Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 26, no 4, 2001

Vérité scientifique et trous noirs (Troisième partie) Équations de gravitation relatives à une métrique $\Theta(4)$-invariante

Nikias Stavroulakis

Solomou 35, 15233 Chalandri, Grèce

RÉSUMÉ. Le champ gravitationnel d'une boule de matière est conçu classiquement sur la base de deux principes foncièrement erronés :

a) La variété sous-jacente est la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$.

b) La métrique spatio-temporelle est définie en postulant que $SO(3)$ opère isométriquement sur les sous-variétés de genre espace.

Les principes corrects sont les suivants :

a) La variété du problème est la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

b) Le groupe $SO(3)$ (resp. $O(3)$) opère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ au moyen d'un sous-groupe de $SO(4)$ (resp. $O(4)$) noté $S\Theta(4)$ (resp. $\Theta(4)$).

c) la métrique spatio-temporelle, conçue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, reste invariante par les opérations de $S\Theta(4)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Ces trois principes permettent de définir la forme générale de la métrique spatio-temporelle $S\Theta(4)$-invariante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, forme qui reste aussi invariante par les opérations de $\Theta(4)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, et d'aborder ensuite tous les problèmes gravitationnels sans sortir du cadre des champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants et $\Theta(4)$-invariants. On établit en particulier que le tenseur de Ricci correspondant est $\Theta(4)$-invariant, ce qui permet de se rendre compte d'avance de sa structure qui est définie par l'intermédiaire de quatre fonctions $\Theta(4)$-invariantes. Il en résulte que les équations de gravitation se réduisent à un système de quatre équations applicables à tous les problèmes envisageables conformément aux divers choix du tenseurs impulsion-énergie. Le tenseur de Ricci est détaillé dans deux cas importants : Premièrement lorsque le champ est stationnaire, et deuxièmement lorsqu'il s'agit du champ extérieur non stationnaire.

ABSTRACT. The gravitational field of a spherical distribution of matter is conceived classically by means of two erroneous principles :

a) The underlying manifold of the problem is the manifold with boundary $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$

b) The space-time metric is defined by assuming that it admits a group of motions acting on space-like 2-spaces.

The correct principles are the following :

a) The underlying manifold is the manifold $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

b) the group $SO(3)$ *(resp.* $O(3)$*) acts on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *by means of a subgroup of* $SO(4)$ *(resp.* $O(4)$*) denoted by* $S\Theta(4)$ *(resp.* $\Theta(4)$*).*

c) The space-time metric, conceived on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, remains invariant by the action of* $S\Theta(4)$ *on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*, which implies that it remains also invariant by the action of* $\Theta(4)$ *on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

The last three principles allow to define the general form of the $S\Theta(4)$*-invariant metric (which is also* $\Theta(4)$*-invariant) on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ *and deal subsequently with all the problems related to the gravitational field in question by using constantly* $S\Theta(4)$*-invariant and* $\Theta(4)$*-invariant tensor fields on* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$*. We establish in particular that the Ricci tensor is* $\Theta(4)$*-invariant, so that its definition involves only four unknown* $\Theta(4)$*-invariant functions. It follows that we can write down from the outset the system of the equations of gravitation as a system of four equations which are applicable to all problems under consideration in accordance with the different choices of the energy-momentum tensor. Regarding the Ricci tensor, it is explicitly computed in the case where the metric tensor is stationary as well as in the case where we have to do with the dynamical field outside the matter.*

15. Tenseur métrique $\Theta(4)$-invariant et symboles de Christoffel

Quand on se met à l'étude de la relativité générale, on ne peut manquer d'être frappé par l'invasion des transformations implicites et des variétés à bord dans la théorie. On constate en particulier que le champ gravitationnel d'une boule de matière est conçu par rapport à la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ qui tient à l'usage abusif des coordonnées polaires. Nous avons déjà analysé les conséquences de cette pratique qui est héritée de l'analyse classique ainsi que de la mécanique classique et quantique. Toutefois celles-ci ne se heurtent pas aux problèmes que l'on rencontre en relativité générale, car elles sont fondées sur des métriques C^∞ données d'avance, à savoir la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$:

$$dx^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

et la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$c^2dt^2 - dx^2$$

Il n'en reste pas moins que les coordonnées polaires introduisent des singularités pour $r = 0$, de sorte que leur utilisation même dans les problèmes classiques doit être toujours entourée de certaines précautions.

En relativité générale la situation est assez délicate. Le tenseur métrique n'est pas connu d'avance et l'on doit le concevoir d'abord sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. La pratique traditionnelle qui part d'une métrique sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ comporte des erreurs non seulement de nature conceptuelle mais aussi de nature calculatoire. On sait déjà que les métriques conçues sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$ correspondent à des métriques sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ discontinues en général sur $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$. Par conséquent lorsqu'on a affaire au problème de la détermination de la métrique, il ne faut pas oublier que les coordonnées polaires ne sont pas utilisables sur les voisinages de $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. De plus les coordonnées polaires suppriment la localisation de la matière et ne satisfont pas aux conditions aux limites. Or, les coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 étant valables globalement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, pourquoi insite-t-on sur l'introduction des coordonnées polaires et de la variété à bord $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times S^2$? Il semble que H. Weyl avec son flair de mathématicien se posait implicitement cette question, car il a essayé de se débarrasser des coordonnées polaires dans la détermination du tenseur métrique [2]. Mais il n'y a pas réussi, car il était prisonnier des transformations implicites et ne disposait pas de la théorie des champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants.

Cela dit, nous postulons que le champ gravitationnel d'une distribution parfaitement sphérique de matière est représenté par une métrique $S\Theta(4)$-invariante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire par un champ de tenseurs covariant symétrique $S\Theta(4)$-invariant de degré 2 et de signature $(+1, -1, -1, -1)$. D'après le corollaire 13.1.1 un tel champ de tenseurs est nécessairement $\Theta(4)$-invariant, de sorte que tout ce qui concerne les métriques spatio-temporelles $S\Theta(4)$-invariantes se rattache à la $\Theta(4)$-invariance. Cependant des champs de tenseurs $S\Theta(4)$-invariants purs interviennent parfois dans la construction de tenseurs impulsion-énergie $\Theta(4)$-invariants.

Afin de simplifier l'écriture, nous notons désormais les coordonnées avec des indices en bas et nous posons $x^0 = t$, et alors, d'après le corollaire 13.1.1, une métrique $\Theta(4)$-invariante en tant que champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant s'écrit :

$$q_{00}(t,\|x\|)(dt\otimes dt)+q_{01}(t,\|x\|)(dt\otimes F(x)+F(x)\otimes dt)$$

$$+q_{11}(t,\|x\|)E(x)+q_{22}(t,\|x\|)(F(x)\otimes F(x))$$

avec

$$E(x)=\sum_1^3(dx_i\otimes dx_i)\quad \text{et}\quad F(x)=\sum_1^3 x_i dx_i$$

D'habitude on lui substitue la forme quadratique

$$q_{00}(t,\|x\|)dt^2+2q_{01}(t,\|x\|)\Big(\sum_1^3 x_i dx_i\Big)dt+q_{11}(t,\|x\|)\sum_1^3 dx_i^2+$$

$$+q_{22}(t,\|x\|)\Big(\sum_1^3 x_i dx_i\Big)^2$$

que l'on écrit de façon abrégée

$$q_{00}\,dt^2+2q_{01}(xdx)dt+q_{11}\,dx^2+q_{22}(xdx)^2 \tag{15.1}$$

La forme (15.1), supposée de signature $(+1,-1,-1,-1)$, est l'expression générale des métriques spatio-temporelles $\Theta(4)$-invariantes. Elle se trouve ainsi établie de façon simple et rigoureuse débarrassée des défauts de l'approche classique. Ses composantes covariantes :

$$\begin{gathered} g_{00}=q_{00}(t,\|x\|)\quad , \\ g_{0i}=x_i q_{01}(t,\|x\|)\quad , \\ g_{ii}=q_{11}(t,\|x\|)+x_i^2 q_{22}(t,\|x\|)\quad , \\ g_{ij}=x_i x_j q_{22}(t,\|x\|)\quad , \\ (i,j=1,2,3\ ;\ i\neq j)\quad , \end{gathered}$$

dépendent des quatre fonctions de $(t,\|x\|)$:

$$q_{00}(t,\|x\|)\quad ,\quad q_{01}(t,\|x\|)\quad ,\quad q_{11}(t,\|x\|)\quad ,\quad q_{22}(t,\|x\|)$$

qui appartiennent par hypothèse à l'algèbre Γ_0, c'est-à-dire qu'elles sont C^∞ par rapport aux coordonnées t, x_1, x_2, x_3 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Il faut et il suffit pour cela que les fonctions :

$$q_{00}(t,u)\ ,\ q_{01}(t,u)\ ,\ q_{11}(t,u)\ ,\ q_{22}(t,u)\ ,\ \Big((t,u) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\Big) \quad ,$$

satisfassent aux conditions de la proposition 7.2. En réalité, les calculs dont nous avons besoin nécessitent la différentiabilité jusqu'à l'ordre 2. D'autre part, dans certains cas, l'ordre de différentiabilité requis doit être soigneusement vérifié, comme, par exemple, dans le cas où l'on a affaire au prolongement de la solution intérieure au delà du bord de la matière.

Proposition 15.1. *(a) Les composantes contravariantes $g^{\alpha\beta}$ d'un tenseur métrique $\Theta(4)$-invariant constituent un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.*
(b) Les symboles de Christoffel de première espèce relatifs à une métrique $\Theta(4)$-invariante sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant. Il en est de même des symboles de Christoffel de deuxième espèce correspondants.
(c) Le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire relatifs à une métrique $\Theta(4)$-invariante sont aussi $\Theta(4)$-invariants.
(d) Si un tenseur impulsion-énergie $W_{\alpha\beta}$ satisfait aux équations de gravitation relatives à une métrique $\Theta(4)$-invariante, il est aussi $\Theta(4)$-invariant.

Démonstration. (a) Si $G(t,x)$ est la matrice des composantes $g_{\alpha\beta}$, la $\Theta(4)$-invariance de la métrique s'exprime par la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_H \\ 0_V & A \end{pmatrix} G(t,x) \begin{pmatrix} 1 & 0_H \\ 0_V & \hat{A} \end{pmatrix} = G(t,Ax) \quad ,$$

pour toute matrice $A \in O(3)$. Il en résulte :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_H \\ 0_V & A \end{pmatrix} G^{-1}(t,x) \begin{pmatrix} 1 & 0_H \\ 0_V & \hat{A} \end{pmatrix} = G^{-1}(t,Ax) \quad ,$$

d'où aussi la $\Theta(4)$-invariance de la matrice inverse $G^{-1}(t,x)$ dont les coefficients sont les composantes contravariantes $g^{\alpha\beta}$.

(b) D'après la proposition 12.7, les dérivées

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = T^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}$$

où les indices sont pris dans l'ordre $\alpha\beta\gamma$, sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant. La liberté de choisir la position de l'indice de dérivation permet aussi, en gardant le même ordre $\alpha\beta\gamma$, de définir encore deux champs de tenseurs $\Theta(4)$-invariants, à savoir

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} = T^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = T^{(3)}_{\alpha\beta\gamma}$$

Par conséquent les symoboles de Christoffel de première espèce :

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\Big) = \frac{1}{2}(T^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} + T^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} - T^{(3)}_{\alpha\beta\gamma})$$

sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant.

Or, les tenseurs $g^{\alpha\beta}$ et $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$ étant $\Theta(4)$-invariants, leur produit tensoriel, dont les composantes sont les produits

$$g^{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma,\delta\varepsilon} \quad ,$$

est aussi $\Theta(4)$-invariant conformément à la proposition 12.5. Alors la proposition 12.6 montre que les symboles de Christoffel de deuxième espèce

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \sum g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\gamma} \quad ,$$

obtenus par contraction, sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant.

(c) D'après (b) et la proposition 12.7, les dérivées

$$\frac{\partial \Gamma^\delta_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} = L_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$$

sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant. Il en est de même des dérivées

$$\frac{\partial \Gamma^\delta_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = M_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$$

où l'on prend encore les indices covariants dans l'ordre $\alpha\beta\gamma$.

D'autre part, le produit tensoriel du tenseur $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ par lui-même étant $\Theta(4)$-invariant (cf. proposition 12.5), on obtient en contractant un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant :

$$\sum_\sigma \Gamma^\delta_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$$

Le même raisonnement prouve que les sommes

$$\sum_\sigma \Gamma^\delta_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} = T_{\beta\alpha\gamma}{}^\delta$$

sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant. Les indices covariants apparaissent maintenant dans l'ordre $\beta\alpha\gamma$, mais cela est sans importance, car en posant

$$T_{\beta\alpha\gamma}{}^\delta = U_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \quad ,$$

les conditions (12.2) donnent

$$U_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(t, Ax) = T_{\beta\alpha\gamma}{}^\delta(t, Ax) = \sum T_{\mu\nu\sigma}{}^\lambda(t, x) B^\delta_\lambda \hat{B}^\mu_\beta \hat{B}^\nu_\alpha \hat{B}^\sigma_\gamma$$

$$\sum U_{\nu\mu\sigma}{}^\lambda(t, x) B^\delta_\lambda \hat{B}^\nu_\alpha \hat{B}^\mu_\beta \hat{B}^\sigma_\gamma$$

de sorte que les fonctions $U_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(t, x)$ sont les composantes d'un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant.

En définitive, le tenseur de courbure

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \frac{\partial\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\Gamma^\delta_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} - \sum_\sigma \Gamma^\delta_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} + \sum_\sigma \Gamma^\delta_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \tag{15.2}$$

est la somme de quatre tenseurs $\Theta(4)$-invariants :

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = L_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta - M_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta - S_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta + U_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \quad ,$$

donc il est aussi $\Theta(4)$-invariant.

Notre assertion est maintenant évidente en ce qui concerne le tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ et la courbure scalaire R qui résultent du tenseur de courbure au moyen de contractions :

$$R_{\alpha\beta} = \sum_\sigma R_{\sigma\alpha\beta}{}^\sigma \quad , \quad R = \sum g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

(d) D'après ce qui vient d'être prouvé, le tenseur d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \quad ,$$

donc aussi le tenseur

$$R_{\alpha\beta} - \Big(\frac{R}{2} + 3\lambda\Big) g_{\alpha\beta}$$

(-3λ étant la constante cosmologique) est $\Theta(4)$-invariant. Il en est donc de même de $W_{\alpha\beta}$ si les équations de gravitation :

$$R_{\alpha\beta} - \Big(\frac{R}{2} + 3\lambda\Big) g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi k}{c^4} W_{\alpha\beta}$$

sont satisfaites.

Corollaire 15.1.1. *Il existe dix fonctions de* $(t, \|x\|) = (t, \rho)$ *:*

$$A_\alpha = A_\alpha(t, \rho) \quad , \quad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9),$$

définies au moyen de $q_{00}, q_{01}, q_{11}, q_{22}$ *et telles que les symboles de Christoffel de première espèce relatifs à la métrique (15.1) soient donnés par les formules ci-après :*

$$\Gamma_{0,00} = A_0 \quad , \quad \Gamma_{0,0i} = \Gamma_{0,i0} = A_1 x_i \quad , \quad \Gamma_{i,00} = A_2 x_i \quad ,$$

$$\Gamma_{0,ii} = A_3 + A_4 x_i^2 \quad , \quad \Gamma_{0,ij} = \Gamma_{0,ji} = A_4 x_i x_j \quad ,$$

$$\Gamma_{i,0i} = \Gamma_{i,i0} = A_5 + A_6 x_i^2 \quad , \quad \Gamma_{i,0j} = \Gamma_{i,j0} = A_6 x_i x_j \quad ,$$

$$\Gamma_{i,ii} = A_7 x_i^3 + (A_8 + 2A_9) x_i \quad ,$$

$$\Gamma_{i,jj} = A_7 x_i x_j^2 + A_8 x_i \quad , \quad \Gamma_{j,ij} = \Gamma_{j,ji} = A_7 x_i x_j^2 + A_9 x_i \quad ,$$

$$\Gamma_{i,jk} = A_7 x_i x_j x_k \quad ,$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3 \; ; \; i \neq j \neq k \neq i).$$

En effet, compte tenu du point (b) de la proposition 15.1, cet énoncé résulte aussitôt de la proposition 14.1. En fait, celle-ci fait apparaître aussi une fonction A_{10} telle que

$$\Gamma_{i,ii} = A_7 x_i^3 + (A_8 + A_9 + A_{10}) x_i \quad \text{et} \quad \Gamma_{j,ji} = A_7 x_i x_j^2 + A_{10} x_i \quad ,$$

mais l'égalité $\Gamma_{j,ji} = \Gamma_{j,ij}$ implique $A_{10} = A_9$.

Corollaire 15.1.2. *Il existe dix fonctions de* (t, ρ) *:*

$$B_\alpha = B_\alpha(t, \rho) \quad , \quad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9).$$

définies au moyen de $q_{00}, q_{01}, q_{11}, q_{22}$ et telles que les symboles de Christoffel de deuxième espèce relatifs à la métrique (15.1) soient donnés par les formules suivantes :

$$\Gamma^0_{00} = B_0 \quad , \quad \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = B_1 x_i \quad , \quad \Gamma^i_{00} = B_2 x_i \quad ,$$

$$\Gamma^0_{ii} = B_3 + B_4 x_i^2 \quad , \quad \Gamma^0_{ij} = \Gamma^0_{ji} = B_4 x_i x_j \quad ,$$

$$\Gamma^i_{i0} = \Gamma^i_{0i} = B_5 + B_6 x_i^2 \quad , \quad \Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = B_6 x_i x_j \quad ,$$

$$\Gamma^i_{ii} = B_7 x_i^3 + (B_8 + 2B_9) x_i \quad ,$$

$$\Gamma^i_{jj} = B_7 x_i x_j^2 + B_8 x_i \quad , \quad \Gamma^j_{ij} = \Gamma^j_{ji} = B_7 x_i x_j^2 + B_9 x_i \quad ,$$

$$\Gamma^i_{jk} = B_7 x_i x_j x_k \quad ,$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3 \ ; \ i \neq j \neq k \neq i).$$

Compte tenu de la proposition 8.8, cet énoncé est aussi une conséquence immédiate de la proposition 14.1. Celle-ci conduit encore à la prise en considération d'une onzième fonction B_{10} telle que

$$\Gamma^i_{ii} = B_7 x_i^3 + (B_8 + B_9 + B_{10}) x_i \quad \text{et} \quad \Gamma^j_{ji} = B_7 x_i x_j^2 + B_{10} x_i \quad ,$$

mais l'égalité $\Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji}$ entraîne $B_{10} = B_9$.

Les corollaire 15.1.1 et 15.1.2. nous garantissent l'existence des fonctions A_α et B_α, mais ne nous donnent pas leurs expressions. Celles-ci s'obtiennent facilement en explicitant les symboles

$$\Gamma_{0,00} \quad , \quad \Gamma_{0,01} \quad , \quad \Gamma_{1,00} \quad , \quad \Gamma_{0,11} \quad , \quad \Gamma_{1,01} \quad , \quad \Gamma_{1,22} \quad , \quad \Gamma_{1,12} \quad ,$$

et

$$\Gamma^0_{00} \quad , \quad \Gamma^0_{01} \quad , \quad \Gamma^1_{00} \quad , \quad \Gamma^0_{11} \quad , \quad \Gamma^1_{01} \quad , \quad \Gamma^1_{22} \quad , \quad \Gamma^1_{12} \quad ,$$

relativement à la métrique (15.1). Mais nous n'avons pas besoin de ces calculs pour deux raisons :

Premièrement on peut établir un certain nombre de propriétés substantielles sans utiliser les expressions explicites de A_α et B_α.

Deuxièmement il s'avère commode d'exprimer d'abord $q_{00}, q_{01}, q_{11}, q_{22}$ au moyen d'autres fonctions mettant en évidence les caractéristiques géométriques et physiques de la métrique.

16. Tenseur de Ricci et équations de gravitation

Le tenseur de Ricci relatif à la métrique (15.1) étant $\Theta(4)$-invariant d'après la proposition 15.1(c), sa structure est définie par le corollaire 13.1.1. :

Proposition 16.1. *Les composantes du tenseur de Ricci relatif à la métrique (15.1) dépendent de quatre fonctions de* $(t, \|x\|) = (t, \rho)$ *:*

$$Q_{00} = Q_{00}(t, \rho)\ ,\ Q_{01} = Q_{01}(t, \rho)\ ,\ Q_{11} = Q_{11}(t, \rho)\ ,\ Q_{22} = Q_{22}(t, \rho)\ ,$$

et sont données par les formules :

$$R_{00} = Q_{00} \quad , \quad R_{0i} = R_{i0} = x_i Q_{01} \quad ,$$

$$R_{ii} = Q_{11} + x_i^2 Q_{22} \quad , \quad R_{ij} = R_{ji} = x_i x_j Q_{22} \quad ,$$

$$(i, j = 1, 2, 3\ ;\ i \neq j).$$

Le tenseur de Ricci se détermine donc complètement par les quatre fonctions $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$ qui seront explicitées plus loin.

La courbure scalaire R étant aussi $\Theta(4)$-invariante, c'est une fonction de (t, ρ) :

$$R = Q = Q(t, \rho).$$

D'autre part le tenseur impulsion-énergie qui intervient dans les équations de gravitation relatives à la métrique (15.1) étant toujours $\Theta(4)$-invariant, d'après la proposition 15.1(d), il est encore défini par quatre fonctions de (t, ρ) :

$$E_{00} = E_{00}(t, \rho)\ ,\ E_{01} = E_{01}(t, \rho)\ ,\ E_{11} = E_{11}(t, \rho)\ ,\ E_{22} = E_{22}(t, \rho)$$

et ses composantes sont données par les formules :

$$W_{00} = E_{00} \quad , \quad W_{0i} = W_{i0} = x_i E_{01} \quad ,$$

$$W_{ii} = E_{11} + x_i^2 E_{22} \quad , \quad W_{ij} = W_{ji} = x_i x_j E_{22} \quad ,$$

$$(i, j = 1, 2, 3\ ;\ i \neq j).$$

d'après le corollaire 13.1.1.

Proposition 16.2. *Avec les notations précédentes, les équations de gravitation relatives à la métrique $\Theta(4)$-invariante (15.1) se réduisent au système des quatre équations ci-après :*

$$Q_{00} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{00} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{00} = 0$$

$$Q_{01} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{01} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{01} = 0$$

$$Q_{11} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{11} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{11} = 0$$

$$Q_{22} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{22} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{22} = 0$$

qui contiennent uniquement des fonctions de (t, ρ).

Démonstration. Notons $P_{00}, P_{01}, P_{11}, P_{22}$ respectivement les premiers membres des équations ci-dessus. Alors, d'après les expressions des composantes $g_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta}, W_{\alpha\beta}$, les équations de gravitation :

$$R_{\alpha\beta} - \Big(\frac{R}{2} + 3\lambda\Big)g_{\alpha\beta} + \frac{8\pi k}{c^4}W_{\alpha\beta} = 0$$

sont satisfaites si et seulement si

$$P_{00} = 0$$

$$x_i P_{01} = 0 \tag{16.1}$$

$$P_{11} + x_i^2 P_{22} = 0 \tag{16.2}$$

$$x_i x_j P_{22} = 0 \tag{16.3}$$

$$(i, j = 1, 2, 3\ ;\ i \neq j).$$

Lorsque $\|x\| > 0$, les équations (16.1) entraînent $P_{01}(t, \|x\|) = 0$, mais la continuité implique aussi $P_{01}(t, 0) = 0$. D'autre part si $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$, on a, d'après (16.3), $P_{22}(t, \|x\|) = 0$ donc aussi $P_{22}(t, \|x\|) = 0$ quel que soit $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Mais alors (16.2) entraîne $P_{11}(t, \|x\|) = 0$, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

En définitive le système des équations de gravitation est vérifié si et seulement si l'on a sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$:

$$P_{00}(t, \rho) = 0 \quad , \quad P_{01}(t, \rho) = 0 \quad , \quad P_{11}(t, \rho) = 0 \quad , \quad P_{22}(t, \rho) = 0 \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

Dans les applications il s'avère souvent commode de remplacer l'équation $P_{22} = 0$ par l'équation $P_{11} + \rho^2 P_{22} = 0$, d'où l'énoncé ci-après :

Corollaire 16.2. *Le système des équations de gravitation relatives à la métrique $\Theta(4)$-invariante (15.1) se réduit au système des quatre équations ci-dessous :*

$$Q_{00} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{00} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{00} = 0$$

$$Q_{01} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{01} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{01} = 0$$

$$Q_{11} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)q_{11} + \frac{8\pi k}{c^4}E_{11} = 0$$

$$Q_{11} + \rho^2 Q_{22} - (\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)(q_{11} + \rho^2 q_{22}) + \frac{8\pi k}{c^4}(E_{11} + \rho^2 E_{22}) = 0$$

La proposition 16.2 et le corollaire 16.2 sont d'une importante capitale. La prise en considération de ces énoncés nous permet de nous limiter dès le début, sans aucun calcul préalable, à quatre équations de structure suffisamment simple. Le problème qui se pose ensuite c'est de calculer les fonctions

$$Q_{00}(t,\rho) \quad , \quad Q_{01}(t,\rho) \quad , \quad Q_{11}(t,\rho) \quad , \quad Q_{22}(t,\rho).$$

Afin d'obtenir un résultat facilement applicable à tous les cas envisageables, nous allons expliciter leurs expressions au moyen des fonctions $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, qui figurent dans les symboles de Christoffel de deuxième espèce (cf. corollaire 15.1.2.).

a) *Calcul de* $Q_{00} = R_{00} = {R_{100}}^1 + {R_{200}}^2 + {R_{300}}^3$

En se servant de la formule (15.2) et du corollaire 15.1.2., on trouve d'abord

$$\begin{aligned}{R_{100}}^1 =& \frac{\partial B_5}{\partial t} - B_2 - B_0B_5 + B_5^2 - \rho^2 B_2B_9 + \\ &+ x_1^2\Big(\frac{\partial B_6}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_2}{\partial \rho} - B_2B_9 - B_0B_6 + B_1B_2 + 2B_5B_6 \\ &- B_2B_8 + \rho^2 B_6^2 - \rho^2 B_2B_7\Big)\end{aligned}$$

Les deux autres composantes ${R_{200}}^2$ et ${R_{300}}^3$ en résultent sans calcul si l'on remplace x_1^2 par x_2^2 et x_3^2 respectivement, d'où, après quelques réductions et un regroupement de termes,

$$\begin{aligned} Q_{00} =& \frac{\partial}{\partial t}(3B_5 + \rho^2 B_6) - \rho \frac{\partial B_2}{\partial \rho} \\ & - B_2(3 + 4\rho^2 B_9 - \rho^2 B_1 + \rho^2 B_8 + \rho^2 B_7) \\ & - 3B_0 B_5 + 3B_5^2 + \rho^2 B_6(-B_0 + 2B_5 + \rho^2 B_6) \end{aligned} \tag{16.4}$$

b) *Calcul de* Q_{01}

Nous allons utiliser la relation $R_{01} = x_1 Q_{01}$ avec

$$R_{01} = {R_{101}}^1 + {R_{201}}^2 + {R_{301}}^3$$

Alors l'application de la formule (15.2) donne

$$\begin{aligned} {R_{101}}^1 =& \Big(\frac{\partial B_7}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_6}{\partial \rho} - B_1 B_6 + B_2 B_4\Big) x_1^3 \\ & + \Big(\frac{\partial B_8}{\partial t} + 2\frac{\partial B_9}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_5}{\partial \rho} - 2B_6 - B_1 B_5 + B_2 B_3\Big) x_1 \\ & - B_6 B_9 x_1 x_2^2 - B_6 B_9 x_1 x_3^2 + B_6 B_8 x_1 x_2^2 + B_6 B_8 x_1 x_3^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {R_{201}}^2 =& \Big(\frac{\partial B_7}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_6}{\partial \rho} - B_1 B_6 - B_6 B_8 + B_2 B_4\Big) x_1 x_2^2 \\ & - B_6 B_9 x_1^3 - B_6 B_9 x_1 x_3^2 + \Big(\frac{\partial B_9}{\partial t} - B_6 - B_1 B_5\Big) x_1 \end{aligned}$$

En ce qui concerne la composante ${R_{301}}^3$, elle résulte de l'expression ci-dessus si l'on permute x_2 avec x_3 :

$$\begin{aligned} {R_{301}}^3 =& \Big(\frac{\partial B_7}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_6}{\partial \rho} - B_1 B_6 - B_6 B_8 + B_2 B_4\Big) x_1 x_3^2 \\ & - B_6 B_9 x_1^3 - B_6 B_9 x_1 x_2^2 + \Big(\frac{\partial B_9}{\partial t} - B_6 - B_1 B_5\Big) x_1 \end{aligned}$$

Alors en faisant la somme et en mettant x_1 en facteur, on obtient aussitôt

$$R_{01} = x_1 Q_{01}$$

avec

$$Q_{01} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho^2 B_7 + B_8 + 4B_9) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_5}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial B_6}{\partial \rho} + B_2(B_3 + \rho^2 B_4) - 2B_6(2 + \rho^2 B_9) - B_1(3B_5 + \rho^2 B_6) \tag{16.5}$$

c) *Calcul de Q_{11} et Q_{22}*

Puisque $R_{11} = Q_{11} + x_1^2 Q_{22}$, il suffit d'expliciter maintenant la composante

$$R_{11} = {R_{011}}^0 + {R_{211}}^2 + {R_{311}}^3$$

On trouve d'abord

$$\begin{aligned} {R_{011}}^0 = &- \frac{\partial B_3}{\partial t} + B_1 - B_0 B_3 + B_3 B_5 - B_1 B_8 \rho^2 + \\ &+ x_1^2 \Big(- \frac{\partial B_4}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_1}{\partial \rho} - B_0 B_4 - 2B_1 B_9 + B_1^2 + B_3 B_6 \\ &+ B_4 B_5 - B_1 B_7 \rho^2 + B_4 B_6 \rho^2 \Big) \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} {R_{211}}^2 = &B_9 - B_8 - B_3 B_5 - B_8 B_9 \rho^2 + \\ &+ \Big(-B_7 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_9}{\partial \rho} - B_4 B_5 - B_7 B_9 \rho^2 - B_9^2 \Big) x_1^2 + \\ &+ \Big(B_7 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_8}{\partial \rho} - B_3 B_6 - B_7 B_8 \rho^2 - B_8^2) x_2^2 \end{aligned}$$

Pour obtenir la composante ${R_{311}}^3$, il suffit de remplacer x_2 par x_3 dans l'expression ci-dessus, d'où

$$\begin{aligned} {R_{311}}^3 = &B_9 - B_8 - B_3 B_5 - B_8 B_9 \rho^2 + \\ &+ \Big(-B_7 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_9}{\partial \rho} - B_4 B_5 - B_7 B_9 \rho^2 - B_9^2 \Big) x_1^2 + \\ &+ \Big(B_7 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_8}{\partial \rho} - B_3 B_6 - B_7 B_8 \rho^2 - B_8^2) x_3^2 \end{aligned}$$

En faisant maintenant la somme

$${R_{011}}^0 + {R_{211}}^2 + {R_{311}}^3$$

et en tenant compte de

$$x_2^2 + x_3^2 = \rho^2 - x_1^2$$

on trouve en définitive

$$R_{11} = Q_{11} + x_1^2 Q_{22}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{11} = &- \frac{\partial B_3}{\partial t} - \rho \frac{\partial B_8}{\partial \rho} - (B_0 + B_5 + \rho^2 B_6) B_3 + \\ &(1 - \rho^2 B_8)(B_1 + \rho^2 B_7 + B_8 + 2B_9) - 3B_8 \end{aligned} \tag{16.6}$$

et

$$\begin{aligned} Q_{22} = &- \frac{\partial B_4}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(B_1 + B_8 + 2B_9) + B_1^2 + B_8^2 - 2B_9^2 \\ &- 2B_1 B_9 + 2B_3 B_6 + (-B_0 - B_5 + \rho^2 B_6) B_4 \\ &+ (-3 + \rho^2(-B_1 + B_8 - 2B_9)) B_7 \end{aligned} \tag{16.7}$$

17. Forme géométrique de la métrique (15.1).

Nous allons exprimer maintenant les fonctions de départ q_{00}, q_{01}, q_{11}, q_{22} par d'autres fonctions mettant en évidence les caractéristiques géométriques et physiques de la métrique.

La coordonnée t étant de nature temporelle, on a d'abord la condition :

$$q_{00} = q_{00}(t, \|x\|) > 0$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et puisque $q_{00}(t, \|x\|)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, la fonction :

$$f = f(t, \|x\|) = \sqrt{q_{00}(t, \|x\|)}$$

est *strictement positive* et C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Par conséquent la fonction

$$f_1 = \frac{q_{01}}{f}$$

est aussi bien définie et C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

La prise en considération de f_1 pemet de mettre la métrique sous la forme
$$\big(fdt + f_1(xdx)\big)^2 + q_{11}dx^2 + (q_{22} - f_1^2)(xdx)^2$$
qui fait apparaître la métrique spatiale correspondante :

$$-q_{11}dx^2 - (q_{22} - f_1^2)(xdx)^2 \tag{17.1}$$

Celle-ci étant partout définie positive, on a d'abord la condition

$$-q_{11} > 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \quad ,$$

ce qui permet de définir une fonction strictement positive et C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ en posant

$$\ell_1 = \ell_1(t, \|x\|) = \sqrt{-q_{11}(t, \|x\|)}$$

D'autre part, le déterminant des composantes de (17.1) :

$$-q_{11}^2\big(q_{11} + \|x\|^2(q_{22} - f_1^2)\big)$$

devant être partout strictement positif, on a

$$-q_{11} - \|x\|^2(q_{22} - f_1^2) > 0$$

en tout point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, de sorte que l'on peut définir encore une fonction strictement positive et C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$:

$$\ell = \ell(t, \|x\|) = \sqrt{\ell_1^2 - \|x\|^2(q_{22} - f_1^2)} \tag{17.2}$$

qui sert à définir l'élément de longueur sur les géodésiques spatiales radiales.

La relation (17.2) entraîne

$$q_{22} = e + f_1^2$$

avec
$$e = \frac{\ell_1^2 - \ell^2}{\rho^2} \quad , \quad \rho = \|x\|.$$

La fonction $e = q_{22} - f_1^2$ est manifestement bien définie et C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, mais cette propriété n'est pas visible sur l'écriture

$$\frac{\ell_1^2 - \ell^2}{\rho^2}$$

Or, étant donné que

$$\frac{\partial \ell_1(t,+0)}{\partial \rho} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \ell(t,+0)}{\partial \rho} = 0 \quad ,$$

d'après la proposition 7.2, et que $\ell_1(t,0) = \ell(t,0)$ d'après (17.2), la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale donne

$$\ell_1(t,\rho) = \ell_1(t,0) + \rho^2 \int_0^1 (1-v)\frac{\partial^2 \ell_1(t,\rho v)}{\partial \rho^2} dv = \ell(t,0) + \rho^2 L_1(t,\rho) \quad ,$$

$$\ell(t,\rho) = \ell(t,0) + \rho^2 \int_0^1 (1-v)\frac{\partial^2 \ell(t,\rho v)}{\partial \rho^2} dv = \ell(t,0) + \rho^2 L(t,\rho) \quad ,$$

où $L_1(t,\rho)$ et $L(t,\rho)$ sont des fonctions paires de ρ satisfaisant aux conditions de la proposition 7.2, donc en particulier C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ en tant que fonctions de (t, x_1, x_2, x_3). En outre, compte tenu de

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad ,$$

la fonction

$$\frac{\ell_1^2 - \ell^2}{\rho^2} = 2\ell(t,0)\Big(L_1(t,\rho) - L(t,\rho)\Big) + \rho^2\Big(\big(L_1(t,\rho)\big)^2 - \big(L(t,\rho)\big)^2\Big)$$

est effectivement C^∞ par rapport aux coordonnées t, x_1, x_2, x_3 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, bien que les fonctions

$$\frac{\ell_1^2}{\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{\ell^2}{\rho^2} \quad ,$$

prises séparément, ne soient pas définies pour $\rho = 0$.

En définitive on obtient la métrique sous la forme :

$$f^2 dt^2 + 2 f f_1 (x dx) dt - \ell_1^2 \, dx^2 + (e + f_1^2)(x dx)^2 \tag{17.3}$$

où l'on se permet d'utiliser suivant le cas, soit la notation e soit l'écriture explicite

$$\frac{\ell_1^2 - \ell^2}{\rho^2}$$

Les composantes covariantes du tenseur métrique sont définies maintenant par les formules :

$$g_{00} = f^2 \quad , \quad g_{0i} = x_i f f_1 \quad ,$$

$$g_{ii} = -\ell_1^2 + x_i^2(e + f_1^2) \quad , \quad g_{ij} = x_i x_j (e + f_1^2) \quad ,$$

$$(i, j = 1, 2, 3 \ ; \ i \neq j)$$

On en déduit aisément leur déterminant :

$$-f^2 \ell^2 \ell_1^4$$

et les composantes contravariantes correspondantes :

$$g^{00} = \frac{\ell^2 - \rho^2 f_1^2}{f^2 \ell^2} \quad , \quad g^{0i} = x_i \frac{f_1}{f \ell^2} \quad ,$$

$$g^{ii} = -\frac{1}{\ell_1^2} - x_i^2 \frac{e}{\ell^2 \ell_1^2} \quad , \quad g^{ij} = -x_i x_j \frac{e}{\ell^2 \ell_1^2} \quad ,$$

$$(i, j = 1, 2, 3 \ ; \ i \neq j)$$

Comme prévu (cf. proposition 15.1(a)), celles-ci définissent un champ de tenseurs $\Theta(4)$-invariant. D'autre part, compte tenu de

$$q_{00} = f^2 \quad , \quad q_{01} = f f_1 \quad , \quad q_{11} = -\ell_1^2 \quad , \quad q_{22} = e + f_1^2 \quad ,$$

les équations de gravitation (cf. proposition 16.2 et corollaire 16.2) se présentent maintenant sous une forme moins symétrique.

Proposition 17.1 *Les équations de gravitation relatives à (17.3) se réduisent au système des quatre équations ci-après :*

$$Q_{00} - \left(\frac{Q}{2} + 3\lambda\right) f^2 + \frac{8\pi k}{c^4} E_{00} = 0$$

$$Q_{01} - \left(\frac{Q}{2} + 3\lambda\right) f f_1 + \frac{8\pi k}{c^4} E_{01} = 0$$

$$Q_{11} + \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)\ell_1^2 + \frac{8\pi k}{c^4}E_{11} = 0$$

$$Q_{22} - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)(e + f_1^2) + \frac{8\pi k}{c^4}E_{22} = 0$$

où les fonctions

$$Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}, Q, E_{00}, E_{01}, E_{11}, E_{22}$$

sont définies par rapport au tenseur métrique associé à (17.3). En ce qui concerne, en particulier, la dernière équation, elle peut être remplacée par l'équation :

$$(Q_{11} + \rho^2 Q_{22}) - \Big(\frac{Q}{2} + 3\lambda\Big)(\rho^2 f_1^2 - \ell^2) + \frac{8\pi k}{c^4}(E_{11} + \rho^2 E_{22}) = 0$$

18. Détermination des fonctions A_α et $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, par rapport à la métrique (17.3)

La détermination des fonctions A_α et B_α $,(\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, nécessite la prise en considération des dérivées des fonctions

$$f(t, \|x\|) \quad , \quad f_1(t, \|x\|) \quad , \quad \ell(t, \|x\|) \quad , \quad \ell_1(t, \|x\|) \quad ,$$

qui, d'après nos hypothèses, sont C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. En vertu de la remarque 7.3., il suffit que les dérivées en question soient calculées pour $\|x\| > 0$. En effet, les expressions qui en résultent possèdent, pour $\|x\| \to 0$, des limites bien définies qui sont égales, naturellement, aux valeurs de ces dérivées sur $\mathbb{R} \times \{(0, 0, 0)\}$.

Proposition 18.1. *Les fonctions* $A_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$*, s'obtiennent en explicitant les symboles*

$$\Gamma_{0,00} \quad , \quad \Gamma_{0,01} \quad , \quad \Gamma_{1,00} \quad , \quad \Gamma_{0,11} \quad , \quad \Gamma_{1,01} \quad , \quad \Gamma_{1,12} \quad , \quad \Gamma_{1,22} \quad ,$$

et sont données par les formules :

$$A_0 = f\frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad A_1 = \frac{f}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} \quad , \quad A_2 = \frac{\partial (f f_1)}{\partial t} - \frac{f}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} \quad ,$$

$$A_3 = f f_1 + \ell_1 \frac{\partial \ell_1}{\partial t} \quad , \quad A_4 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (f f_1)}{\partial \rho} - \frac{1}{2}\frac{\partial (e + f_1^2)}{\partial t}$$

$$A_5 = -\ell_1 \frac{\partial \ell_1}{\partial t} \quad , \quad A_6 = \frac{1}{2} \frac{\partial (e + f_1^2)}{\partial t} \quad , \quad A_7 = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial (e + f_1^2)}{\partial \rho} \quad ,$$

$$A_8 = e + f_1^2 + \frac{\ell_1}{\rho} \frac{\partial \ell_1}{\partial \rho} \quad , \quad A_9 = -\frac{\ell_1}{\rho} \frac{\partial \ell_1}{\partial \rho}$$

En effet, la première assertion est évidente en vertu des formules établies (cf. corollaire 15.1.1). Pour ce qui concerne la deuxième, c'est une question de simples vérifications. Par exemple, puisque le calcul direct donne

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2}\Big(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\rho} \frac{\partial (e + f_1^2)}{\partial \rho} x_1 x_2^2 + \Big(e + f_1^2 + \frac{\ell_1}{\rho} \frac{\partial \ell_1}{\partial \rho}\Big) x_1$$

et que

$$\Gamma_{1,22} = A_7 x_1 x_2^2 + A_8 x_1 \quad ,$$

on obtient par comparaison

$$A_7 = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial (e + f_1^2)}{\partial \rho} \quad , \quad A_8 = e + f_1^2 + \frac{\ell_1}{\rho} \frac{\partial \ell_1}{\partial \rho}$$

Proposition 18.2. *Les fonctions* $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, *s'obtiennent en explicitant les symboles*

$$\Gamma^0_{00} \quad , \quad \Gamma^0_{01} \quad , \quad \Gamma^1_{00} \quad , \quad \Gamma^0_{11} \quad , \quad \Gamma^1_{01} \quad , \quad \Gamma^1_{12} \quad , \quad \Gamma^1_{22} \quad ,$$

et sont données par les formules :

$$B_0 = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\rho^2 f_1}{\ell^2} \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\rho f_1}{\ell^2} \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$B_1 = \frac{\ell^2 - \rho^2 f_1^2}{f \ell^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{f_1}{f \ell} \frac{\partial \ell}{\partial t} + \frac{\rho^2 f_1^2}{f \ell^2} \frac{\partial f_1}{\partial t}$$

$$B_2 = -\frac{f}{\ell^2} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{f}{\rho \ell^2} \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$B_3 = \frac{\ell_1}{f^2} \frac{\partial \ell_1}{\partial t} + \frac{f_1 \ell_1^2}{f \ell^2} + \frac{\rho f_1 \ell_1}{f l^2} \frac{\partial \ell_1}{\partial \rho} - \frac{\rho^2 f_1^2 \ell_1}{f^2 \ell^2} \frac{\partial \ell_1}{\partial t}$$

$$B_4 = -\frac{\ell^2 - \rho^2 f_1^2}{2 f^2 \ell^2} \frac{\partial (e + f_1^2)}{\partial t} + \frac{1}{\rho f} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} + \frac{f_1}{\rho f^2} \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$- \frac{\rho f_1^3}{f^2 \ell^2} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{f_1}{\rho f \ell} \frac{\partial \ell}{\partial \rho} - \frac{f_1 \ell_1^2}{\rho^2 f \ell^2} + \frac{f_1}{\rho^2 f} - \frac{f_1 \ell_1}{\rho f \ell^2} \frac{\partial \ell_1}{\partial \rho}$$

$$
\begin{aligned}
B_5 =& \frac{1}{\ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial t} \\
B_6 =& \frac{f_1}{\rho\ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2\ell}\frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{1}{\rho^2\ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial t} - \frac{f_1}{\ell^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} \\
B_7 =& -\frac{f_1}{2f\ell^2}\frac{\partial(e+f_1^2)}{\partial t} + \frac{f_1^2}{\rho f\ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\ell_1^2}{\rho^4\ell^2} - \frac{1}{\rho^4} \\
&+ \frac{\ell_1}{\rho^3\ell^2}\frac{\partial \ell_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^3\ell}\frac{\partial \ell}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^3\ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial \rho} \\
B_8 =& \frac{f_1\ell_1}{f\ell^2}\frac{\partial \ell_1}{\partial t} - \frac{\ell_1^2}{\rho^2\ell^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{\ell_1}{\rho\ell^2}\frac{\partial \ell_1}{\partial \rho} \\
B_9 =& \frac{1}{\rho\ell_1}\frac{\partial \ell_1}{\partial \rho}
\end{aligned}
$$

Vu le corollaire 15.1.2., la première assertion est évidente. Alors en explicitant les symboles de Christoffel choisis et en les comparant aux expressions correspondantes données par le corollaire, on obtient les formules indiquées.

Notons que la présence de $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{\rho^3}, \frac{1}{\rho^4}$ dans les expressions obtenues de $B_1, B_2, B_4, B_6, B_7, B_8, B_9$ ne pose aucun problème, car celles-ci tendent vers des limites bien définies lorsque $\rho \to 0$, en vertu de nos hypothèses sur la différentiabilité du tenseur métrique.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les fonctions $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$ qui figurent dans les équations de gravitation (cf. proposition 17.1). Il suffit de remplacer les expressions précédemment obtenues de $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, dans les formules (16.4), (16.5), (16.6), (16.7). Dans le cas général, cela donne lieu à des calculs fastidieux dont le résultat ne semble pas suceptible de revêtir une forme maniable. Or, on ne saurait procéder machinalement à ces opérations. On doit d'abord réfléchir sur les divers cas envisageables dans les problèmes d'intérêt physique. Un premier cas intéressant est certainement celui où le tenseur métrique est universellement stationnaire. Alors on peut conduire les calculs en question sans difficultés particulières. Un deuxième cas important est celui qui concerne le champ gravitationnel dynamique à l'extérieur de la matière. Nous savons déjà [1] que la métrique générale correspondante résulte alors d'une forme spécifique, appelée canonique, moyennant la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels. Par conséquent on se ramène finalement au calcul de $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$ par rapport à la métrique canonique, ce qui donne lieu à des expressions simples et maniables.

Il reste finalement le cas du champ gravitationnel dynamique dans la matière, c'est-à-dire du champ gravitationnel dans la matière lorsque celle-ci subit une déformation radiale (expansion, contraction, pulsation) compatible avec la $\Theta(4)$-invariance. Le problème majeur qui se pose alors, avant tout calcul, c'est de concevoir la notion de temps par rapport au phénomène lui-même. Dans le cas du champ dynamique extérieur, ce problème est résolu par l'introduction de la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels. Mais la situation est maintenant beaucoup plus compliquée. On pourrait envisager d'abord la définition du temps au moyen de la fonction de propagation radiale des photons, mais ceux-ci ne parcourent pas dans la matière des lignes géodésiques isotropes, de sorte que la fonction en question n'est pas susceptible d'une définition généralement valable. En tout cas son utilité est discutable. Par contre, ce qui semble tout à fait conforme à la nature du phénomène c'est de définir la fonction de propagation des fronts sphériques de la matière en déformation. Mais là encore nous avons affaire à des difficultés considérables, surtout lorsqu'il s'agit d'une source pulsante. Le problème soulevé n'est pas encore résolu.

19. Introduction des fonctions $h(t,\rho) = \rho f_1(t,\rho)$ et $g(t,\rho) = \rho\ell_1(t,\rho)$.

La fonction $h(t,\rho) = \rho f_1(t,\rho)$ se présente d'abord dans la condition

$$|\rho f_1(t,\rho)| \leq \ell(t,\rho)$$

qui assure la nature temporelle de la coordonnée t. En ce qui concerne la fonction

$$g(t,\rho) = \rho\ell_1(t,\rho) \quad ,$$

elle est égale au rayon de courbure des sphères $\|x\| = \rho = Cte$, considérées avec la métrique induite par celle de la métrique spatiale associée à (17.3).

En tant que fonctions de (t, x_1, x_2, x_3) , $h(t,\rho) = h(t,\|x\|)$ et $g(t,\rho) = g(t,\|x\|)$ ne sont pas différentiables sur le sous-espace $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, de sorte que l'on ne peut pas les utiliser lorsqu'on a besoin de la différentiabilité du tenseur métrique sur les voisinages de $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$. Par contre lorsque cette condition n'y intervient pas, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de solutions à l'extérieur de la matière, l'introduction de $h(t,\rho)$ et $g(t,\rho)$ ne pose aucun problème (On sait déjà que ces solutions sont incompatibles avec la notion de source ponctuelle).

Cependant, quelle que soit la situation envisagée, on peut toujours utiliser les fonctions $h(t,\rho)$ et $g(t,\rho)$ à titre auxiliaire si l'on remplace f_1 et ℓ_1 respectivement par h/ρ et g/ρ dans les équations de gravitation (cf. proposition 17.1), car $h(t,\rho)$ et $g(t,\rho)$ sont des fonctions C^∞ du couple $(t,\rho) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$ tout comme les autres fonctions qui y figurent (et qui, de plus, sont C^∞ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$). Cela nous amène à présenter les équations de gravitation avec les fonctions inconnues f, h, ℓ, g. Bien entendu, quand la solution demandée sera obtenue, on devra remplacer h et g par ρf_1 et $\rho\ell_1$ pour vérifier les conditions de différentiabilité sur $\mathbb{R}\times\{(0,0,0)\}$ ainsi que les conditions aux limites du problème.

Cela dit, afin de faire figurer h et g dans les équations de gravitation, on doit d'abord remplacer f_1 et ℓ_1 par h/ρ et g/ρ respectivement dans les expressions des fonctions $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$.

Proposition 19.1. *Les fonctions $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, exprimées au moyen de f, h, ℓ, g, sont données par les formules ci-après :*

$$
\begin{aligned}
B_0 =& \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{\ell^2}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h}{\ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho}\\
B_1 =& \frac{\ell^2 - h^2}{\rho f \ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{h}{\rho f \ell}\frac{\partial \ell}{\partial t} + \frac{h^2}{\rho f \ell^2}\frac{\partial h}{\partial t}\\
B_2 =& -\frac{f}{\rho \ell^2}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{f}{\rho \ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho}\\
B_3 =& \frac{g}{\rho^2 f^2}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{hg}{\rho^2 f \ell^2}\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{h^2 g}{\rho^2 f^2 \ell^2}\frac{\partial g}{\partial t}\\
B_4 =& -\frac{\ell^2 - h^2}{2\rho^2 f^2 \ell^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g^2}{\rho^2} - \ell^2 + h^2\Big) + \frac{1}{\rho^2 f}\frac{\partial h}{\partial \rho} +\\
& + \frac{h}{\rho^2 f^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{h^3}{\rho^2 f^2 \ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{h}{\rho^2 f \ell}\frac{\partial \ell}{\partial \rho} - \frac{hg}{\rho^4 f \ell^2}\frac{\partial g}{\partial \rho}\\
B_5 =& \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}\\
B_6 =& \frac{h}{\rho^2 \ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \ell}\frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{1}{\rho^2 g}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{h}{\rho^2 \ell^2}\frac{\partial h}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$$B_7 = -\frac{h}{2\rho^3 f\ell^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g^2}{\rho^2} - \ell^2 + h^2\Big) + \frac{h^2}{\rho^3 f\ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} +$$
$$+\frac{1}{\rho^4} + \frac{g}{\rho^5\ell^2}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^3\ell}\frac{\partial \ell}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^3 g}\frac{\partial g}{\partial \rho}$$
$$B_8 = \frac{hg}{\rho^3 f\ell^2}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{g}{\rho^3\ell^2}\frac{\partial g}{\partial \rho}$$
$$B_9 = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho g}\frac{\partial g}{\partial \rho}$$

Rappelons encore que la présence de $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{\rho^3}, \frac{1}{\rho^4}, \frac{1}{\rho^5}$ dans les expressions ci-dessus est due uniquement à notre façon de pratiquer les dérivations (afin d'éviter les notations compliquées) et que tout est bien défini pour $\rho = 0$ par passage à la limite.

20. Calcul de $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$, pour la métrique stationnaire

Alors les fonctions $f, h = \rho f_1, \ell, g = \rho\ell_1$ ne dépendent pas de t, de sorte que seules leurs dérivées par rapport à ρ :

$$f'(\rho), \quad h'(\rho), \quad \ell'(\rho), \quad g'(\rho)$$

entrent en considération. Se rapportant à la proposition 19.1, on obtient donc

$$B_0 = -\frac{hf'}{\ell^2} \quad , \quad B_1 = \frac{f'}{\rho f} - \frac{h^2 f'}{\rho f\ell^2} \quad ,$$

$$B_2 = \frac{ff'}{\rho\ell^2} \quad , \quad B_3 = \frac{hgg'}{\rho^2 f\ell^2} \quad ,$$

$$B_4 = \frac{hf'}{\rho^2 f^2} - \frac{h^3 f'}{\rho^2 f^2\ell^2} + \frac{h'}{\rho^2 f} - \frac{h\ell'}{\rho^2 f\ell} - \frac{hgg'}{\rho^4 f\ell^2} \quad ,$$

$$B_5 = 0 \quad , \quad B_6 = \frac{hf'}{\rho^2\ell^2} \quad ,$$

$$B_7 = \frac{h^2 f'}{\rho^3 f\ell^2} + \frac{\ell'}{\rho^3\ell} + \frac{gg'}{\rho^5\ell^2} - \frac{2g'}{\rho^3 g} + \frac{1}{\rho^4} \quad ,$$

$$B_8 = \frac{1}{\rho^2} - \frac{gg'}{\rho^3\ell^2} \quad , \quad B_9 = -\frac{1}{\rho^2} + \frac{g'}{\rho g} \quad ,$$

et en remplaçant ces expression dans les formules (16.4), (16.5), (16.6), (16.7), on détermine, après quelques réductions, les fonctions $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$.

C'est uniquement Q_{22} qui se présente sous une forme incommode :

$$Q_{22} = -\frac{1}{\rho^4}\Big(-1 + \frac{g'^2}{\ell^2} + \frac{gg''}{\ell^2} - \frac{\ell' gg'}{\ell^3} + \frac{f'gg'}{f\ell^2}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\Big(\frac{f''}{f} + \frac{2g''}{g} - \frac{f'\ell'}{f\ell} - \frac{2\ell' g'}{\ell g}\Big)+\frac{h^2}{\rho^2 f}\Big(-\frac{f''}{\ell^2} + \frac{f'\ell'}{\ell^3} - \frac{2f'g'}{\ell^2 g}\Big) \quad ,$$

mais on peut lui substituer la combinaison $Q_{11} + \rho^2 Q_{22}$ qui est de forme simple.

Proposition 20.1. *Si la métrique (17.3) est stationnaire, les fonctions* $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$ *qui s'en déduisent sont définies par les formules :*

$$\begin{aligned}
Q_{00} =& f\Big(-\frac{f''}{\ell^2} + \frac{f'\ell'}{\ell^3} - \frac{2f'g'}{\ell^2 g}\Big) \quad , \\
Q_{01} =& \frac{h}{\rho f} Q_{00} \quad , \\
Q_{11} =& \frac{1}{\rho^2}\Big(-1 + \frac{g'^2}{\ell^2} + \frac{gg''}{\ell^2} - \frac{\ell' gg'}{\ell^3} + \frac{f'gg'}{f\ell^2}\Big) \quad , \\
Q_{11} + \rho^2 Q_{22} =& \frac{f''}{f} + \frac{2g''}{g} - \frac{f'\ell'}{f\ell} - \frac{2\ell' g'}{\ell g} + \frac{h^2}{f^2} Q_{00} \quad , \\
& (h = \rho f_1 \quad , \quad g = \rho \ell_1) \quad ,
\end{aligned}$$

qui sont partout valables, c'est-à-dire aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur de la matière.

21. Calcul de $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$, pour la métrique canonique

La métrique canonique [1] est définie par la condition $h = \ell$ qui ne peut être valable qu'à l'extérieur de la matière en présence éventuelle de champ électromagnétique. Par conséquent les calculs que nous allons indiquer ci-dessous sont valables uniquement à l'extérieur de la matière.

Cela dit, en tenant compte de $h = \ell$, les formules de la proposition 19.1 se simplifient considérablement :

$$
\begin{aligned}
B_0 =& \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\ell}\frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{1}{\ell}\frac{\partial f}{\partial \rho} \quad , \quad B_1 = 0 \quad , \\
B_2 =& -\frac{f}{\rho\ell^2}\frac{\partial \ell}{\partial t} + \frac{f}{\rho\ell^2}\frac{\partial f}{\partial \rho} \quad , \\
B_3 =& \frac{g}{\rho^2 f\ell}\frac{\partial g}{\partial \rho} \quad , \quad B_4 = -\frac{g}{\rho^4 f\ell}\frac{\partial g}{\partial \rho} \quad , \\
B_5 =& \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t} \quad , \quad B_6 = \frac{1}{\rho^2\ell}\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2 g}\frac{\partial g}{\partial t} \quad , \\
B_7 =& -\frac{g}{\rho^5 f\ell}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{\rho^3 f}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^4} + \frac{g}{\rho^5\ell^2}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^3\ell}\frac{\partial \ell}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^3 g}\frac{\partial g}{\partial \rho} \quad , \\
B_8 =& \frac{g}{\rho^3 f\ell}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{g}{\rho^3\ell^2}\frac{\partial g}{\partial \rho} \quad , \\
B_9 =& -\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho g}\frac{\partial g}{\partial \rho}.
\end{aligned}
$$

En vertu de $B_1 = 0$ et $B_3 + \rho^2 B_4 = 0$, les formules (16.4), (16.5), (16.6.) (16.7) se simplifient aussi et, de plus, on en déduit la relation simple :

$$
Q_{11} + \rho^2 Q_{22} = 2\rho\frac{\partial B_9}{\partial \rho} - 2(1 + \rho^2 B_9)(B_8 + B_9 + \rho^2 B_7) + 4B_9
$$

En y remplaçant alors les expressions écrites précédemment de $B_\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, \cdots, 9)$, on obtient aussitôt les fonctions recherchées.

Proposition 21.1. *Les fonctions $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$ relatives à la métrique canonique sont déterminées par les formules ci-après :*

$$
\begin{aligned}
Q_{00} =& \frac{1}{\ell}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial \rho} - \frac{f}{\ell^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{f}{\ell^2}\frac{\partial^2 \ell}{\partial t\partial \rho} + \frac{2}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \\
& - \frac{f}{\ell^3}\frac{\partial \ell}{\partial t}\frac{\partial \ell}{\partial \rho} + \frac{f}{\ell^3}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \ell}{\partial \rho} + \frac{2f}{\ell^2 g}\frac{\partial \ell}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial \rho} \\
& - \frac{2f}{\ell^2 g}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{2}{fg}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{2}{\ell g}\frac{\partial \ell}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} \\
& + \frac{2}{\ell g}\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{1}{f\ell}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \rho} \quad ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{01} = & \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{f\ell}\frac{\partial(f\ell)}{\partial\rho}\Big) - \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{1}{\ell}\frac{\partial f}{\partial\rho}\Big) + \frac{2}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial\rho} - \frac{2}{\ell g}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}\Big) \quad , \\
Q_{11} = & \frac{1}{\rho^2}\Big(-1 - \frac{2g}{f\ell}\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial\rho} + \frac{g}{\ell^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} - \frac{2}{f\ell}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial\rho} \\
& - \frac{g}{\ell^3}\frac{\partial\ell}{\partial\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{1}{\ell^2}\Big(\frac{\partial g}{\partial\rho}\Big)^2 + \frac{g}{f\ell^2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}\Big) \quad , \\
Q_{11} + \rho^2 Q_{22} = & \frac{2}{g}\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2} - \frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{1}{f\ell}\frac{\partial(f\ell)}{\partial\rho}\Big) \quad , \\
& (h = \rho f_1 \quad , \quad g = \rho\ell_1) \quad ,
\end{aligned}
$$

qui sont valables uniquement à l'extérieur de la matière.

Références

[1] N. Stavroulakis, Sur la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 20, n ° 1, 1995, pp. 1-31.

[2] H. Weyl, Space-time-matter, First American Printing of the Fourth Edition, 1922, Dover Publications, Inc.

(Manuscrit reçu le 17 avril 2000)