# Sur une équation d'onde relativiste et ses solutions à symétrie interne.

Claude Daviau

La Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
email : cdaviau@worldnet.fr
Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France

RÉSUMÉ. Avec l'algèbre de Clifford d'espace-temps $E(3,1)$ on étudie une équation d'onde ne privilégiant aucune direction d'espace particulière, son invariance relativiste, ses invariances de jauge, sa formulation lagrangienne, ses tenseurs sans dérivée. L'équation d'onde est complètement résolue dans le cas de l'atome d'hydrogène. Les nombres quantiques et les niveaux d'énergie sont exactement ceux de la théorie de Dirac. Les solutions, pour un état lié donné, présentent une symétrie interne $SO(4)$ qui laisse invariant le courant de densité de probabilité et les autres tenseurs de la théorie de Dirac.

*ABSTRACT. In the frame of the spacetime algebra $E(3,1)$ we study a wave equation without privileged direction, its relativistic invariance, gauge invariances, Lagrangian formulation, tensors without derivative. The wave equation is completely solved for the case of the hydrogen atom. Quantum numbers and energy levels are exactly the same. For a given linked state, the space of solutions has an internal $SO(4)$ symmetry. The probability current is invariant under this symmetry group.*

## 1 - L'algèbre de Clifford d'espace-temps

L'équation de Dirac a d'abord été écrite avec une fonction de l'espace-temps à valeur dans $\mathbb{C}^4$. Par la suite on s'est aperçu que le cadre mathématique naturel de la théorie était l'algèbre de Clifford d'espace-temps. La plupart des travaux [1] [2] [3] ont utilisé une signature $+ \; - \; - \; -$ pour la métrique d'espace-temps. Les algèbres d'espace-temps $E(1,3)$, de signature $+ \; - \; - \; -$, et $E(3,1)$, de signature $- \; + \; + \; +$, ne sont pas isomorphes. Il devrait donc exister un moyen de distinguer laquelle est la bonne du point de vue physique. En fait on n'a utilisé jusqu'ici que la sous-algèbre paire d'espace-temps, et les sous-algèbres paires de $E(1,3)$ et de $E(3,1)$ sont isomorphes entre elles. On s'affranchit ici de la restriction à la sous-algèbre paire, et l'on a choisi la signature $- + + +$, donc l'algèbre $E(3,1)$ parce qu'elle va permettre de partir d'une équation d'onde plus simple. Cette algèbre de Clifford est une algèbre sur le corps des réels de dimension 16, engendrée par 1, $e_\mu$, $e_{\mu\nu}$, $e_{\mu\nu\rho}$, $e_{0123}$, où les $e_\mu$ sont les quatre vecteurs d'une base orthonormale de l'espace-temps :

$$\begin{gathered} e^0 = -e_0 \ \ ; e^j = e_j \ \ , \ \ j = 1,\ 2,\ 3. \\ {e_0}^2 = -1 \ ; \ {e_j}^2 = 1 \ ; \ e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 0 \ (\mu \neq \nu) \end{gathered} \tag{1}$$

On note $e_{\mu\nu}$ le produit $e_\mu e_\nu$, $e_{\mu\nu\rho}$ le produit $e_\mu e_\nu e_\rho$, et $e_{0123}$ le produit $e_0 e_1 e_2 e_3$. Si l'on choisit la représentation matricielle de Majorana :

$$\begin{aligned} &e_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ e_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \\ &e_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

alors le produit de l'algèbre de Clifford est simplement le produit matriciel usuel et, moyennant l'identification entre scalaires et matrices scalaires, l'algèbre $E(3,1)$ est identique à l'algèbre des matrices carrées $M_4(\mathbb{R})$. On ne se servira pas ici de cette représentation matricielle qui n'apporte pas d'avantage particulier.

Parmi les 16 générateurs de $E(3,1)$, dix sont de carré 1 : 1, $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_{01}$, $e_{02}$, $e_{03}$, $e_{023}$, $e_{031}$, $e_{012}$, et six sont de carré $-1$ : $e_0$, $e_{23}$, $e_{31}$, $e_{12}$, $e_{123}$, $e_{0123}$. Les générateurs de carré $-1$ sont aussi les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe $SO(4)$, que nous retrouverons ici comme groupe d'invariance interne des solutions pour l'atome d'hydrogène. Dans l'algèbre $E(1,3)$, au contraire, il y a dix générateurs de carré $-1$ et six de carré 1.

## 2 - L'équation d'onde avec $E(3,1)$

La prescription de départ pour construire l'équation de Dirac est simple : trouver une équation aux dérivées partielles du premier ordre redonnant au second ordre l'équation des ondes :

$$\begin{gathered} (\Box + m^2)\psi = 0 \ \ ; \ \ \Box = {\partial_0}^2 - {\partial_1}^2 - {\partial_2}^2 - {\partial_3}^2 \\ x^0 = ct \ \ ; \ \ \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ \ ; \ \ m = \frac{m_0 c}{\hbar} \end{gathered} \tag{3}$$

L'outil mathématique qu'apporte l'algèbre de Clifford est le gradient :

$$\partial = e^\mu \partial_\mu = -e_0\partial_0 + e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3 \tag{4}$$

qui donne au second ordre :

$$\partial\partial = e^\mu e^\nu \partial_\mu \partial_\nu = -{\partial_0}^2 + {\partial_1}^2 + {\partial_2}^2 + {\partial_3}^2 = -\Box \tag{5}$$

On peut donc proposer, comme équation en l'absence de champ extérieur, simplement :

$$\partial\psi = m\psi \tag{6}$$

puisqu'au second ordre on obtient :

$$\begin{aligned} -\Box\psi &= \partial\partial\psi = \partial m\psi = m\partial\psi = m^2\psi \\ 0 &= (\Box + m^2)\psi \end{aligned} \tag{7}$$

Une équation du type (6) n'est pas possible avec la signature $+ - - -$, car alors $\partial\partial = \Box$, et (6) donne au second ordre une équation de tachyon :

$$(\Box - m^2)\psi = 0 \tag{8}$$

Il faut donc modifier l'équation du premier ordre en lui ajoutant à droite une terme de carré $-1$. L'équation de Dirac est en fait équivalente [1] à

$$\partial\psi = m\psi\gamma_0\gamma_1\gamma_2 \tag{9}$$

où les $\gamma_\mu$ sont une base de l'espace temps de signature $+ - - -$. On peut aussi adjoindre à droite de l'équation (6) n'importe quel terme de carré 1. Avec $E(3,1)$ ce n'est pas nécessaire, et l'on obtient avec (6) une équation d'onde du premier ordre ne privilégiant aucune direction particulière de l'espace. C'est en effet une particularité remarquée depuis longtemps par L. de Broglie [4] que l'équation de Dirac privilégie la direction $x_3$, ce qui est a priori contraire à l'isotropie de l'espace.

Le second élément essentiel pour construire une équation d'onde pour l'électron est d'avoir une phase, et une invariance de jauge locale électrique suivant cette phase. Il faut donc un terme du genre $e^{i\varphi}$ où $i^2 = -1$, et $\varphi$ est la phase, d'où la croyance au caractère absolument nécessaire des nombres complexes dans la communauté des physiciens. Pourtant l'algèbre de Clifford, avec ses grandeurs toutes réelles, offre un large éventail d'objets de carré $-1$ : on a vu précédemment, sans compter leurs combinaisons linéaires, six générateurs de carré $-1$, à savoir : $e_0$, $e_{23}$, $e_{31}$, $e_{12}$, $e_{123}$, $e_{0123}$. L'inconvénient des bivecteurs $e_{23}$, $e_{31}$, $e_{12}$, est qu'ils privilégient la direction d'espace qui leur manque. De même $e_0$ et $e_{123}$ privilégient le temps. Le seul générateur faisant jouer un rôle symétrique à toutes les directions d'espace-temps est $e_{0123}$, et c'est la raison pour laquelle on le choisit ici. Pour abréger les calculs nous noterons $\mathbf{i} = e_{0123}$. Cette notation a l'avantage d'être très usuelle en mécanique quantique. Elle a l'inconvénient de laisser croire que $\mathbf{i}$ est identique au i usuel. Or $\mathbf{i}$ est un élément d'une algèbre non commutative, il ne commute pas avec $\psi$, et anticommute avec tout vecteur d'espace. C'est pourquoi nous le noterons toujours en caractère gras. L'invariance de jauge locale nécessite l'adjonction d'un terme contenant un vecteur d'espace-temps, le potentiel électromagnétique $A$ :

$$\begin{aligned} \partial\psi &= m\psi + qA\psi\mathbf{i} \\ q &= \frac{e}{\hbar c} \quad ; \quad A = A^\mu e_\mu \end{aligned} \tag{10}$$

C'est cette équation d'onde que nous étudierons maintenant.

## 3 - Invariance relativiste, invariances de jauge

L'invariance relativiste a la même forme que pour l'équation de Dirac en algèbre d'espace-temps : si $R$ est une rotation de Lorentz et $x' = Rx$, il existe un élément $M$ de l'algèbre, défini au signe près, tel que

$$\partial' = M\partial M^{-1} \quad ; \quad A' = MAM^{-1} \quad ; \quad \psi' = M\psi \tag{11}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} \partial'\psi' = m\psi' + qA'\psi'\mathbf{i} &\Leftrightarrow M(\partial\psi) = M(m\psi + qA\psi\mathbf{i}) \\ &\Leftrightarrow \partial\psi = m\psi + qA\psi\mathbf{i} \end{aligned}$$

L'invariance de jauge locale électromagnétique prend la forme :

$$\psi' = \psi e^{a\mathbf{i}} \quad ; \quad A' = A + \frac{1}{q}\partial a \tag{12}$$

car on obtient :

$$\begin{aligned} &\partial'\psi' = m\psi' + qA'\psi'\mathbf{i} \\ &\Leftrightarrow (\partial\psi + \partial a\ \psi\mathbf{i})e^{a\mathbf{i}} = m\psi e^{a\mathbf{i}} + (qA + \partial a)\psi\mathbf{i}e^{a\mathbf{i}} \\ &\Leftrightarrow \partial\psi = m\psi + qA\psi\mathbf{i} \end{aligned}$$

Mais il y a ici, en outre, une invariance de jauge globale sous les transformations :

$$\psi' = \psi e^{ae_{jk}} \quad ; \quad \partial a = 0 \tag{13}$$

où $e_{jk}$ désigne l'un des trois bivecteurs $e_{23}$, $e_{31}$, $e_{12}$, car on a :

$$\begin{aligned}\partial\psi' &= \partial\psi e^{ae_{jk}} = (m\psi + qA\psi\mathbf{i})e^{ae_{jk}} \\ &= m\psi e^{ae_{jk}} + qA\psi e^{ae_{jk}}\mathbf{i} \\ &= m\psi' + qA\psi'\mathbf{i}\end{aligned}$$

## 4 - Équation du second ordre

La présence, dans l'équation du premier ordre, d'un terme supplémentaire nécessaire pour rendre locale l'invariance de jauge électromagnétique fait que l'équation du second ordre ne se réduit pas à l'équation de Klein-Gordon, et contient le champ électromagnétique. Celui-ci prend, avec $E(3,1)$, la forme :

$$F = (E^j + B^j\mathbf{i})e_{0j} \tag{14}$$

Avec le potentiel électrique $V = A^0$, les équations

$$\vec{E} = -\partial_0\vec{A} - \vec{\nabla}V \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{15}$$

prennent la forme

$$\partial A = \partial^\mu A_\mu + F \tag{16}$$

et comme on a

$$\partial(A\psi) = (\partial^\mu A_\mu + F + 2A^\mu\partial_\mu)\psi - A\partial\psi \tag{17}$$

on obtient au second ordre :

$$0 = (\Box + m^2 + q^2A^2)\psi + q(\partial^\mu A_\mu + F + 2A^\mu\partial_\mu)\psi\mathbf{i} \tag{18}$$

Cette équation est peu différente de celle obtenue à partir de l'équation de Dirac, au changement près de i par **i**. Elle est invariante relativiste et invariante de jauge électrique, puisqu'elle découle d'une équation du premier ordre qui possède déjà ces invariances.

## 5 - Formulation lagrangienne

On utilisera dans ce paragraphe toutes les possibilités offertes par l'algèbre de Clifford. Tout d'abord on dispose de plusieurs conjugaisons. Tout élément $M$de $E(3,1)$ est la somme du scalaire noté $< M >_0$ ou simplement $< M >$, du vecteur $< M >_1$, du bivecteur $< M >_2$, du pseudo-vecteur $< M >_3$ et du pseudo-scalaire $< M >_4$. On notera $\overline{M}$ le conjugué :

$$\overline{M} =< M >_0 - < M >_1 + < M >_2 - < M >_3 + < M >_4 \tag{19}$$

ce qui permet de définir la partie paire $M_p = \frac{M+\overline{M}}{2}$ et la partie impaire $M_i = \frac{M-\overline{M}}{2}$ de $M$. Cette conjugaison vérifie pour tout $A$ et tout $B$ :

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \quad ; \quad \overline{A\ B} = \overline{A}\ \overline{B} \tag{20}$$

On utilise en outre la réversion, définie par :

$$\begin{aligned} &\widetilde{e_\mu} = e_\mu \quad ; \quad x\widetilde{A + y}B = x\widetilde{A} + y\widetilde{B} \\ &\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A} \end{aligned} \tag{21}$$

qui donne :

$$\widetilde{M} =< M >_0 + < M >_1 - < M >_2 - < M >_3 + < M >_4 \tag{22}$$

On utilise enfin la conjugaison :

$$\widehat{M} = \widetilde{\overline{M}} =< M >_0 - < M >_1 - < M >_2 + < M >_3 + < M >_4 \tag{23}$$

Une densité lagrangienne pour l'équation d'onde (10) est :

$$\mathcal{L} =< \partial\psi e_{123}\widehat{\psi} - m\psi e_{123}\widehat{\psi} + qA\psi e_0\widehat{\psi} > \tag{24}$$

En utilisant les méthodes de dérivation suivant un multivecteur exposées en [5] on obtient l'équation de Lagrange

$$d_\psi\mathcal{L} = (d_{\partial\psi}\mathcal{L})\partial \tag{25}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} d_\psi\mathcal{L} &= \widehat{\partial\psi e_{123}} - 2m\widehat{\psi e_{123}} + 2q\widehat{A\psi e_0} \\ d_{\partial\psi}\mathcal{L} &= e_{123}\widehat{\psi} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\partial\psi e_{123}} - 2m\widehat{\psi e_{123}} + 2q\widehat{A\psi e_0} = e_{123}\widehat{\psi}\partial \\
&\partial\psi e_{123} - 2m\psi e_{123} + 2qA\psi e_0 = -\partial\psi e_{123} \\
&\partial\psi = m\psi + qA\psi\mathbf{i}
\end{aligned} \tag{26}$$

Une autre densité lagrangienne possible est :

$$\mathcal{L}' = < \partial\psi e_{123}\widehat{\psi}' - m\psi e_{123}\widehat{\psi}' + qA\psi e_0\widehat{\psi}' > \tag{27}$$

où $\psi'$ est une seconde onde du même type. Les équations qui découlent de cette densité, à savoir :

$$d_\psi\mathcal{L}' = (d_{\partial\psi}\mathcal{L}')\partial \tag{28}$$

$$d_{\psi'}\mathcal{L}' = (d_{\partial\psi'}\mathcal{L}')\partial \tag{29}$$

donnent respectivement

$$\begin{aligned}
\partial\psi' &= -m\psi' - qA\psi'\mathbf{i} \\
\partial\psi &= m\psi + qA\psi\mathbf{i}
\end{aligned} \tag{30}$$

La seconde onde $\psi'$ apparaît alors comme la conjuguée de charge de l'onde $\psi$, dans une conjugaison de charge qui ne change pas seulement le signe de la charge, mais aussi le signe de la masse.

Le fait qu'il existe deux formes complètement différentes pour la densité lagrangienne entraine l'existence de deux formes tout aussi différentes pour le tenseur d'impulsion-énergie lié à l'invariance de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sous les translations. Avec $\mathcal{L}'$ le tenseur d'impulsion-énergie contient à la fois $\psi$ et $\psi'$. La question de l'énergie doit donc être soigneusement réexaminée.

## 6 - Tenseurs sans dérivée

La forme que prend l'invariance relativiste en algèbre d'espace-temps fait que les tenseurs sans dérivée sont : $\psi\widehat{\psi}$, $\psi e_\mu\widehat{\psi}$, $\psi e_{\mu\nu}\widehat{\psi}$, $\psi e_{\mu\nu\rho}\widehat{\psi}$, $\psi\mathbf{i}\widehat{\psi}$, avec en tout 136 composantes, beaucoup plus que les 16 composantes de tenseurs connus en théorie de Dirac. Parmi ces tenseurs seuls les $\psi e_\mu\widehat{\psi}$ et les $\psi e_{\mu\nu\rho}\widehat{\psi}$ sont invariants de jauge électrique, ce qui fait tout de même encore 64 composantes de tenseurs, quatre fois plus que pour l'équation de Dirac. Pour cerner de manière plus précise ces tenseurs, posons

$$\varphi = \frac{1}{2}(\psi + \overline{\psi}) \;\; ; \;\; \chi e_0 = \frac{1}{2}(\psi - \overline{\psi}) \tag{31}$$

$\varphi$ et $\chi$ sont à valeur dans la sous-algèbre paire de l'algèbre d'espace-temps. On a :

$$\begin{gathered} \psi = \varphi + \chi e_0 \;\; ; \;\; \widehat{\psi} = \widetilde{\varphi} - e_0\widetilde{\chi} \\ \psi e_0 \widehat{\psi} = J + B \;\; ; \;\; J = \varphi e_0 \widetilde{\varphi} + \chi e_0 \widetilde{\chi} \;\; ; \;\; B = \varphi\widetilde{\chi} + \chi\widetilde{\varphi} \end{gathered} \tag{32}$$

$\psi e_0 \widehat{\psi}$ est la somme du vecteur d'espace-temps $J$ et du bivecteur $B$. Le vecteur $J$ est le vecteur courant dont la composante de temps peut être interprétée comme la densité de probabilité de présence de la particule, car si l'on pose :

$$\begin{aligned} \varphi &= u_0 + u_1 e_{01} + u_2 e_{02} + u_3 e_{03} + u_4 e_{23} + u_5 e_{31} + u_6 e_{12} + u_7 \mathbf{i} \\ \chi &= v_0 + v_1 e_{01} + v_2 e_{02} + v_3 e_{03} + v_4 e_{23} + v_5 e_{31} + v_6 e_{12} + v_7 \mathbf{i} \end{aligned} \tag{33}$$

on obtient

$$J^0 = \sum_{i=0}^{7} ({u_i}^2 + {v_i}^2) \tag{34}$$

donc $J^0$ est partout positif ou nul. De plus le courant $J$ est le courant conservatif lié par le théorème de Noether à l'invariance de $\mathcal{L}$ sous la transformation de jauge électrique (12), ce qui donne :

$$\partial \cdot J = \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{35}$$

Une des façons de voir que l'équation ici étudiée n'est pas équivalente à l'équation de Dirac est de regarder les conséquences du théorème de Noether sur les invariances de jauge (13). À chacune est en effet associé un courant conservatif. Ces courants sont les $J_{(k)}$ tels que

$$J_{(k)} = < \psi e_k \widehat{\psi} >_1 \;\; ; \;\; B_{(k)} = < \psi e_k \widehat{\psi} >_2 \tag{36}$$

Ces courants vérifient

$$\partial \cdot J_{(k)} = 0 \tag{37}$$

alors qu'il n'y a en théorie de Dirac qu'un seul courant conservatif, le courant $J$.

## 7 - Résolution de l'équation pour l'atome d'hydrogène.

Dans le cas du potentiel coulombien le vecteur $A$ se réduit à $A^0 e_0$. En multipliant (10) à gauche par $e_0$ on obtient :

$$\begin{aligned}(\partial_0 + \vec{\partial})\psi = me_0\psi + qA_0\psi\mathbf{i} \\ \vec{\partial} = e_{01}\partial_1 + e_{02}\partial_2 + e_{03}\partial_3\end{aligned} \tag{38}$$

On suppose ici que le plan de la trajectoire est $Ox_1x_2$ et l'on choisit les coordonnées sphériques :

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \quad ; \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \quad ; \quad x_3 = r\cos\theta \tag{39}$$

On suit ici la méthode de séparation des variables de H. Krüger [6]. On pose :

$$\begin{aligned}S = e^{-\frac{\varphi}{2}e_{12}}e^{-\frac{\theta}{2}e_{31}} \quad ; \quad \Omega = \frac{1}{r\sqrt{\sin\theta}}S \\ \vec{\partial}' = e_{03}\partial_r + e_{01}\frac{1}{r}\partial_\theta + e_{02}\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\end{aligned} \tag{40}$$

et l'on obtient

$$\vec{\partial} = \Omega\vec{\partial}'\Omega^{-1} \tag{41}$$

La séparation des variables $x^0 = ct$ et $\varphi$ des variables $r$ et $\theta$ s'obtient en posant

$$\psi = \Omega\phi e^{(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)\mathbf{i}} \tag{42}$$

où $\lambda$, $\delta$, $E$ sont des constantes et où $\phi$ est fonction de $r$ et $\theta$ seuls. En effet on a :

$$\begin{aligned}\partial_0(\Omega^{-1}\psi) = -E\phi\mathbf{i}e^{(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)\mathbf{i}} \\ \partial_\varphi(\Omega^{-1}\psi) = \lambda\phi\mathbf{i}e^{(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)\mathbf{i}}\end{aligned} \tag{43}$$

En multipliant à gauche l'équation (38) par $\Omega^{-1}$ on obtient

$$(\partial_0 + \vec{\partial}')(\Omega^{-1}\psi) = me_0\Omega^{-1}\psi + qA_0\Omega^{-1}\psi\mathbf{i} \tag{44}$$

et en tenant compte de (43) on obtient :

$$-E\phi\mathbf{i} + e_{03}\partial_r\phi + e_{01}\frac{1}{r}\partial_\theta\phi + \frac{\lambda}{r\sin\theta}e_{02}\phi\mathbf{i} = me_0\phi + qA_0\phi\mathbf{i} \tag{45}$$

$\alpha$ étant la constante de structure fine, on a $qA_0 = \frac{\alpha}{r}$, et l'on obtient

$$-(E + \frac{\alpha}{r})\phi\mathbf{i} + e_{03}\partial_r\phi + e_{01}\frac{1}{r}\partial_\theta\phi + \frac{\lambda}{r\sin\theta}e_{02}\phi\mathbf{i} = me_0\phi \tag{46}$$

Posons maintenant, comme en (31) :

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(\phi + \overline{\phi}) \quad ; \quad \phi_2 e_0 = \frac{1}{2}(\phi - \overline{\phi}) \tag{47}$$

$\phi_1$ et $\phi_2$ sont à valeur dans la sous-algèbre paire et peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u_0 + u_1e_{01} + u_2e_{02} + u_3e_{03} + u_4e_{23} + u_5e_{31} + u_6e_{12} + u_7\mathbf{i} \\ \phi_2 &= v_0 + v_1e_{01} + v_2e_{02} + v_3e_{03} + v_4e_{23} + v_5e_{31} + v_6e_{12} + v_7\mathbf{i} \end{aligned} \tag{48}$$

L'équation (46) est alors équivalente aux systèmes :

$$\begin{aligned}
(E + \frac{\alpha}{r})v_7 - \partial_r v_3 - \frac{1}{r}\partial_\theta v_1 - \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_5 &= -mu_0 \\
(E + \frac{\alpha}{r})v_4 - \partial_r v_5 - \frac{1}{r}\partial_\theta v_0 - \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_3 &= mu_1 \\
(E + \frac{\alpha}{r})v_5 + \partial_r v_4 - \frac{1}{r}\partial_\theta v_6 - \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_7 &= mu_2 \\
(E + \frac{\alpha}{r})v_6 - \partial_r v_0 + \frac{1}{r}\partial_\theta v_5 + \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_1 &= mu_3 \\
-(E + \frac{\alpha}{r})v_1 + \partial_r v_2 - \frac{1}{r}\partial_\theta v_7 - \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_6 &= -mu_4 \\
-(E + \frac{\alpha}{r})v_2 - \partial_r v_1 + \frac{1}{r}\partial_\theta v_3 + \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_0 &= -mu_5 \\
-(E + \frac{\alpha}{r})v_3 - \partial_r v_7 - \frac{1}{r}\partial_\theta v_2 + \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_4 &= -mu_6 \\
-(E + \frac{\alpha}{r})v_0 - \partial_r v_6 - \frac{1}{r}\partial_\theta v_4 + \frac{\lambda}{r\sin\theta}v_2 &= mu_7
\end{aligned} \tag{49}$$

$$
\begin{aligned}
(E+\frac{\alpha}{r})u_7+\partial_r u_3+\frac{1}{r}\partial_\theta u_1-\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_5&=-mv_0\\
(E+\frac{\alpha}{r})u_4+\partial_r u_5+\frac{1}{r}\partial_\theta u_0-\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_3&=mv_1\\
(E+\frac{\alpha}{r})u_5-\partial_r u_4+\frac{1}{r}\partial_\theta u_6-\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_7&=mv_2\\
(E+\frac{\alpha}{r})u_6+\partial_r u_0-\frac{1}{r}\partial_\theta u_5+\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_1&=mv_3\\
-(E+\frac{\alpha}{r})u_1-\partial_r u_2+\frac{1}{r}\partial_\theta u_7-\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_6&=-mv_4\\
-(E+\frac{\alpha}{r})u_2+\partial_r u_1-\frac{1}{r}\partial_\theta u_3+\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_0&=-mv_5\\
-(E+\frac{\alpha}{r})u_3+\partial_r u_7+\frac{1}{r}\partial_\theta u_2+\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_4&=-mv_6\\
-(E+\frac{\alpha}{r})u_0+\partial_r u_6+\frac{1}{r}\partial_\theta u_4+\frac{\lambda}{r\sin\theta}u_2&=mv_7
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Ces systèmes se réduisent, si :

$$
\begin{aligned}
&u_0=c_1u_2\ ;\quad u_3=-c_1u_4\ ;\quad u_6=c_1u_1\ ;\quad u_7=c_1u_5\\
&v_0=-c_1v_2\ ;\quad v_3=c_1v_4\ ;\quad v_6=-c_1v_1\ ;\quad v_7=-c_1v_5\\
&c_1=\pm 1
\end{aligned}
\tag{51}
$$

au système suivant :

$$
\begin{aligned}
(E+\frac{\alpha}{r})u_1+\partial_r u_2-\frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_5-\frac{\lambda}{\sin\theta}u_1)&=mv_4\\
(E+\frac{\alpha}{r})u_2-\partial_r u_1-\frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_4+\frac{\lambda}{\sin\theta}u_2)&=mv_5\\
(E+\frac{\alpha}{r})u_4+\partial_r u_5+\frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_2+\frac{\lambda}{\sin\theta}u_4)&=mv_1\\
(E+\frac{\alpha}{r})u_5-\partial_r u_4+\frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_1-\frac{\lambda}{\sin\theta}u_5)&=mv_2\\
(E+\frac{\alpha}{r})v_1-\partial_r v_2-\frac{c_1}{r}(\partial_\theta v_5+\frac{\lambda}{\sin\theta}v_1)&=mu_4\\
(E+\frac{\alpha}{r})v_2+\partial_r v_1-\frac{c_1}{r}(\partial_\theta v_4-\frac{\lambda}{\sin\theta}v_2)&=mu_5\\
(E+\frac{\alpha}{r})v_4-\partial_r v_5+\frac{c_1}{r}(\partial_\theta v_2-\frac{\lambda}{\sin\theta}v_4)&=mu_1\\
(E+\frac{\alpha}{r})v_5+\partial_r v_4+\frac{c_1}{r}(\partial_\theta v_1+\frac{\lambda}{\sin\theta}v_5)&=mu_2
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Le système précédent peut être à nouveau réduit si :

$$v_4 = c_2 u_2 \ ; \quad v_2 = -c_2 u_4 \ ; \quad v_5 = c_2 u_1 \ ; \quad v_1 = -c_2 u_5 \ ; \quad c_2 = \pm 1 \tag{53}$$

auquel cas il prend la forme :

$$\begin{aligned}
(E+\frac{\alpha}{r})u_1 + \partial_r u_2 - \frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_5 - \frac{\lambda}{\sin\theta}u_1) &= c_2 m u_2 \\
(E+\frac{\alpha}{r})u_2 - \partial_r u_1 - \frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_4 + \frac{\lambda}{\sin\theta}u_2) &= c_2 m u_1 \\
(E+\frac{\alpha}{r})u_4 + \partial_r u_5 + \frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_2 + \frac{\lambda}{\sin\theta}u_4) &= -c_2 m u_5 \\
(E+\frac{\alpha}{r})u_5 - \partial_r u_4 + \frac{c_1}{r}(\partial_\theta u_1 - \frac{\lambda}{\sin\theta}u_5) &= -c_2 m u_4
\end{aligned} \tag{54}$$

La séparation de ce système s'effectue en remarquant que $u_1$ et $u_2$ ont même partie angulaire, ainsi que $u_4$ et $u_5$, tandis que $u_5$ et $u_1$ ont même partie radiale, ainsi que $u_2$ et $u_4$.Donc on pose :

$$u_1 = Af \ ; \quad u_2 = Ag \ ; \quad u_4 = -Bg \ ; \quad u_5 = Bf \tag{55}$$

où $A = A(\theta)$, $B = B(\theta)$, $f = f(r)$, $g = g(r)$ sont des fonctions d'une seule variable. Le système d'équation devient alors :

$$\begin{aligned}
(E+\frac{\alpha}{r})Af + Ag' - \frac{c_1}{r}(B' - \frac{\lambda}{\sin\theta}A)f &= c_2 m A g \\
(E+\frac{\alpha}{r})Ag - Af' - \frac{c_1}{r}(-B' + \frac{\lambda}{\sin\theta}A)g &= c_2 m A f \\
-(E+\frac{\alpha}{r})Bg + Bf' + \frac{c_1}{r}(A' - \frac{\lambda}{\sin\theta}B)g &= -c_2 m B f \\
(E+\frac{\alpha}{r})Bf + Bg' + \frac{c_1}{r}(A' - \frac{\lambda}{\sin\theta}B)f &= c_2 m B g
\end{aligned} \tag{56}$$

Il y a séparation des variables s'il existe une constante $\kappa$ telle que :

$$\begin{aligned}
A' - \frac{\lambda}{\sin\theta}B &= \kappa B \\
B' - \frac{\lambda}{\sin\theta}A &= -\kappa A
\end{aligned} \tag{57}$$

auquel cas le système (56) se réduit au système radial :

$$\begin{aligned}
(E+\frac{\alpha}{r})f + g' + \frac{c_1\kappa}{r}f &= c_2 m g \\
(E+\frac{\alpha}{r})g - f' - \frac{c_1\kappa}{r}g &= c_2 m f
\end{aligned} \tag{58}$$

**Résolution du système angulaire**

Pour résoudre le système angulaire (57), on pose

$$U = A + B \quad ; \quad V = A - B \tag{59}$$

Et on obtient en ajoutant et retranchant les équations (57) le système équivalent

$$\begin{aligned} U' &= \frac{\lambda}{\sin\theta} U - \kappa V \\ V' &= -\frac{\lambda}{\sin\theta} V + \kappa U \end{aligned} \tag{60}$$

Si $\lambda > 0$ on pose, avec $C = C(\theta)$ :

$$\begin{aligned} U &= \sin^{\lambda}\theta[\sin\frac{\theta}{2}C' - (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)\cos\frac{\theta}{2}C] \\ V &= \sin^{\lambda}\theta[\cos\frac{\theta}{2}C' + (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda)\sin\frac{\theta}{2}C] \end{aligned} \tag{61}$$

Si $\lambda < 0$ on pose :

$$\begin{aligned} U &= \sin^{-\lambda}\theta[\cos\frac{\theta}{2}C' + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)\sin\frac{\theta}{2}C] \\ V &= \sin^{-\lambda}\theta[-\sin\frac{\theta}{2}C' + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)\cos\frac{\theta}{2}C] \end{aligned} \tag{62}$$

Le système angulaire (60) est alors équivalent [7] à l'équation différentielle des polynômes de Gegenbauer :

$$0 = C'' + \frac{2|\lambda|}{\tan\theta}C' + [(\kappa + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2]C \tag{63}$$

Le changement de variable $z = \cos\theta$ donne alors l'équation différentielle :

$$0 = f''(z) - \frac{1 + 2|\lambda|}{1 - z^2} z f'(z) + \frac{(\kappa + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2}{1 - z^2} f(z) \tag{64}$$

Cette équation différentielle est du type de Fuchs en $z = 0$. L'étude de la parité montre que toute solution est somme d'une solution paire et d'une solution impaire. On aura donc :

$$\begin{aligned} f(z) &= p(z) + i(z) \\ p(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^{2j} \quad ; \quad i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} i_j z^{2j+1} \end{aligned} \tag{65}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= \frac{(2j+|\lambda|+\kappa+\frac{1}{2})(2j+|\lambda|-\kappa-\frac{1}{2})}{(2j+2)(2j+1)}p_j \\ i_{j+1} &= \frac{(2j+1+|\lambda|+\kappa+\frac{1}{2})(2j+1+|\lambda|-\kappa-\frac{1}{2})}{(2j+3)(2j+2)}i_j \end{aligned} \tag{66}$$

$f$ n'est de carré sommable que si c'est un polynôme, donc s'il existe un entier $n$ tel que

$$n+|\lambda| = |\kappa+\frac{1}{2}| \tag{67}$$

La forme du facteur $\Omega$ indique que $\psi$ n'est univaluée que si $\lambda$ est demi-entier impair, ce qui impose à $\kappa$ d'être entier. Les solutions pour $\kappa=0$ sont aussi bi-valuées, donc $\kappa$ doit être un entier relatif non nul. On pose ensuite

$$j = |\kappa+\frac{1}{2}| \tag{68}$$

$j$ prend les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, ... et par suite de (67) les valeurs possibles pour $\lambda$ sont $-j$, $-j+1$, ... $j-1$, $j$. Il n'est pas nécessaire de faire intervenir les opérateurs de spin et la théorie des représentations du groupe des rotations pour obtenir ces résultats, qui découlent de la séparation des variables et du caractère univalué et de carré sommable des fonctions d'onde. En tenant compte des deux valeurs possibles pour les constantes $c_1$ et $c_2$, quatre cas sont possibles

**Premier cas :** $c_1 = c_2 = 1$

Le système radial devient

$$\begin{aligned} (E+\frac{\alpha}{r})f + g' + \frac{\kappa}{r}f &= mg \\ (E+\frac{\alpha}{r})g - f' - \frac{\kappa}{r}g &= mf \end{aligned} \tag{69}$$

On pose alors

$$f_1 = f+g \quad ; \quad f_2 = f-g \tag{70}$$

et en ajoutant et retranchant les équations (69) on obtient :

$$\begin{aligned}(E+\frac{\alpha}{r}-m)f_1-f_2'+\frac{\kappa}{r}f_2=0\\(E+\frac{\alpha}{r}+m)f_2+f_1'+\frac{\kappa}{r}f_1=0\end{aligned}\tag{71}$$

Ce système est le système radial obtenu à partir de l'équation de Dirac. On obtient les niveaux d'énergie simplement en supposant que les fonctions sont de carré sommable, ce qui entraîne l'existence de polynômes dont le degré $n$ fournit la formule des niveaux d'énergie :

$$m_0c^2[1+\frac{\alpha^2}{(n+\sqrt{\kappa^2-\alpha^2})^2}]^{-\frac{1}{2}}\tag{72}$$

et en outre ce système radial donne le bon nombre d'états, grâce au fait qu'il n'y a pour $n=0$ de solution que pour $\kappa<0$.

Pour cette première solution, on obtient :

$$\begin{aligned}u_1=u_6=v_5=-v_7=Af=\frac{U+V}{2}\frac{f_1+f_2}{2}\\u_2=u_0=v_3=v_4=Ag=\frac{U+V}{2}\frac{f_1-f_2}{2}\\u_4=-u_3=v_0=-v_2=-Bg=\frac{V-U}{2}\frac{f_1-f_2}{2}\\u_5=u_7=-v_1=v_6=Bf=\frac{U-V}{2}\frac{f_1+f_2}{2}\end{aligned}\tag{73}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}\phi=\phi^{(1)}&=\phi_1{}^{(1)}+\phi_2{}^{(1)}e_0\\4\phi_1{}^{(1)}=&(U+V)(f_1-f_2)+(U+V)(f_1+f_2)e_{01}\\&+(U+V)(f_1-f_2)e_{02}+(U-V)(f_1-f_2)e_{03}\\&+(V-U)(f_1-f_2)e_{23}+(U-V)(f_1+f_2)e_{31}\\&+(U+V)(f_1+f_2)e_{12}+(U-V)(f_1+f_2)\mathbf{i}\\4\phi_2{}^{(1)}=&(V-U)(f_1-f_2)+(V-U)(f_1+f_2)e_{01}\\&+(U-V)(f_1-f_2)e_{02}+(U+V)(f_1-f_2)e_{03}\\&+(U+V)(f_1-f_2)e_{23}+(U+V)(f_1+f_2)e_{31}\\&+(U-V)(f_1+f_2)e_{12}-(U+V)(f_1+f_2)\mathbf{i}\end{aligned}\tag{74}$$

**Deuxième cas :** $c_1 = 1$**,** $c_2 = -1$**,** $\kappa = \kappa_2$

Le système radial devient :

$$\begin{aligned}(E + \frac{\alpha}{r})f + g' + \frac{\kappa_2}{r}f &= -mg \\ (E + \frac{\alpha}{r})g - f' - \frac{\kappa_2}{r}g &= -mf\end{aligned} \tag{75}$$

On pose dans ce cas

$$f_1 = g - f \quad ; \quad f_2 = f + g \tag{76}$$

et en ajoutant et retranchant les équations on obtient :

$$\begin{aligned}(E + \frac{\alpha}{r} - m)f_1 - f_2' - \frac{\kappa_2}{r}f_2 &= 0 \\ (E + \frac{\alpha}{r} + m)f_2 + f_1' - \frac{\kappa_2}{r}f_1 &= 0\end{aligned} \tag{77}$$

Ce système est identique à (71) si $\kappa_2 = -\kappa$, et alors le système angulaire devient, à la place de (57) :

$$\begin{aligned}A' - \frac{\lambda}{\sin\theta}B &= -\kappa B \\ B' - \frac{\lambda}{\sin\theta}A &= \kappa A\end{aligned} \tag{78}$$

Mais si l'on échange $A$ et $B$, on obtient (57), donc il suffit de poser maintenant

$$U = A + B \quad ; \quad V = -A + B \tag{79}$$

pour obtenir à nouveau le système (60). Pour cette seconde solution on a :

$$\begin{aligned}u_1 = u_6 = -v_5 = v_7 = Af &= \frac{U - V}{2}\frac{f_2 - f_1}{2} \\ u_2 = u_0 = -v_3 = -v_4 = Ag &= \frac{U - V}{2}\frac{f_1 + f_2}{2} \\ u_4 = -u_3 = -v_0 = v_2 = -Bg &= -\frac{U + V}{2}\frac{f_1 + f_2}{2} \\ u_5 = u_7 = v_1 = -v_6 = Bf &= \frac{U + V}{2}\frac{f_2 - f_1}{2}\end{aligned} \tag{80}$$

et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi = \phi^{(2)} &= {\phi_1}^{(2)} + {\phi_2}^{(2)} e_0 \\
4{\phi_1}^{(2)} =& (U-V)(f_1+f_2) + (U-V)(f_2-f_1)e_{01} \\
&+ (U-V)(f_1+f_2)e_{02} + (U+V)(f_1+f_2)e_{03} \\
&- (U+V)(f_1+f_2)e_{23} + (U+V)(f_2-f_1)e_{31} \\
&+ (U-V)(f_2-f_1)e_{12} + (U+V)(f_2-f_1)\mathbf{i} \qquad (81) \\
4{\phi_2}^{(2)} =& (U+V)(f_1+f_2) + (U+V)(f_2-f_1)e_{01} \\
&- (U+V)(f_1+f_2)e_{02} + (V-U)(f_1+f_2)e_{03} \\
&+ (V-U)(f_1+f_2)e_{23} + (V-U)(f_2-f_1)e_{31} \\
&+ (U+V)(f_1-f_2)e_{12} - (U-V)(f_2-f_1)\mathbf{i}
\end{aligned}$$

**Troisième cas :** $c_1 = -1$**,** $c_2 = 1$**,** $\kappa = \kappa_3$

Le système radial devient :

$$\begin{aligned}
(E + \frac{\alpha}{r})f + g' - \frac{\kappa_3}{r} f = mg \\
(E + \frac{\alpha}{r})g - f' + \frac{\kappa_3}{r} g = mf
\end{aligned} \qquad (82)$$

Il suffit donc de poser $\kappa = -\kappa_3$ et d'utiliser (79) pour obtenir les systèmes angulaires et radiaux du premier cas. On obtient donc ici :

$$\begin{aligned}
u_1 = -u_6 = v_5 = v_7 = Af &= \frac{U-V}{2}\frac{f_1+f_2}{2} \\
u_2 = -u_0 = -v_3 = v_4 = Ag &= \frac{U-V}{2}\frac{f_1-f_2}{2} \\
u_4 = u_3 = -v_0 = -v_2 = -Bg &= -\frac{U+V}{2}\frac{f_1-f_2}{2} \\
u_5 = -u_7 = -v_1 = -v_6 = Bf &= \frac{U+V}{2}\frac{f_1+f_2}{2}
\end{aligned} \qquad (83)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\phi = \phi^{(3)} &= {\phi_1}^{(3)} + {\phi_2}^{(3)} e_0 \\
4{\phi_1}^{(3)} =& (V-U)(f_1-f_2) + (U-V)(f_1+f_2)e_{01} \\
&+ (U-V)(f_1-f_2)e_{02} + (U+V)(f_2-f_1)e_{03} \\
&+ (U+V)(f_2-f_1)e_{23} + (U+V)(f_1+f_2)e_{31} \\
&+ (V-U)(f_1+f_2)e_{12} - (U+V)(f_1+f_2)\mathbf{i} \qquad (84) \\
4{\phi_2}^{(3)} =& (U+V)(f_1-f_2) - (U+V)(f_1+f_2)e_{01} \\
&+ (U+V)(f_1-f_2)e_{02} + (V-U)(f_1-f_2)e_{03} \\
&+ (U-V)(f_1-f_2)e_{23} + (U-V)(f_1+f_2)e_{31} \\
&- (U+V)(f_1+f_2)e_{12} + (U-V)(f_1+f_2)\mathbf{i}
\end{aligned}$$

**Quatrième cas :** $c_1 = -1$**,** $c_2 = -1$

Le système radial devient :

$$\begin{aligned}
(E + \frac{\alpha}{r})f + g' - \frac{\kappa}{r}f &= -mg \\
(E + \frac{\alpha}{r})g - f' + \frac{\kappa}{r}g &= -mf
\end{aligned} \qquad (85)$$

On pose dans ce cas

$$f_1 = g - f \quad ; \quad f_2 = f + g \qquad (86)$$

et en ajoutant et retranchant les équations on obtient (71). On a donc ici :

$$\begin{aligned}
u_1 = -u_6 = -v_5 = -v_7 = Af &= \frac{U+V}{2}\frac{f_2-f_1}{2} \\
u_2 = -u_0 = v_3 = -v_4 = Ag &= \frac{U+V}{2}\frac{f_1+f_2}{2} \\
u_4 = u_3 = v_0 = v_2 = -Bg &= -\frac{U-V}{2}\frac{f_1+f_2}{2} \\
u_5 = -u_7 = v_1 = v_6 = Bf &= \frac{U-V}{2}\frac{f_2-f_1}{2}
\end{aligned} \qquad (87)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi^{(4)} = {\phi_1}^{(4)} + {\phi_2}^{(4)} e_0 \\
4{\phi_1}^{(4)} =& -(U+V)(f_1+f_2) + (U+V)(f_2-f_1)e_{01} \\
&+ (U+V)(f_1+f_2)e_{02} + (V-U)(f_1+f_2)e_{03} \\
&+ (V-U)(f_1+f_2)e_{23} + (U-V)(f_2-f_1)e_{31} \\
&+ (U+V)(f_1-f_2)e_{12} + (U-V)(f_1-f_2)\mathbf{i} \\
4{\phi_2}^{(4)} =& (V-U)(f_1+f_2) + (U-V)(f_2-f_1)e_{01} \\
&+ (V-U)(f_1+f_2)e_{02} + (U+V)(f_1+f_2)e_{03} \\
&- (U+V)(f_1+f_2)e_{23} + (U+V)(f_1-f_2)e_{31} \\
&+ (U-V)(f_2-f_1)e_{12} + (U+V)(f_1-f_2)\mathbf{i}
\end{aligned} \tag{88}$$

La solution générale $\phi$ de l'équation (46), pour chaque valeur des nombres quantiques $n$, $\kappa$, $\lambda$, est une combinaison linéaires des solutions $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, $\phi^{(3)}$, $\phi^{(4)}$. En posant :

$$\begin{aligned}
\phi =& \frac{a}{2}(\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)}) + \frac{b}{2}(\phi^{(1)} + \phi^{(2)} - \phi^{(3)} - \phi^{(4)}) \\
&+ \frac{c}{2}(\phi^{(1)} - \phi^{(2)} + \phi^{(3)} - \phi^{(4)}) + \frac{d}{2}(\phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \phi^{(3)} + \phi^{(4)})
\end{aligned} \tag{89}$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_1 + \phi_2 e_0 \\
\phi_1 &= u_0 + u_1 e_{01} + u_2 e_{02} + u_3 e_{03} + u_4 e_{23} + u_5 e_{31} + u_6 e_{12} + u_7 \mathbf{i} \\
\phi_2 &= v_0 + v_1 e_{01} + v_2 e_{02} + v_3 e_{03} + v_4 e_{23} + v_5 e_{31} + v_6 e_{12} + v_7 \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{90}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{2}(-aVf_2 + bUf_1 + cVf_1 - dUf_2)\\
u_1 &= \frac{1}{2}(aUf_2 + bVf_1 + cUf_1 + dVf_2)\\
u_2 &= \frac{1}{2}(aUf_1 - bVf_2 - cUf_2 + dVf_1)\\
u_3 &= \frac{1}{2}(aVf_2 + bUf_1 - cVf_1 - dUf_2)\\
u_4 &= \frac{1}{2}(-aUf_1 - bVf_2 + cUf_2 + dVf_1)\\
u_5 &= \frac{1}{2}(aUf_2 - bVf_1 + cUf_1 - dVf_2)\\
u_6 &= \frac{1}{2}(aVf_1 + bUf_2 + cVf_2 + dUf_1)\\
u_7 &= \frac{1}{2}(-aVf_1 + bUf_2 - cVf_2 + dUf_1)
\end{aligned}
\tag{91}
$$

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \frac{1}{2}(aVf_1 + bUf_2 - cVf_2 - dUf_1)\\
v_1 &= \frac{1}{2}(-aUf_1 + bVf_2 - cUf_2 + dVf_1)\\
v_2 &= \frac{1}{2}(-aUf_2 - bVf_1 + cUf_1 + dVf_2)\\
v_3 &= \frac{1}{2}(aVf_1 - bUf_2 - cVf_2 + dUf_1)\\
v_4 &= \frac{1}{2}(-aUf_2 + bVf_1 + cUf_1 - dVf_2)\\
v_5 &= \frac{1}{2}(aUf_1 + bVf_2 + cUf_2 + dVf_1)\\
v_6 &= \frac{1}{2}(-aVf_2 + bUf_1 - cVf_1 + dUf_2)\\
v_7 &= \frac{1}{2}(-aVf_2 - bUf_1 - cVf_1 - dUf_2)
\end{aligned}
\tag{92}
$$

## 8 - Les tenseurs dans le cas de l'atome d'hydrogène

Le vecteur courant $J$ est la partie vectorielle de $\psi e_0 \widehat{\psi}$. La forme (42) de $\psi$ donne :

$$\psi e_0 \widehat{\psi} = \Omega \phi e_0 \widehat{\phi} \widetilde{\Omega} \tag{93}$$

Avec la décomposition de $\phi$ en la somme d'un terme pair et d'un terme impair (47) on a

$$< \phi e_0 \widehat{\phi} >_1 = \phi_1 e_0 \widetilde{\phi_1} + \phi_2 e_0 \widetilde{\phi_2} \tag{94}$$

Le courant $J$ est donc la somme de deux vecteurs :

$$\begin{aligned} J &= J' + J'' \\ J' &= \Omega \phi_1 e_0 \widetilde{\phi_1} \widetilde{\Omega} \\ J'' &= \Omega \phi_2 e_0 \widetilde{\phi_2} \widetilde{\Omega} \end{aligned} \tag{95}$$

Et pour la composante de temps $J^0$ qui est interprétable comme densité de probabilité de présence on obtient :

$$\begin{aligned} J^0 &= J'^0 + J''^0 \\ J'^0 &= J''^0 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \frac{U^2+V^2}{\sin\theta} \frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2} \end{aligned} \tag{96}$$

Partant de l'interprétation de $J^0$ comme densité de probabilité de présence, la théorie de Dirac normalise l'onde de façon à avoir une vraie probabilité, donc pose :

$$\begin{aligned} \iiint J^0 dv &= 1 \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (U^2+V^2) d\theta &= 1 \\ \int_0^{+\infty} ({f_1}^2+{f_2}^2) dr &= 1 \end{aligned} \tag{97}$$

Si l'on garde ces trois conditions de normalisation, on est amené à ajouter ici

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \tag{98}$$

Cette condition, qui simplifie les calculs qui vont suivre, sera supposée vérifiée. L'ensemble des solutions correspondant aux mêmes nombres quantiques $n$, $\kappa$, $\lambda$, est alors en correspondance bijective avec la sphère unité de $\mathbb{R}^4$. Cette hypersphère est invariante sous le groupe des rotations $SO(4)$. C'est aussi le cas de $J^0$, qui ne dépend des constantes $a$,

$b$, $c$, $d$ que par la somme de leurs carrés. Mais cette invariance concerne aussi les vecteurs $J'$, $J''$ et $J$ car on obtient :

$$\begin{aligned}
J' =& \frac{U^2+V^2}{2\sin\theta}\frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2}e_0+\frac{UV}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2-{f_2}^2}{r^2}u_\theta \\
&-\frac{2UV}{\sin\theta}\frac{f_1f_2}{r^2}u_\varphi+\frac{U^2-V^2}{2\sin\theta}\frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2}u_r \\
J'' =& \frac{U^2+V^2}{2\sin\theta}\frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2}e_0-\frac{UV}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2-{f_2}^2}{r^2}u_\theta \\
&-\frac{2UV}{\sin\theta}\frac{f_1f_2}{r^2}u_\varphi-\frac{U^2-V^2}{2\sin\theta}\frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2}u_r \\
J =& \frac{U^2+V^2}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2}e_0-\frac{4UV}{\sin\theta}\frac{f_1f_2}{r^2}u_\varphi \\
u_\theta &= Se_1S^{-1} = \cos\theta\cos\varphi\ e_1+\cos\theta\sin\varphi\ e_2-\sin\theta\ e_3 \\
u_\varphi &= Se_2S^{-1} = -\sin\varphi\ e_1+\cos\varphi\ e_2 \\
u_r &= Se_3S^{-1} = \sin\theta\cos\varphi\ e_1+\sin\theta\sin\varphi\ e_2+\cos\theta\ e_3
\end{aligned} \tag{99}$$

L'équation de Dirac permet de construire 16 densités tensorielles invariantes de jauge électrique. Avec l'équation (10) le nombre de densités tensorielles invariantes de jauge électrique est quatre fois plus grand. Il est remarquable que, parmi ces 64 densités, figurent les 16 de la théorie de Dirac, avec exactement les mêmes valeurs si l'on utilise la condition de normalisation (98). En effet $\psi e_0\widehat{\psi}$ est somme du vecteur $J$ et du bivecteur $B$ qui est l'équivalent du tenseur antisymétrique densité de moment magnétique - densité de moment électrique, et vaut :

$$B = (\frac{U^2+V^2}{\sin\theta}\frac{2f_1f_2}{r^2}-\frac{2UV}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2+{f_2}^2}{r^2}\mathbf{i})u_\theta e_0+\frac{U^2-V^2}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2-{f_2}^2}{r^2}\mathbf{i}u_r e_0 \tag{100}$$

De même $\psi e_{123}\widehat{\psi}$ se décompose en :

$$\begin{aligned}
\psi e_{123}\widehat{\psi} &= \Omega_1+\Omega_2\mathbf{i}+\mathbf{i}K \\
K &= J'-J''
\end{aligned} \tag{101}$$

où $K$ est assimilable au vecteur densité de spin de la théorie de Dirac, $\Omega_1$ et $\Omega_2$ étant assimilables aux deux invariants de la théorie de Dirac, et ont pour valeur dans le cas de l'atome H :

$$\begin{aligned} K &= \frac{2UV}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2 - {f_2}^2}{r^2}u_\theta + \frac{U^2 - V^2}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2 + {f_2}^2}{r^2}u_r \\ \Omega_1 &= \frac{U^2 + V^2}{\sin\theta}\frac{{f_1}^2 - {f_2}^2}{r^2} \\ \Omega_2 &= \frac{U^2 - V^2}{\sin\theta}\frac{2f_1 f_2}{r^2} \end{aligned} \tag{102}$$

Ces valeurs sont identiques à celle que l'on obtient en théorie de Dirac pour les solutions de l'atome H. En fait le calcul direct donne partout en facteur $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ que l'on a normalisé à 1. Par conséquent toute rotation effectuée sur ces constantes $a$, $b$, $c$, $d$, laisse ces densités tensorielles invariantes. Il existe donc ici un groupe de symétrie interne $SO(4)$, invisible tant que l'on se limite aux grandeurs de la théorie de Dirac.

Pour les autres tenseurs la situation est différente. Dans le cas de l'atome H certains de ces tenseurs sont nuls :

$$\psi\widehat{\psi} = 0 \quad ; \quad \psi\mathbf{i}\widehat{\psi} = 0 \tag{103}$$

La nullité de ces tenseurs correspond au fait que $J'$ et $J''$ sont des vecteurs de carré nul, donc sont équivalents aux courants chiraux utilisés par G. Lochak [8] dans sa théorie du monopôle magnétique. Ceci suggère que la décomposition de $\psi$ en la somme d'un terme pair et d'un terme impair est l'analogue de la décompostion de l'onde de Dirac en la somme d'une onde droite et d'une onde gauche.

Dans le cas de l'atome H les autres tenseurs invariants de jauge électrique sont proportionnels aux tenseurs de la théorie de Dirac, car on obtient :

$$\begin{aligned} \psi e_1\widehat{\psi} &= \frac{2(bc - ad)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\psi e_0\widehat{\psi} \\ \psi e_2\widehat{\psi} &= \frac{2(ab + cd)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\psi e_0\widehat{\psi} \\ \psi e_3\widehat{\psi} &= \frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\psi e_0\widehat{\psi} \end{aligned} \tag{104}$$

Et la conservation des courants $J_{(k)}$ est bien vérifiée. Ces tenseurs ne sont pas invariants si l'on tourne les constantes $a$, $b$, $c$, $d$.

**Conclusion :**

L'équation de Dirac a été écrite en 1928 sur la base de ce que l'on avait à l'époque : les équations de Schrödinger et de Pauli, et la relativité restreinte. Comme l'équation de Schrödinger utilise une onde à valeur complexe et que l'équation de Pauli, pour rendre compte du spin, utilise deux telles ondes, Dirac a utilisé ces éléments pour bâtir une équation d'onde relativiste. Cette équation devait être du premier ordre si l'on voulait obtenir une densité de probabilité de présence. A partir de ces bases, Dirac a obtenu une équation qui a donné des résultats remarquables : dans le cas de l'atome d'hydrogène, elle donne exactement les nombres quantiques dont ont besoin les spectroscopistes, exactement le nombre des états et, à l'effet Lamb près, exactement les bons niveaux d'énergie.

Aussi se demander si l'équation de Dirac est la bonne équation peut aujourd'hui passer pour une plaisanterie. Pourtant nous avons obtenu ici une autre équation d'onde, non équivalente à celle de Dirac, en utilisant un cadre mathématique différent. Les prescriptions de départ sont : une équation du premier ordre, aussi simple que possible, redonnant au second ordre l'équation des ondes, et une phase permettant d'écrire l'invariance de jauge électrique. On a choisi le générateur de ce groupe de jauge de façon à ne privilégier aucune direction d'espace-temps.

Etant donné le caractère extraordinairement précis de la résolution dans le cas de l'atome d'hydrogène, on ne peut que s'étonner du fait que cette nouvelle équation donne exactement les mêmes nombres quantiques, le même nombre d'états, les mêmes niveaux d'énergie. Plus étonnant encore, on retrouve exactement toutes les densités tensorielles de la théorie de Dirac, avec les mêmes valeurs.

Mais on obtient avec cette équation beaucoup plus de solutions. L'ensemble des solutions correspondant à l'un des états liés de la théorie classique est doté d'une symétrie interne, et sous ce groupe de symétrie les tenseurs de la théorie classique sont invariants.

Les groupes dits de symétrie interne ont émergé en physique des particules pour rendre compte des interactions non électromagnétiques. Ici cette symétrie interne apparaît sans aucune nécessité, elle est disponible à partir de l'équation d'onde elle-même. Il reste maintenant à voir si cette symétrie interne est reliable aux modèles issus de l'expérience.

L'équation linéaire étudiée ici ne peut être qu'une approximation linéaire de la véritable équation d'onde. Celle-ci, selon L. de Broglie, doit être non linéaire si l'on veut rendre compte de la liaison entre l'onde et la particule. On sort d'ailleurs de la linéarité dès que l'on normalise l'onde. La présente étude est issue de [7], qui a amené la question : quelle est la véritable approximation linéaire de l'équation des ondes de l'électron ?

### Références

[1] D. Hestenes : *Space-Time Algebra* (Gordon & Breach, New York 1966, 1987, 1992).

D. Hestenes : *Real Spinor Fields*. J. Math. Phys., **8** $n°$4 1967

D. Hestenes : *Local observables in the Dirac theory*. J. Math. Phys, **14** $n°$7 1973)

D. Hestenes : *Proper particle mechanics*. J. Math. Phys., **15** $n°$10 1974)

D. Hestenes : *Proper dynamics of a rigid point particle*. J. Math. Phys., **15** $n°$10 1974)

D. Hestenes : *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* J. Math. Phys., **16** $n°$3 1975

D. Hestenes : *A unified language for Mathematics and Physics* in *Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics* JSR Chisholm & AK Common eds, (Reidel, Dordrecht, 1986)

[2] R. Boudet : *La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps*. Ann. Fond. Louis de Broglie, **13** $n°$1 1988.

R. Boudet : *The role of the duality rotation in the Dirac theory. Comparison between the Darwin and the Krüger solutions for the central potential problem*. in The Electron D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, 1991 Kluwer, Dordrecht

R. Boudet : *The Takabayasi moving Frame, from A Potential to the Z Boson*, in "The Present Status of the Quantum Theory of the Light", S. Jeffers and J.P. Vigier eds., Kluwer Dordrecht 1995

[3] C. Daviau : *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht,

C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** $n°$ 1 1997.

C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** $n°$ 1 1998

C. Daviau : *Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** $n°$ 3 - 4, 1998

C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** $n^\circ$ 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : **25** $n^\circ$ 1, 2000.

[4] Louis de Broglie : *L'électron magnétique*, Hermann, Paris 1934 page 138.

[5] A. Lasenby, C. Doran, S. Gull : *A Multivector Derivative Approach to Lagrangian Field Theory* Found. of Phys. **23** $n^\circ$ 10, 1993

[6] H. Krüger : *New solutions of the Dirac equation for central fields*, in *The Electron*, D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, Kluwer Academic Publishers, 49-81.

[7] C. Daviau : *Equation de Dirac non linéaire*, (Thèse de doctorat, Université de Nantes), 1993

C. Daviau : *Linear and Nonlinear Dirac Equation*, Found. of Phys., **23** $n^\circ$ 11, 1993

C. Daviau : *Remarques sur une équation de Dirac non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **19** $n^\circ$ 4, 1994

C. Daviau : *Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** $n^\circ$ 1, 1995

C. Daviau : *Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equations for the Hydrogen Atom*, Int. Conference on the Theory of the Electron, Mexico 1995

[8] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin* $\frac{1}{2}$. Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** $n^\circ$ 4 1983 et **9** $n^\circ$ 1 1984

G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin* $\frac{1}{2}$ *magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* Int. J. of Th. Phys. **24** $n^\circ$10 1985

G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** $n^\circ$2 1992

*(Manuscrit reçu le 14 février 2001)*