theta(4)$-invariants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est un Γ_0-module qui sera noté $\Gamma_0 S\Theta(4)$.

Soit $\Theta(4)$ le sous groupe de $O(4)$ constitué par les matrices (12.1) pour lesquelles $A \in O(3)$. Alors l'ensemble des champs de tenseurs C^∞ et $\Theta(4)$-invariants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est aussi un Γ_0-module qui sera noté $\Gamma_0\Theta(4)$.

Puisque $S\Theta(4) \subset \Theta(4)$, tout champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant est aussi $S\Theta(4)$-invariant de sorte que

$$\Gamma_0\Theta(4) \subset \Gamma_0 S\Theta(4)$$

Finalement un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant $T(x^0, x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sera appelé $S\Theta(4)$-*invariant pur* si

$$B \cdot T(x^0, x) = -T(x^0, Ax)$$

pour toute matrice $A \in O(3) - SO(3)$.

L'ensemble des champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants purs de classe C^∞ est un Γ_0-module qui sera noté $\Gamma_0 PS\Theta(4)$, et l'on a manifestement

$$\Gamma_0 PS\Theta(4) \subset \Gamma_0 S\Theta(4).$$

Il s'avère souvent nécessaire d'utiliser, au lieu de (12.1), l'écriture explicite

$$B = \begin{pmatrix} B_0^0 & B_1^0 & B_2^0 & B_3^0 \\ B_0^1 & B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ B_0^2 & B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ B_0^3 & B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{pmatrix}$$

les conditions

$$B_0^0 = 1, B_1^0 = B_2^0 = B_3^0 = B_0^1 = B_0^2 = B_0^3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

étant sous-entendues.

Cela permet en particulier d'expliciter les conditions d'invariance :

Un champ de tenseurs $T(x^0, x)$ de type (q,p) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant) si et seulement si ses composantes satisfont aux conditions :

$$T_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_q}(x^0, Ax) = \sum T_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}^{\beta_1 \cdots \beta_q}(x^0, x) B_{\beta_1}^{j_1} \cdots B_{\beta_q}^{j_q} \hat{B}_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \hat{B}_{i_p}^{\alpha_p} \qquad (12.2)$$

pour toute matrice $B = [B_i^j] \in S\Theta(4)$ (resp. pour toute matrice $B \in \Theta(4)$), en notant $\hat{B}_i^j$ les coefficients de la transposée $\hat{B} = B^{-1}$.

Les propriétés générales des champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants sont analogues à celles déjà vues des champs de tenseurs $SO(n)$-invariants et se démontrent de la même façon. C'est pourquoi nous allons les énoncer sans en donner des démonstrations.

Proposition 12.1. *Supposons que le champ de tenseurs $T(x^0, x)$ soit $S\Theta(4)$-invariant. Alors, pour que $T(x^0, x)$ soit $\Theta(4)$-invariant (resp. $S\Theta(4)$-invariant pur), il faut et il suffit qu'il existe un élément $B \in \Theta(4) - S\Theta(4)$ tel que*

$$B \cdot T(x^0, x) = T(B \cdot (x^0, x)) = T(x^0, Ax)$$

$$(\text{resp.} \quad B \cdot T(x^0, x) = -T(B \cdot (x^0, x)) = -T(x^0, Ax)).$$

Proposition 12.2. *Si le champ de tenseurs $T(x^0, x)$ est $S\Theta(4)$-invariant, alors pour tout $H \in \Theta(4) - S\Theta(4)$, le champ de tenseurs*

$$Q(x^0, x) = H^{-1} \cdot T(H \cdot (x^0, x))$$

est aussi $S\Theta(4)$-invariant. En outre $Q(x^0, x)$ ne dépend pas du choix de H dans $\Theta(4) - S\Theta(4)$.

Proposition 12.3. *$\Gamma_0 S\Theta(4)$ est la somme directe des Γ_0 modules $\Gamma_0\Theta(4)$ et $\Gamma_0 PS\Theta(4)$:*

$$\Gamma_0 S\Theta(4) = \Gamma_0\Theta(4) \oplus \Gamma_0 PS\Theta(4)$$

Proposition 12.4. *Tout champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est entièrement déterminé par la donnée de sa restriction au sous-espace $\mathbb{R}\times]0, +\infty[\times\{0\} \times \{0\}$*

Proposition 12.5. *Le produit tensoriel de deux champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants (resp. $\Theta(4)$-invariants) est aussi $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant).*
Le produit tensoriel de deux champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants purs est $\Theta(4)$-invariant.
Le produit tensoriel d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant et d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant pur est $S\Theta(4)$-invariant pur.

On note spécifiquement $(\Gamma_0 S\Theta(4))^q_p$ le sous-module de $\Gamma_0 S\Theta(4)$ constitué par les champs de tenseurs de type (q, p) et l'on introduit aussi les notations analogues $(\Gamma_0\Theta(4))^q_p$ et $(\Gamma_0 PS\Theta(4))^q_p$.

Proposition 12.6. *Si $q \geq 1$ et $p \geq 1$, toute contraction d'un champ de tenseurs $T \in (\Gamma_0 S\Theta(4))^q_p$ (resp. $T \in (\Gamma_0\Theta(4))^q_p$, resp. $T \in (\Gamma_0 PS\Theta(4))^q_p$) donne lieu à un champ de tenseurs appartenant à $(\Gamma_0 S\Theta(4))^{q-1}_{p-1}$ (resp. $(\Gamma_0\Theta(4))^{q-1}_{p-1}$, resp. $(\Gamma_0 PS\Theta(4))^{q-1}_{p-1}$).*

Proposition 12.7. *Soit $T(x^0, x)$ un champ de tenseurs C^∞ $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant, resp. $S\Theta(4)$-invariant pur) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de type (q, p). Alors les dérivées partielles premières de ses composantes par rapport aux coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 sont les composantes d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant, resp. $S\Theta(4)$-invariant pur) de type $(q, p + 1)$. La position du nouvel indice pouvant* *être choisi de $p+1$ manières, on obtient ainsi $p+1$ champs de tenseurs formellement différents (mais essentiellement identiques).*

Corollaire 12.7. *Pour tout entier positif ℓ, les dérivées partielles d'ordre ℓ des composantes de $T(x^0, x)$ donnent lieu à $(p+1)(p+2)\cdots(p+\ell)$ champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants (resp. $\Theta(4)$-invariants, resp. $S\Theta(4)$-invariants purs) de type $(q, p+\ell)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Ces champs de tenseurs se distinguent les uns des autres par les positions des nouveaux indices, de sorte que l'on peut les identifier au moyen de permutations d'indices.*

Propositions 12.8. *Considérons les composantes*

$$T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(x)$$

d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant, resp. $S\Theta(4)$-invariant pur) de type (q,p) sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Alors, si $q\geq 1$ (resp. $p\geq 1$) le transfert en bas (resp. en haut), dans un rang déterminé, d'un indice contravariant (resp. covariant) de rang determiné, définit les composantes d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant, resp. $S\Theta(4)$-invariant pur) de type $(q-1, p+1)$ (resp. $(q+1, p-1)$.

Cela résulte aussitôt des conditions (12.2).

Par conséquent, le degré de contravariance q et le degré de covariance p ne sont pas des caractéristiques essentielles d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant. Celui-ci sera caractérisé complètement par son degré total $q+p$. Pour la construction de champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants, il suffit donc de se limiter aux champs de tenseurs covariants. En d'autres termes, pour chaque entier $p>0$, nous avons à prendre en considération les Γ_0-modules :

$$(\Gamma_0 S\Theta(4))^0_p \quad , \quad (\Gamma_0\Theta(4))^0_p \quad , \quad (\Gamma_0 PS\Theta(4))^0_p$$

Un champ de tenseurs covariants sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$:

$$T(x^0,x) = \sum T_{i_1\cdots i_p}(x^0,x)dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_p} \tag{12.3}$$

est $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant) si et seulement si ses composantes satisfont aux conditions :

$$T_{i_1\cdots i_p}(x^0, Ax) = \sum T_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(x^0,x)\hat{B}^{\alpha_1}_{i_1}\cdots\hat{B}^{\alpha_p}_{i_p}$$

(cf. (12.2)) ou aux conditions équivalentes.

$$T_{i_1\cdots i_p}(x^0, x) = \sum T_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(x^0, Ax) B_{i_1}^{\alpha_1} \cdots B_{i_p}^{\alpha_p} \tag{12.4}$$

pour toute matrice $B \in S\Theta(4)$ (resp. $B \in \Theta(4)$). Bien entendu, dans le cas d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant pur, on a les conditions (12.4) lorsque $B \in S\Theta(4)$, et les conditions qui s'en déduisent par changement de signe au premier membre lorsque $B \in \Theta(4) - S\Theta(4)$.

Nous allons démontrer maintenant que la construction d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant (et en particulier, d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant ou d'un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant pur) se ramène à la construction d'un certain nombre de champs de tenseurs $SO(3)$-invariants sur $\mathbb{R}^3$.

Proposition 12.9. *Soient k entiers fixés $r_1, r_2, \cdots, r_k$ tels que $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq p$ et considérons la somme des termes de (12.3) pour lesquels $i_{r_1} = i_{r_2} = \cdots = i_{r_k} = 0$, tous les autres indices qui y figurent étant différents de zéro :*

$$\sum T_{i_1\cdots i_{r_1}\cdots i_{r_k}\cdots i_p}(x^0, x) dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{r_1}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{r_k}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$$

$$i_{r_1} = i_{r_2} = \cdots = i_{r_k} = 0$$

En supprimant dans chacun des produits tensoriels ci-dessus les facteurs

$$dx^{i_{r_1}} = dx^0 \quad , \quad dx^{i_{r_2}} = dx^0, \cdots, dx^{i_{r_k}} = dx^0 \quad ,$$

on obtient, pour chaque valeur de $x^0 \in \mathbb{R}$, un champ de tenseurs covariants de degré $p - k$. Alors, si le champ de tenseurs (12.3) est $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant, resp. $S\Theta(4)$-invariant pur), le nouveau champ de tenseurs qui en résulte est $SO(3)$-invariant (resp. $O(3)$-invariant, resp. $SO(3)$-invariant pur) sur $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. Puisque $i_{r_1} = i_{r_2} = \cdots = i_{r_k} = 0$, il est commode d'écrire

$$0_{r_1}, 0_{r_2}, \cdots, 0_{r_k}$$

respectivement au lieu de

$$i_{r_1}, i_{r_2}, \cdots, i_{r_k}$$

afin de tenir compte à la fois des rangs fixés et de la valeur zéro des indices. Par conséquent les composantes du nouveau champ de tenseurs s'écrivent

$$T_{i_1\cdots 0_{r_1}\cdots 0_{r_k}\cdots i_p}(x^0, x)$$

où tous les indices distincts de $0_{r_1}, 0_{r_2}, \cdots, 0_{r_k}$ sont non nuls. D'autre part, puisque

$$B_0^0 = 1 \quad , \quad B_1^0 = B_2^0 = B_3^0 = B_0^1 = B_0^2 = B_0^3 = 0$$

et

$$B_i^j = A_i^j \quad \text{pour} \quad i \geq 1 \quad \text{et} \quad j \geq 1 \quad ,$$

les relations (12.4) donnent

$$\begin{aligned} & T_{i_1\cdots 0_{r_1}\cdots 0_{r_k}\cdots i_p}(x^0, x) = \\ & = \sum T_{\alpha_1\cdots 0_{r_1}\cdots 0_{r_k}\cdots \alpha_p}(x^0, Ax) A_{i_1}^{\alpha_1} \cdots B_{0_{r_1}}^{0_{r_1}} \cdots B_{0_{r_k}}^{0_{r_k}} \cdots A_{i_p}^{\alpha_p} \end{aligned}$$

avec $B_{0_{r_1}}^{0_{r_1}} = \cdots = B_{0_{r_k}}^{0_{r_k}} = B_0^0 = 1$, de sorte que les relations (8.3) sont satisfaites par le nouveau champ de tenseurs covariants. Celui-ci est donc $SO(3)$-invariant (resp. $O(3)$-invariant, resp. $SO(3)$-invariant pur) sur $\mathbb{R}^3$.

Cela démontre la proposition.

Le choix de k rangs fixés pouvant être fait de

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!}$$

manières, la proposition précédente nous permet d'associer à tout champ de tenseurs covariants $S\Theta(4)$-invariant (resp. $\Theta(4)$-invariant, resp. $S\Theta(4)$-invariant pur) de degré p sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\binom{p}{k}$ champs de tenseurs $SO(3)$-invariants (resp. $O(3)$-invariants, resp. $SO(3)$-invariants purs) de degré $p - k$ sur $\mathbb{R}^3$.

Cependant, puisque $(\Gamma PSO(3))_{p-k}^0 = 0$ si $k = p - 1$ ou $k = p$, d'après la proposition 9.2, les $\binom{p}{k}$ champs de tenseurs $SO(3)$-invariants purs seront nuls si $k = p - 1$ ou $k = p$. C'est pourquoi nous considérons à part le cas où le champ de tenseurs (12.3) est $S\Theta(4)$-invariant pur.

Proposition 12.10. *Si le champ de tenseurs (12.3) est* $S\Theta(4)$*-invariant (resp.* $\Theta(4)$*-invariant) sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, alors on peut lui associer, de la manière expliquée dans la proposition 12.9,*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 1 + p + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{p} = 2^p$$

champs de tenseurs $SO(3)$*-invariants (resp.* $O(3)$*-invariants) sur* $\mathbb{R}^3$ *dépendant paramétriquement de* $x^0 = \mathbb{R}$*, et de degrés respectifs* $p, p-1, p-2, \cdots, 0$*, le nombre de champs de tenseurs de degré* $p-k$ *étant égal à* $\binom{p}{k}$ *pour chaque* $k \in \{0, 1, 2, \cdots, p\}$*.*

En particulier, pour $k = 0$, on a un seul champ de tenseurs $SO(3)$-invariant (resp. $O(3)$-invariant) sur $\mathbb{R}^3$:

$$\sum T_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x^0, x) dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$$

$$\text{avec} \quad i_1 > 0, i_2 > 0, \cdots, i_p > 0$$

et pour $k = p$ on a une fonction $SO(3)$-invariante (donc aussi $O(3)$-invariante), à savoir la composante

$$T_{00\cdots 0}(x^0, x)$$

qui sera nécessairement de la forme $f(x^0, \|x\|)$.

Proposition 12.11. *Si le champ de tenseurs (12.3) est* $S\Theta(4)$*-invariant pur, la construction expliquée dans la proposition 12.9 donne lieu à*

$$\sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} = 2^p - (1 + p)$$

champs de tenseurs $SO(3)$*-invariants purs sur* $\mathbb{R}^3$ *de degrés* $p, p-1, \cdots, 2$*.*

Proposition 12.12. *Pour que le champ de tenseurs (12.3) soit* $S\Theta(4)$*-invariant (resp.* $\Theta(4)$*-invariant) sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, il faut et il suffit que, pour chaque* $k \in \{0, 1, 2 \cdots, p\}$*, les* $\binom{p}{k}$ *champs de tenseurs de degré* $p - k$ *qui s'en déduisent, d'après la proposition 12.9, soient* $SO(3)$*-invariants (resp.* $O(3)$*-invariants) sur* $\mathbb{R}^3$*.*

Cet énoncé reste aussi valable pour un champ de tenseurs $S\Theta(4)$-invariant pur en faisant varier k de 0 à $p-2$.

13. Champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants de degré $p = 2$

Ce sont les champs de tenseurs qui interviennent directement dans la conception des métriques spatio-temporelles relatives au champ gravitationnel d'une boule de matière [4].

Considérons un champ de tenseurs covariants de degré 2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$T(x^0, x) = T_{00}(x^0, x)(dx^0 \otimes dx^0) + \sum_{i=1}^{3} T_{0i}(x^0, x)(dx^0 \otimes dx^i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} T_{i0}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^0) + \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j). \tag{13.1}$$

D'après la proposition 12.12, $T(x^0, x)$ est $S\Theta(4)$-invariant si et seulement si, pour toute valeur fixée $x^0 \in \mathbb{R}$

a) $T_{00}(x^0, x)$ est une fonction $SO(3)$-invariante sur $\mathbb{R}^3$

b) les formes

$$\sum_{i=1}^{3} T_{0i}(x^0, x) dx^i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} T_{i0}(x^0, x) dx^i$$

sont $SO(3)$-invariantes sur $\mathbb{R}^3$.

c) $\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j)$ est un champ de tenseurs $SO(3)$-invariant sur $\mathbb{R}^3$.

Les résultats déjà établis pour les champs de tenseurs $SO(n)$-invariants, permettent de préciser ces conditions :

a) $T_{00}(x^0, x)$ est une fonction appartenant à l'algèbre de Γ_0, donc aussi $O(3)$-invariante pour chaque $x^0 \in \mathbb{R}$: $T_{00}(x^0, x) = q_{00}(x^0, \|x\|)$.

b) D'après la proposition 10.1, les deux formes signalées s'obtiennent en multipliant le générateur

$$F(x) = \sum_{i=1}^{3} x^i dx^i$$

par des fonctions appartenant à l'algèbre Γ_0 :

$$\sum_{i=1}^{3} T_{0i}(x^0, x)dx^i = q_{01}(x^0, \|x\|)F(x) \quad ,$$
$$\sum_{i=1}^{3} T_{i0}(x^0, x)dx^i = q_{10}(x^0, \|x\|)F(x).$$

c) Conformément à la décomposition (cf. proposition 8.3) :

$$\Big(\Gamma_0 SO(3)\Big)_2^0 = \Big(\Gamma_0 O(3)\Big)_2^0 \oplus \Big(\Gamma_0 PSO(3)\Big)_2^0 \quad ,$$

$\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j)$ est la somme d'un champ de tenseurs $O(3)$-invariant et d'un champ de tenseurs $SO(3)$-invariant pur.

Or, d'après la proposition 10.2, $\Big(\Gamma_0 O(3)\Big)_2^0$ est le Γ_0-module libre engendré par les deux champs de tenseurs

$$E(x) = \sum_{j=1}^{3} (dx^i \otimes dx^j) \quad , \quad F(x) \otimes F(x)$$

et, d'après le corollaire 11.1, $\Big(\Gamma_0 PSO(3)\Big)_2^0$ est le Γ_0-module libre engendré par le champ de tenseurs :

$$\begin{aligned} N(x) =& x^1(dx^2 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^2) + x^2(dx^3 \otimes dx^1 - dx^1 \otimes dx^3) + \\ &+ x^3(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j) &= q_{11}(x^0, \|x\|)E(x) + \\ &+ q_{22}(x^0, \|x\|)(F(x) \otimes F(x)) + q_{33}(x^0, \|x\|)N(x) \end{aligned}$$

En définitive la décomposition prévue par la proposition 12.3 se concrétise dans le cas actuel comme suit :

Proposition 13.1. *Si le champ de tenseur (13.1) est* $S\Theta(4)$*-invariant, il s'écrit*

$$T(x^0, x) = L(x^0, x) + M(x^0, x)$$

où

$$L(x^0, x) = q_{00}(x^0, \|x\|)(dx^0 \otimes dx^0) + q_{01}(x^0, \|x\|)(dx^0 \otimes F(x)) +$$
$$+ q_{10}(x^0, \|x\|)(F(x) \otimes dx^0) + q_{11}(x^0, \|x\|)E(x) +$$
$$+ q_{22}(x^0, \|x\|)(F(x) \otimes F(x))$$

est un champ de tenseurs $\Theta(4)$*-invariant sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *et*

$$M(x^0, x) = q_{33}(x^0, \|x\|)N(x)$$

est un champ de tenseurs $S\Theta(4)$*-invariant pur sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Corollaire 13.1.1. *Si le champ de tenseurs (13.1) est* $S\Theta(4)$*-invariant et symétrique, alors* $q_{01}(x^0, \|x\|) = q_{10}(x^0, \|x\|)$ *et* $q_{33}(x^0, \|x\|) = 0$*, de sorte qu'il se réduit à un champ de tenseurs* $\Theta(4)$*-invariant symétrique :*

$$\begin{aligned} T(x^0, x) = q_{00}(x^0, \|x\|)(dx^0 \otimes dx^0) + \\ + q_{01}(x^0, \|x\|)(dx^0 \otimes F(x) + F(x) \otimes dx^0) + \\ + q_{11}(x^0, \|x\|)E(x) + q_{22}(x^0, \|x\|)(F(x) \otimes F(x)) \end{aligned}$$

Corollaire 13.1.2. *Si le champ de tenseurs (13.1) est* $S\Theta(4)$*-invariant et antisymétrique, alors*

$$q_{00} = q_{11} = q_{22} = 0 \quad et \quad q_{01} = -q_{10} \quad ,$$

donc aussi

$$T(x^0, x) = q_{01}(dx^0 \otimes F(x) - F(x) \otimes dx^0) + q_{33}N(x)$$

de sorte que ses composantes sont données par les formules :

$$T_{00} = T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \quad , \quad T_{0i} = -T_{i0} = q_{01}x^i \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad ,$$

$$T_{12} = -T_{21} = q_{33}x^3 \quad , \quad T_{23} = -T_{32} = q_{33}x^1 \quad , \quad T_{31} = -T_{13} = q_{33}x^2$$

avec $q_{01} = q_{01}(x^0, \|x\|)$ *et* $q_{33} = q_{33}(x^0, \|x\|)$

14. Champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants de degré $p = 3$

L'étude de $\left(\Gamma_0 S\Theta(4)\right)_3^0$ nécessite la prise en considération des propositions 10.1, 10.2, 10.3, 11.1, ainsi que de la structure de $\left(\Gamma_0 PSO(3)\right)_3^0$ mais celle-ci n'intervient pas dans les problèmes gravitationnels. C'est pourquoi nous nous contentons d'indiquer la construction de $\left(\Gamma_0 \Theta(4)\right)_3^0$.

Proposition 14.1. *Si le champ de tenseurs*

$$\sum T_{\alpha\beta\gamma}(x^0, x) dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma$$

est $\Theta(4)$-invariant, alors :

a) *$T_{000}(x^0, x)$ est une fonction appartenant à l'algèbre Γ_0, c'est-à-dire qu'elle est une fonction de $(x^0, \|x\|)$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.*

b) *Pour chaque $x^0 \in \mathbb{R}$, les formes*

$$\sum_1^3 T_{00i}(x^0, x) dx^i \quad , \quad \sum_1^3 T_{0i0}(x^0, x) dx^i \quad , \quad \sum_1^3 T_{i00}(x^0, x) dx^i \quad ,$$

sont $O(3)$-invariantes, donc définies conformément à la proposition 10.1.

c) *Pour chaque $x^0 \in \mathbb{R}$, les champs de tenseurs*

$$\sum_{i,j=1}^3 T_{0ij}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j) \quad , \quad \sum_{i,j=1}^3 T_{i0j}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j) \quad ,$$

$$\sum_{i,j=1}^3 T_{ij0}(x^0, x)(dx^i \otimes dx^j) \quad ,$$

sont $O(3)$-invariants, donc définis conformément à la proposition 10.2 et le corollaire 10.2.

d) *Pour chaque $x^0 \in \mathbb{R}$, le champ de tenseurs*

$$\sum_{i,j,k=1}^3 T_{ijk}(x^0, x) dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

est $O(3)$-invariant, donc défini suivant la proposition 10.3 et le corollaire 10.3.

Références

[1] D. Kramer, H. Stephani, M. CacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, VEB, Deutscher Verlag von Wissenschaften, Berlin, 1980

[2] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Collection Champs, Flammarion, Paris, 1968.

[3] N. Stavroulakis, *Continuous $SO(n)$-invariant tensor fields on* $\mathbb{R}^n - \{0\}$, Geometry and Topology of Submanifolds II, Editors M. Boyom, JM. Morvan, L. Verstraelen, World Scientific Publ. Comp., 1990, pp. 301-343.

[4] N. Stavroulakis, *On the principles of general relativity and the $S\Theta(4)$-invariant metrics*, Proceedings of the 3rd Panhellenic Congress of Geometry, Athens 1997, pp. 159-182.

(Manuscrit reçu le 17 avril 2000)