Vérité scientifique et trous noirs (Quatrième partie) Détermination de métriques $\Theta(4)$-invariantes

NIKIAS STAVROULAKIS

Solomou 35, 15233 Chalandri, Grèce

RÉSUMÉ. Dans cette dernière partie de l'article on commence par étudier la structure $\Theta(4)$-invariante du tenseur impulsion-énergie électromagnétique et l'on montre qu'elle est compatible aussi bien avec un champ électromagnétique $\Theta(4)$-invariant qu'avec un champ électromagnétique $S\Theta(4)$-invariant. Cela nous permet d'établir les solutions complètes à l'extérieur de la source chargée. La solution stationnaire est présentée en toute généralité avec une discussion de la signification de ses degrés de liberté. La solution dynamique est d'abord donnée par rapport à la métrique canonique et ensuite par rapport à la métrique générale en faisant apparaître explicitement sa dépendance de deux fonctions arbitraires.

ABSTRACT. In this last part of the paper we begin by studying the $\Theta(4)$*-invariant structure of the electromagnetic energy-momentum tensor and prove that it is compatible with a* $\Theta(4)$*-invariant as well as with a* $S\Theta(4)$*-invariant electromagnetic field. This enables us to establish the complete solutions outside a charged source. The stationary solution is given in its most general form with a discussion of the significance of its degrees of freedom. Regarding the dynamical (non stationary) solution, it is first given with respect to the canonical metric. Then we deduce from it the most general dynamical solution by exhibiting explicitly its dependence of two arbitrary functions.*

22. Tenseur impulsion-énergie électromagnétique $\Theta(4)$-invariant

Si la matière comporte des charges électriques, leur distribution et leurs mouvements engendrent un champ électromagnétique défini par un tenseur antisymétrique :

$$V = \sum V_{\alpha\beta} dx_\alpha \otimes dx_\beta \quad , \quad (V_{\alpha\beta} = -V_{\beta\alpha}) \tag{22.1}$$

La donnée d'une métrique spatio-temporelle :

$$\sum g_{\alpha\beta} dx_\alpha \otimes dx_\beta$$

permet alors d'y associer un tenseur impulsion-énergie électromagnétique :

$$\sum W_{\alpha\beta} dx_\alpha \otimes dx_\beta$$

défini par les formules :

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \sum V_{\gamma\delta} V^{\gamma\delta} - \sum V_{\alpha\delta} V_{\beta}^{\cdot\delta}\Big) \tag{22.2}$$

Supposons maintenant que la métrique donnée soit la métrique $\Theta(4)$-invariante (17.3). Alors, conformément à la proposition 15.1(d), le tenseur impulsion-énergie électromagnétique correspondant ne peut vérifier les équations de gravitation relatives à (17.3) que s'il est $\Theta(4)$-invariant. Nous devons donc prendre en considération uniquement des tenseurs électromagnétiques (22.1) pour lesquels les tenseurs impulsion-énergie correspondants sont $\Theta(4)$-invariants. Un cas particulier où il en est ainsi est celui où le tenseur (22.1) est $\Theta(4)$-invariant [5], ce qui se traduit par l'annulation du champ magnétique. Nous allons voir maintenant qu'il en est de même dans le cas plus général où le tenseur antisymétrique (22.1) est $S\Theta(4)$-invariant. Alors non seulement le champ électrique, mais aussi le champ magnétique est non nul. Vu la situation physique envisagée, il en résulte une question conceptuelle assez délicate.

Cela dit, si le tenseur antisymétrique (22.1) est $S\Theta(4)$-invariant, sa structure est définie par le corollaire 13.1.2. Pour simplifier, nous écrivons maintenant $q = q(t,\rho)$ et $q_1 = q_1(t,\rho)$ au lieu de $q_{01} = q_{01}(t,\rho)$ et $q_{33} = q_{33}(t,\rho)$, étant entendu que les fonctions $q(t,\|x\|)$ et $q_1(t,\|x\|)$ sont C^∞ par rapport aux coordonnées t, x_1, x_2, x_3, sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Alors

$$V = V_E + V_M$$

où

$$\begin{aligned} V_E =& q(t,\rho)(dt\otimes F(x) - F(x)\otimes dt) = \\ =& q(t,\rho)\sum_{i=1}^{3} x_i (dt\otimes dx_i - dx_i\otimes dt) \end{aligned}$$

est un tenseur antisymétrique $\Theta(4)$-invariant et

$$\begin{aligned}V_M =&q_1(t,\rho)N(x) = \\ &=q_1(t,\rho)(x_1(dx_2\otimes dx_3 - dx_3\otimes dx_2) + x_2(dx_3\otimes dx_1 - dx_1\otimes dx_3) \\ &\quad + x_3(dx_1\otimes dx_2 - dx_2\otimes dx_1)).\end{aligned}$$

est un tenseur antisymétrique $S\Theta(4)$-invariant pur.

D'après les idées couramment admises, V_E est le "champ électrique", défini par ses composantes covariantes :

$$V_{0i} = -V_{i0} = qx_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3), \tag{22.3}$$

et V_M est le "champ magnétique" défini aussi par ses composantes covariantes :

$$V_{23} = -V_{32} = q_1x_1\,,\ V_{31} = -V_{13} = q_1x_2\,,\ V_{12} = -V_{21} = q_1x_3 \tag{22.4}$$

Tout cela résulte de raisonnements mathématiques fondés sur les symétries évoquées, mais ne nous dit rien sur l'origine physique des champs ainsi définis. Or, ce que nous voulons présenter c'est le champ électromagnétique engendré par des charges et des courants distribués de façon appropriée dans le seul support matériel envisagé, c'est-à-dire dans la boule de matière considérée. Si tout est stationnaire, les charges ne peuvent pas engendrer un champ magnétique, de sorte que q_1 s'annule. Or, même si les charges effectuent des mouvements radiaux invariants dans leur ensemble par les opérations de $SO(3)$ ou de $O(3)$, elles ne peuvent pas non plus engendrer un champ magnétique. Dans ces conditions la fonction q_1 sera encore nulle. Par conséquent, si l'on admet la condition $q_1 \neq 0$, on est amené à postuler l'existence de charges magnétiques libres dans la matière au sens des idées de P. Curie [1] : notre boule de matière comportera non seulement une charge électrique, mais aussi une charge magnétique. Bien qu'il n'existe pas actuellement de preuves en faveur de cette hypothèse, il n'est pas raisonnable de la rejeter a priori, pourvu qu'elle n'entraîne pas de contradictions. Mais c'est bien le cas : la condition $q_1 \neq 0$ est compatible avec la $\Theta(4)$-invariance du tenseur impulsion-énergie électromagnétique en conformité avec la proposition 15.1(d). Pour établir cette compatibilité nous avons besoin des composantes contravariantes et mixtes du tenseur électromagnétique $V = V_E + V_M$ par rapport à la métrique (17.3). Les calculs sont quelque peu longs, mais leurs résultats sont simples. Par exemple, en faisant les réductions, on constate que la composante contravariante

$$V^{01} = (g^{00}g^{11} - g^{01}g^{10})V_{01} + (g^{00}g^{12} - g^{02}g^{10})V_{02} + (g^{00}g^{13} - g^{03}g^{10})V_{03}$$
$$+ (g^{02}g^{13} - g^{03}g^{12})V_{23} + (g^{03}g^{11} - g^{01}g^{13})V_{31} + (g^{01}g^{12} - g^{02}g^{11})V_{12}$$

se réduit à l'expression

$$V^{01} = -\frac{qx_1}{f^2\ell^2}$$

Nous résumons les résultats des calculs dans une proposition.

Proposition 22.1. *Les composantes contravariantes non nulles du tenseur électromagnétique $V = V_E + V_M$ sont données par les formules :*

$$V^{0i} = -V^{i0} = -\frac{qx_i}{f^2\ell^2} \quad , \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$V^{23} = -V^{32} = \frac{q_1x_1}{\ell_1^4}\, , \; V^{31} = -V^{13} = \frac{q_1x_2}{\ell_1^4}\, , \; V^{12} = -V^{21} = \frac{q_1x_3}{\ell_1^4}$$

En ce qui concerne les composantes mixtes :

$$V_\alpha^{\cdot\beta} = \sum g^{\beta\delta}V_{\alpha\delta} \quad , \quad V_{\cdot\alpha}^{\beta} = \sum g^{\beta\delta}V_{\delta\alpha} = -\sum g^{\beta\delta}V_{\alpha\delta} = -V_\alpha^{\cdot\beta} \quad ,$$

on a

$$V_0^{\cdot 0} = -V_{\cdot 0}^{0} = \frac{\rho^2 qf_1}{f\ell^2} \quad , \quad V_0^{\cdot k} = -V_{\cdot 0}^{k} = -\frac{qx_k}{\ell^2} \quad , \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$V_k^{\cdot 0} = -V_{\cdot k}^{0} = -\frac{\ell^2 - \rho^2 f_1^2}{f^2\ell^2}qx_k \quad , \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$V_k^{\cdot k} = -V_{\cdot k}^{k} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_k^2 \quad , \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$V_2^{\cdot 3} = -V_{\cdot 2}^{3} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_2x_3 - \frac{q_1x_1}{\ell_1^2} \quad , \quad V_3^{\cdot 2} = -V_{\cdot 3}^{2} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_2x_3 + \frac{q_1x_1}{\ell_1^2}\, ,$$
$$V_3^{\cdot 1} = -V_{\cdot 3}^{1} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_3x_1 - \frac{q_1x_2}{\ell_1^2} \quad , \quad V_1^{\cdot 3} = -V_{\cdot 1}^{3} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_3x_1 + \frac{q_1x_2}{\ell_1^2}\, ,$$
$$V_1^{\cdot 2} = -V_{\cdot 1}^{2} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_1x_2 - \frac{q_1x_3}{\ell_1^2} \quad , \quad V_2^{\cdot 1} = -V_{\cdot 2}^{1} = -\frac{qf_1}{f\ell^2}x_1x_2 + \frac{q_1x_3}{\ell_1^2}$$

Proposition 22.2. *Si le tenseur antisymatrique* $V = V_E + V_M$ *est* $S\Theta(4)$*-invariant, alors le tenseur impulsion-énergie électromagnétique qui lui correspond, d'après (22.2), par rapport à la métrique (17.3), est* $\Theta(4)$*-invariant, donc tel que*

$$W_{00} = E_{00} \quad , \quad W_{0i} = W_{i0} = x_i E_{01} \quad ,$$

$$W_{ii} = E_{11} + x_i^2 E_{22} \quad , \quad W_{ij} = W_{ji} = x_i x_j E_{22} \quad ,$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \ ; \ i \neq j),$$

où $E_{00}, E_{01}, E_{11}, E_{22}$ *sont des fonctions de* (t, ρ) *définies par les formules ci-après :*

$$E_{00} = \frac{1}{8\pi}\rho^2 f^2 E \quad , \quad E_{01} = \frac{1}{8\pi}\rho^2 f f_1 E \quad ,$$

$$E_{11} = \frac{1}{8\pi}\rho^2 \ell_1^2 E \quad , \quad E_{22} = \frac{1}{8\pi}(-\ell_1^2 - \ell^2 + \rho^2 f_1^2)E \quad ,$$

avec

$$E = \frac{q^2}{f^2\ell^2} + \frac{q_1^2}{\ell_1^4}$$

Démonstration. Compte tenu de la symétrie par rapport aux permutations des indices $1, 2, 3$, il suffit d'expliciter les composantes $W_{00}, W_{01}, W_{11}, W_{12}$. Or, en vertu de la proposition 22.1, on obtient

$$\sum V_{\gamma\delta}V^{\gamma\delta} = 2\rho^2\Big(-\frac{q^2}{f^2\ell^2} + \frac{q_1^2}{\ell_1^4}\Big) \quad ,$$

$$\sum V_{0\delta}V_0^{\cdot\delta} = -\frac{\rho^2 q^2}{\ell^2}, \sum V_{0\delta}V_1^{\cdot\delta} = -\frac{\rho^2 f_1 q^2}{f\ell^2}x_1 \quad ,$$

$$\sum V_{1\delta}V_2^{\cdot\delta} = \Big(\frac{\ell^2 - \rho^2 f_1^2}{f^2\ell^2}q^2 + \frac{q_1^2}{\ell_1^2}\Big)x_1 x_2 \quad ,$$

$$\sum V_{1\delta}V_1^{\cdot\delta} = \Big(\frac{\ell^2 - \rho^2 f_1^2}{f^2\ell^2}q^2 + \frac{q_1^2}{\ell_1^2}\Big)x_1^2 - \frac{\rho^2 q_1^2}{\ell_1^2} \quad ,$$

et alors l'application de (22.2) donne effectivement les expressions signalées de $W_{00}, W_{01}, W_{11}, W_{12}$.

C'est la proposition précédente qui nous autorise finalement à introduire dans les équations de gravitation relatives à (17.3) le tenseur impulsion-énergie électromagnétique associé au tenseur électromagnétique $V = V_E + V_M$ bien que celui-ci ne soit pas $\Theta(4)$-invariant lorsque $q_1 \neq 0$.

Cela dit, afin d'établir les équations de gravitation, nous avons encore besoin d'expliciter les fonctions $q = q(t, \rho)$ et $q_1 = q_1(t, \rho)$ au moyen des charges et des fonctions qui interviennent dans les composantes du tenseur métrique. Tant que l'on reste dans la matière, on doit aussi tenir compte des inductions et, de plus, compléter convenablement les équations de l'électromagnétisme à cause de la présence présumée de charges magnétiques [2]. Le problème est alors extrêmement difficile. Par contre à l'extérieur de la matière il n'existe ni charges (électriques ou magnétiques), ni courants (électriques ou magnétiques), de sorte que le problème consiste à résoudre les équations classiques de l'électromagnétisme à seconds membres nuls :

$$\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial V_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0 \tag{22.5}$$

$$\text{avec} \quad x_0 = ct \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} (0,1,2) \\ (0,2,3) \\ (0,3,1) \\ (1,2,3) \end{pmatrix}$$

$$\sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big(\sqrt{-G}\; V^{\alpha\beta}\Big) = 0 \tag{22.6}$$

$$(x_0 = ct\ ;\ \alpha = 0, 1, 2, 3)$$

Proposition 22.3. *Les fonctions q et q_1 sont définies à l'extérieur de la matière par les formules :*

$$q = \frac{\varepsilon f \ell}{\rho^3 \ell_1^2} \quad , \quad q_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho^3} \quad , \quad (\varepsilon = \mathrm{Cte}\ ,\ \varepsilon_1 = \mathrm{Cte})$$

(Ces expressions sont partout bien définies car la valeur $\rho = 0$ n'y intervient pas. En effet, nous savons que les solutions extérieures des équations de gravitation sont incompatibles avec une source ponctuelle).

Démonstration : Nous déterminons d'abord la fonction q_1. Puisque

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = \frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{x_i}{\rho} \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_i} = \frac{\partial q_1}{\partial \rho}\frac{x_i}{\rho} \quad , \quad (i = 1, 2, 3),$$

en prenant $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 2)$ et en tenant compte de (22.3) et (22.4), on voit que (22.5) se réduit à l'équation :

$$x_3 \frac{\partial q_1}{\partial x_0} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial q_1}{\partial x_0} = 0$$

de sorte que q_1 dépend uniquement de ρ , $q_1 = q_1(\rho)$.

D'autre part en prenant $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$, l'équation (22.5) s'écrit

$$\frac{\partial(q_1 x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(q_1 x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(q_1 x_3)}{\partial x_3} = 0 \quad ,$$

ce qui donne

$$3q_1 + \rho q_1' = 0$$

donc aussi

$$3\rho^2 q_1 + \rho^3 q_1' = 0 \quad \text{ou} \quad (\rho^3 q_1)' = 0.$$

Il en résulte

$$\rho^3 q_1 = \varepsilon_1 = \text{Cte} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho^3}.$$

Considérons maintenant l'équation (22.6) avec $\alpha = 1$. Etant donné que

$$G = -f^2 \ell^2 \ell_1^4 \,,\, V^{11} = 0 \,,\, V^{10} = \frac{q x_1}{f^2 \ell^2} \,,\, V^{12} = \frac{q_1 x_3}{\ell_1^4} \,,\, V^{13} = -\frac{q_1 x_2}{\ell_1^4} \quad ,$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{q\ell_1^2}{f\ell} x_1\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{q_1 f\ell}{\ell_1^2} x_3\Big) - \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{q_1 f\ell}{\ell_1^2} x_2\Big) = 0$$

et puisque

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{q_1 f\ell}{\ell_1^2} x_3\Big) = \frac{x_2 x_3}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\frac{q_1 f\ell}{\ell_1^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{q_1 f\ell}{\ell_1^2} x_2\Big) \quad ,$$

on en déduit

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{q\ell_1^2}{f\ell}\Big) = 0$$

de sorte que $\dfrac{q\ell_1^2}{f\ell}$ dépend uniquement de ρ

$$\frac{q\ell_1^2}{f\ell} = \varphi(\rho).$$

Considérons encore l'équation (22.6) avec $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{q\ell_1^2}{f\ell}x_1\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{q\ell_1^2}{f\ell}x_2\Big)+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{q\ell_1^2}{f\ell}x_3\Big)=0 \quad ,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\varphi(\rho)) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2\varphi(\rho)) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3\varphi(\rho)) = 0 \quad ,$$

donc aussi

$$3\varphi(\rho) + \rho\varphi'(\rho) = 0.$$

Il en résulte

$$3\rho^2\varphi(\rho) + \rho^3\varphi'(\rho) = 0 \quad \text{ou} \quad (\rho^3\varphi(\rho))' = 0 \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\rho^3\varphi(\rho) = \varepsilon = \text{Cte}.$$

En définitive

$$q = \frac{\varepsilon f\ell}{\rho^3\ell_1^2}.$$

Les constantes ε et ε_1 s'identifient respectivement à la charge électrique totale et à la charge magnétique totale portées par la matière.

23. Equations de gravitation à l'extérieur de la matière avec champ électromagnétique

On ne saurait présenter sous forme adéquate les équations de gravitation dans la matière. Par contre, la proposition 22.3 nous permet d'écrire de façon complète les équations de gravitation à l'extérieur de la matière chargée.

Compte tenu de la proposition (22.2), on trouve d'abord

$$E = \frac{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2}{\rho^6\ell_1^4} = \frac{\varepsilon^2+\varepsilon_1^2}{\rho^2 g^4} \quad ,$$

$$E_{00} = \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)}{8\pi}\frac{f^2}{g^4} \quad , \quad E_{01} = \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)}{8\pi}\frac{ff_1}{g^4} \quad , \quad E_{11} = \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon_1^2)}{8\pi}\frac{\ell_1^2}{g^4} \quad ,$$

$$E_{11} + \rho^2 E_{22} = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2)}{8\pi} \frac{(-\ell^2 + h^2)}{g^4}.$$

Il en résulte, en particulier, que la contribution de la charge magnétique dans les équations de gravitation ne se distingue pas nettement de celle de la charge électrique : le résultat est le même que si la source comportait uniquement une charge électrique (ou uniquement une charge magnétique) égale à $\pm\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2}$.

D'autre part, nous savons que les composantes mixtes W_α^β du tenseur impulsion-énergie électromagnétique (22.2) définissent toujours par contraction le scalaire nul :

$$\sum_{\alpha=0}^{3} W_\alpha^\alpha = 0$$

et alors les équations de gravitation entraînent

$$Q = R = -12\lambda, \quad \text{donc aussi} \quad \frac{Q}{2} + 3\lambda = -3\lambda.$$

Il suffit maintenant de tenir compte de la proposition 17.1, pour obtenir les équations de gravitation à l'extérieur de la source chargée sous une forme simple et maniable.

Proposition 23.1. *Si l'on pose*

$$\nu^2 = \frac{k}{c^4}(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2) \quad ,$$

alors les équations de gravitation à l'extérieur de la matière avec champ électromagnétique s'écrivent :

$$Q_{00} + \left(3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\right) f^2 = 0 \tag{23.1}$$

$$Q_{01} + \left(3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\right) f f_1 = 0 \tag{23.2}$$

$$Q_{11} + \left(-3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\right) \ell_1^2 = 0 \tag{23.3}$$

$$Q_{11} + \rho^2 Q_{22} + \left(3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\right)(-\ell^2 + h^2) = 0 \tag{23.4}$$

$$(h = \rho f_1 \quad , \quad g = \rho \ell_1)$$

24. Solutions stationnaires extérieures avec champ électromagnétique

Les solutions stationnaires pour lesquelles $f_1 = 0$, c'est-à-dire les solutions statiques, ont été déjà explicitées dans le cas particulier où l'on prend $\ell = 1$, c'est-à-dire dans le cas où l'on choisit la distance géodésique au centre comme paramètre fondamental [3], en supposant en outre que le champ magnétique soit nul. Du point de vue méthode, les coordonnées polaires ont été utilisées à titre auxiliaire. Cependant il se trouve que la prise en considération des solutions stationnaires en toute généralité conduit à des conclusions essentielles, et c'est pourquoi nous allons revoir l'ensemble des problèmes qui s'y rattachent. La méthode générale indiquée précédemment nous permet de développer les calculs de façon simple et élégante en restant constamment sur la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sans aucune référence aux coordonnées polaires.

Cela dit, les solutions cherchées sont les solutions des équations (23.1), (23.2), (23.3), (23.4) où l'on remplace les fonctions Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22} par leurs expressions définies dans la proposition 20.1. Or, étant donné que

$$Q_{01} = \frac{h}{\rho f} Q_{00} \quad \text{et} \quad \rho f_1 = h \quad ,$$

l'équation (23.2) s'écrit

$$\left(Q_{00} + \left(3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4} \right) f^2 \right) h = 0 \quad ,$$

de sorte que sa validité est une conséquence de (23.1). Nous n'avons donc qu'à tenir compte des trois équations (23.1), (23.3), (23.4).

Eliminons $3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}$ entre (23.1) et (23.4). Il en résulte

$$f^2(Q_{11} + \rho^2 Q_{22}) - (-\ell^2 + h^2) Q_{00} = 0$$

et en y remplaçant $Q_{11} + \rho^2 Q_{22}$ et Q_{00} par leurs expressions (cf. proposition 20.1), on obtient une équation qui ne contient pas la fonction h :

$$\frac{g''}{g'} = \frac{f'}{f} + \frac{\ell'}{\ell}$$

d'où

$$f\ell = cg' \tag{24.1}$$

D'autre part, puisque les expression de Q_{00} et Q_{11} ne contiennent pas la fonction h, en élimant $\frac{\nu^2}{g^4}$ entre (23.1) et (23.3) on trouve une équation

$$Q_{11} - \big(6\lambda + \frac{Q_{00}}{f^2}\big)\ell_1^2 = 0 \tag{24.2}$$

dans laquelle h ne figure pas non plus. Alors l'élimination de f entre (24.1) et (24.2) conduit à une équation qui se met sous la forme

$$\Big(\frac{F'}{2g'}\Big)' = -6\lambda g^2 g'$$

avec

$$F = g^2 - \frac{g^2 g'^2}{\ell^2}.$$

On en déduit

$$F = -\lambda g^4 + 2A_1 g - A_2 \quad , \quad (A_1 = \text{Cte}, A_2 = \text{Cte}),$$

ce qui donne

$$g'^2 = \ell^2\Big(1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2} + \lambda g^2\Big) \tag{24.3}$$

et implique la condition :

$$1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2} + \lambda g^2 \geq 0.$$

Comme on le sait, la constante A_1 s'obtient en tenant compte de l'approximation newtonienne, qui conduit à poser

$$A_1 = \frac{km}{c^2} = \mu.$$

Pour ce qui concerne la détermination de A_2, on remplace d'abord f'/f par $\dfrac{g''}{g'} - \dfrac{\ell'}{\ell}$ dans l'expression de Q_{11} (cf. proposition 20.1), d'où l'on tire

$$\rho^2 Q_{11} = -1 + \frac{g'^2}{\ell^2} + \frac{2gg''}{\ell^2} - \frac{2\ell' g g'}{\ell^3}. \tag{24.4}$$

Posons maintenant

$$Q(g) = 1 - \frac{2A_1}{g} + \frac{A_2}{g^2} + \lambda g^2.$$

Alors, d'après (24.3),

$$g' = \ell\sqrt{Q(g)} \quad , \quad g'' = \ell'\sqrt{Q(g)} + \ell^2\Big(\frac{A_1}{g^2} - \frac{A_2}{g^3} + \lambda g\Big) \quad ,$$

et en remplaçant ces expressions de g' et g'' dans (24.4), on obtient , après les réductions,

$$\rho^2 Q_{11} = 3\lambda g^2 - \frac{A_2}{g^2}.$$

L'équation (23.3) donne maintenant de façon directe la valeur cherchée :

$$A_2 = \nu^2$$

En conclusion, la solution stationnaire générale à l'extérieur de la matière chargée est définie par les deux équations

$$f\ell = cg' \tag{24.1}$$

$$g'^2 = \ell^2\Big(1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2\Big) \tag{24.5}$$

dont la deuxième entraîne

$$1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2 > 0 \tag{24.6}$$

(L'égalité

$$1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2 = 0$$

est exclue physiquement, car, en vertu de (24.1), elle implique la dégénérescence de la métrique).

La condition (24.6) est fondamentale :

Premièrement elle entraîne

$$\lambda \geq 0$$

c'est-à-dire qu'elle exclut les valeurs négatives de la constante cosmologique.

Deuxièmement, comme nous l'avons déjà expliqué [4], [5], elle impose une borne inférieure strictement positive à la fonction $g(\rho)$ de la solution extérieure et infirme ainsi de façon claire et simple la théorie des trous noirs.

Troisièmement elle implique l'incompatibilité des équations de gravitation avec la notion de masse ponctuelle.

Regardons de plus près les autres caractéristiques de la solution :

En premier lieu on remarque que les deux équations (24.1) et (24.5) ne suffisent pas pour la détermination des trois fonctions inconnues f, ℓ, g. Il ne s'agit donc pas d'une solution au sens classique, mais d'un système permettant d'aborder divers problèmes suivant la situation physique envisagée. Il est normal de commencer pas la comparaison avec la théorie de Newton, et cela conduit à prendre $\ell = 1$, mais ce choix ne convient pas à tous les problèmes. Ainsi, les états stationnaires qui assurent le lien avec les états dynamiques ne sont pas compatibles avec une fonction $\ell(\rho)$ se réduisant à une constante.

En deuxième lieu on constate que la fonction h ne figure pas dans la solution. Elle a été éliminée au cours des réductions successives, de sorte qu'elle reste complètement indéterminée. Cela explique d'ailleurs pourquoi la solution stationnaire (24.1), (24.5) s'identifie formellement à la solution statique qui s'obtient en prenant d'avance $h = 0$. Cependant les deux solutions sont différentes :

La solution statique à l'extérieur de la matière correspond à un choix spécifique, à savoir $h = 0$, qui n'est pas justifié a priori. Par contre la solution stationnaire à l'extérieur de la matière est compatible avec toute fonction différentiable $h = h(\rho)$ telle que $|h(\rho)| \leq \ell(\rho)$.

L'indétermination de h se répercute surtout dans la définition de la fonction de propagation de la lumière émise radialement par le bord de la matière.

Soit ρ_1 le rayon de la source, et considérons un photon émis radialement par le bord à l'intant τ. Alors sa loi de propagation entraîne

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{-h(\rho) + \ell(\rho)}{f(\rho)} \quad ,$$

d'où, en intégrant

$$\tau = t - \psi(\rho)$$

avec

$$\psi(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{-h(u) + \ell(u)}{f(u)} du$$

Pour toute valeur de $\rho \geq \rho_1$,

$$\pi(t, \rho) = t - \psi(\rho)$$

est donc l'instant d'émission d'un photon qui atteint la sphère $\|x\| = \rho$ à l'instant t. Par rapport à la métrique stationnaire, $\pi(t, \rho)$ est donc la fonction de propagation de la lumière émise radialement par le bord de la matière.

Puisque la fonction $h(\rho)$ reste indéterminée par la solution des équations de gravitation, il en sera de même de $\psi(\rho)$ et de la fonction de propagation $\pi(t, \rho)$. Or la définition physique du temps à l'extérieur de la matière s'obtient par l'intermédiaire de la fonction $\psi(\rho)$: Quelle que soit la valeur $\rho \geq \rho_1$, les horloges placées sur la sphère $\|x\| = \rho$ sont réglées de façon à indiquer le temps $\tau + \psi(\rho)$ au moment d'arrivée d'un photon (ou d'un signal) émis radialement par le bord de la source à l'instant τ, indiqué par les horloges qui y sont placées.

Par conséquent la solution stationnaire est compatible avec une infinité de définitions physiques du temps. Il s'agit là d'une conséquence importante des équations de gravitation qui nous fait sortir du carcan de la relativité restreinte et nous permet d'aborder tout ce qui concerne le concept de temps sous un jour nouveau.

Notons que la condition $|h| \leq \ell$ nous autorise à faire le choix spécifique $h = \ell$, qui entraîne $\psi(\rho) = 0$, et alors la fonction de propagation se réduit à la coordonnée temporelle. Nous savons que cette réduction est réalisable même pour les métriques non stationnaires et donne lieu à la métrique canonique qui s'avère indispensable pour l'étude des solutions dynamiques. Par conséquent, pour établir le lien entre les états stationnaires et les états dynamiques, on doit prendre en considération non pas la métrique statique, mais la métrique stationnaire canonique :

$$f^2 d\tau^2 + \frac{2f\ell}{\rho}(xdx)d\tau - \ell_1^2 dx^2 + \frac{\ell_1^2}{\rho^2}(xdx)^2 \quad ,$$

$$\big(f = f(\rho) \quad , \quad \ell = \ell(\rho) \quad , \quad \ell_1 = \ell_1(\rho)\big).$$

Cela dit, nous terminons ce paragraphe avec un commentaire concernant un point de vue qui traverse toute l'histoire de la relativité générale. D'après les relativistes, les composantes $g_{0i}, (i = 1, 2, 3)$, du tenseur métrique sont superflues et l'on peut toujours les éliminer par des transformations implicites (qui, rappelons-le, ne sont pas permises). Cela se traduit dans le cas actuel par l'annulation de h, ce qui revient à prendre en considération uniquement les métriques statiques. On se rend maintenant compte de l'absurdité de cette démarche. Les états dynamiques du champ gravitationnel seraient alors inconcevables.

25. Solutions dynamiques à l'extérieur de la matière avec champ électromagnétique

Nous considérons de nouveau la métrique générale non stationnaire (17.3) avec une légère modification de notation : on utilise des lettres majuscules pour désigner les fonctions inconnues qui y figurent afin de rendre claire la distinction entre la forme générale et la forme canonique. Ainsi, au lieu de (17.3), nous avons l'écriture

$$F^2dt^2 + 2FF_1(xdx)dt - L_1^2dx^2 + \Big(\frac{L_1^2 - L^2}{\rho^2} + F_1^2\Big)(xdx)^2 \qquad (25.1)$$

et aussi

$$H = \rho F_1 \quad , \quad G = \rho L_1$$

$$\Big(F = F(t,\rho) \quad , \quad F_1 = F_1(t,\rho) \quad , \quad L = L(t,\rho) \quad , \quad L_1 = L_1(t,\rho)\Big).$$

En vertu de la situation physique associée à la métrique (25.1), celle-ci présente dès le début un degré de liberté indépendamment de la validité ou de la non validité des équations de gravitation. En effet, nous avons déjà établi [5] que la métrique (25.1) à l'extérieur de la matière résulte d'une métrique, appelée canonique :

$$f^2d\tau^2 + \frac{2f\ell}{\rho}(xdx)d\tau - \ell_1^2dx^2 + \frac{\ell_1^2}{\rho^2}(xdx)^2 \qquad (25.2)$$

$$\big(f = f(\tau,\rho) \quad , \quad \ell = \ell(\tau,\rho) = h(\tau,\rho) \quad , \quad \ell_1 = \ell_1(\tau,\rho)\big) \ ,$$

si l'on y remplace τ par une fonction de propagation $\pi(t,\rho)$. Celle-ci satisfait à un certain nombre de conditions qui ont été précisées dans un article antérieur [6], et l'on a en particulier :

$$\frac{\partial\pi(t,\rho)}{\partial t} > 0 \quad , \quad \frac{\partial\pi(t,\rho)}{\partial\rho} \le 0 \quad ,$$

mais de tout façon $\pi(t,\rho)$ est susceptible d'une infinité de déterminations et figure en conséquence comme fonction arbiraire dans le tenseur métrique.

25a. Solution relative à la métrique canonique (25.2)

Cette solution a été déjà établie [5] en supposant que le champ électromagnétique soit $\Theta(4)$-invariant, donc réduit à un champ électrique, et que l'expression de la fonction

$$q = \frac{\varepsilon f \ell}{\rho^3 \ell_1^2}$$

ne soit pas connue d'avance. Pour ce qui concerne la méthode de calcul, les coordonnées polaires ont été utilisées à titre auxiliaire.

Si l'on suppose plus généralement que le champ électromagnétique soit $S\Theta(4)$-invariant, les équations de gravitation ne se modifient pas, seule la signification de la constante ν^2 change. Mais il s'agit là d'une conclusion qui nécessite la prise en considération des expressions des fonctions $q(t,\rho)$ et $q_1(t,\rho)$ (cf. proposition 22.3) de sorte que, du point de vue conceptuel, l'hypothèse sur la $\Theta(4)$-invariance du champ électromagnétique constitue une vraie restriction.

D'autre part, l'introduction préalable des fonctions

$$q = \frac{\varepsilon f \ell}{\rho^3 \ell_1^2} \quad , \quad q_1 = \frac{\varepsilon_1}{\rho^3}$$

dans les équations de gravitation conduit à une amélioration considérable de notre méthode. En effet, elle donne lieu à des équations simplifiées et en outre elle nous dispense des approximations asymptotiques des potentiels.

En ce qui concerne les coordonnées polaires, on s'en passe maintenant complètement, bien que leur utilisation à titre auxiliaire soit autorisée quand il s'agit de solutions à l'extérieur de la matière, c'est-à-dire quand la sous-variété $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}$ n'intervient pas dans les calculs. Cependant le retour à la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ est toujours obligatoire a posteriori, car les conditions aux limites du problème ne sont pas vérifiables par rapport aux coordonnées polaires. La supériorité de la méthode proposée maintenant est donc incontestable. Nos équations sont conçues directement par rapport à la variété $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et ne soulèvent aucun problème conceptuel.

Cela dit, compte tenu de $h = \ell$, les équations de gravitation relatives à la métrique canonique s'écrivent :

$$Q_{00} + \Big(3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\Big) f^2 = 0 \qquad (25.3)$$

$$\rho Q_{01} + \Big(3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\Big) f\ell = 0 \tag{25.4}$$

$$\rho^2 Q_{11} + \Big(-3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}\Big) g^2 = 0 \tag{25.5}$$

$$Q_{11} + \rho^2 Q_{22} = 0 \tag{25.6}$$

les fonctions $Q_{00}, Q_{01}, Q_{11}, Q_{22}$ étant définies par la proposition 21.1.

Eliminant d'abord

$$3\lambda + \frac{\nu^2}{g^4}$$

entre (25.3) et (25.4), et ensuite entre (25.4) et (25.5), on trouve respectivement les équations

$$\ell Q_{00} - \rho f Q_{01} = 0$$

et

$$\rho g^2 Q_{01} - \rho^2 f\ell Q_{11} + 6\lambda f\ell g^2 = 0.$$

D'autre part, en vertu de l'expression de $Q_{11} + \rho^2 Q_{22}$ (cf. proposition 21.1), l'équation (25.6) s'intègre sous la forme :

$$f\ell = c\frac{\partial g}{\partial \rho}$$

En fait, l'intégration donne, au lieu de la constante c, une fonction du temps, mais, pour des raisons physiques déjà expliquées [5], celle-ci doit se réduire à c.

La suite des calculs est comme dans l'article [5] avec quelques modifications évidentes, et l'on trouve en définitive

$$f\ell = c\frac{\partial g}{\partial \rho} \tag{25.7}$$

$$\ell^2\Big(\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g)\Big) = \Big(\frac{\partial g}{\partial \rho}\Big)^2 \tag{25.8}$$

avec

$$Q(g) = 1 - \frac{2\mu}{g} + \frac{\nu^2}{g^2} + \lambda g^2$$

L'équation (25.8) entraîne

$$\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g) \geq 0$$

mais l'égalité est exclue physiquement, car elle implique $\frac{\partial g}{\partial \rho} = 0$, donc aussi, d'après (25.7), ou bien $f = 0$ ou bien $\ell = 0$, ce qui entraîne la dégénérescence de la métrique. Par conséquent

$$\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g) > 0 \tag{25.9}$$

Une étude circonstanciée de cette condition montre alors que la fonction $g(t, \rho)$ de la solution obtenue est minorée par les mêmes valeurs strictement positives que la fonction $g(\rho)$ de la solution stationnaire extérieure, de sorte que le rayon de la sphère limitant la matière ne peut jamais s'annuler. La source du champ gravitationnel est nécessairement une distribution étendue de matière. De plus la solution ne présente pas d'"horizon" et, en conséquence, ne donne pas droit de cité à l'idée de trou noir dans la relativité.

Notons encore que les relations (25.7) et (25.8) définissent une solution à un degré de liberté. Cela se traduit par la possibilité de définir f et ℓ en fonction de g. En effet, à toute fonction $g = g(t, \rho)$ satisfaisant à la condition (25.9) et aux conditions aux limites du problème, (25.7) et (25.8) font correspondre des fonctions f et ℓ bien définies

$$f = c\sqrt{\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g)} \quad , \; h = \ell = \frac{\frac{\partial g}{\partial \rho}}{\sqrt{\frac{2}{c}\frac{\partial g}{\partial t} + Q(g)}}$$

On peut aussi envisager la détermination de f et g en supposant donnée la fonction $\ell = \ell(t, \rho)$. Mais alors on doit d'abord résoudre l'équation aux dérivées partielles (25.8), de sorte que cette démarche est valable exclusivement lorsque $\ell = \ell(t, \rho)$ donne lieu à des solutions globales de (25.8) satisfaisant aux conditions du problème. Actuellement nous connaissons uniquement un cas où il en est ainsi. C'est le cas du champ stationnaire. Alors on est autorisé à choisir $\ell = 1$, ce qui conduit à déterminer $g(\rho)$ par l'équation :

$$\left(g'(\rho)\right)^2 = 1 - \frac{2\mu}{g(\rho)}$$

25b. Solution générale relative à (25.1)

Comme nous l'avons déjà signalé, la notion d'unicité de solution n'a pas de sens précis chez les relativistes. Dans le cas actuel où l'on a affaire aux solutions des équations de gravitation relatives à la métrique spatio-temporelle $\Theta(4)$-invariante, l'unicité de solution ne peut être conçue que dans le sens de généralité maximale. C'est la solution générale avec toutes les constantes arbitraires et toutes les fonctions arbitraires qui est unique dans le sens que toute autre solution en résulte au moyen de conditions spécifiques suivant le problème envisagé.

Cela dit, puisque (25.2) donne lieu à une solution présentant un degré de liberté et que (25.1) résulte de (25.2) si l'on y remplace τ par une fonction de propagation $\pi(t,\rho)$, la solution générale relative à (25.1) présente deux degrés de liberté correspondant aux "fonctions arbitraires" $\pi(t,\rho)$ et $G(t,\rho)$.

Proposition 25.1. *La solution générale des équations de gravitation relatives à la métrique (25.1) à l'extérieur de la matière avec champ électromagnétique est donnée par trois relations qui définissent* F, H, L *en fonction de* $\pi = \pi(t,\rho)$ *et* $G = G(t,\rho)$ *:*

$$F = c\left[\Big(\frac{2}{c}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial t}Q(G)\Big)\frac{\partial \pi}{\partial t}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{25.10}$$

$$L = \frac{\partial(\pi, G)}{\partial(t,\rho)}\left[\Big(\frac{2}{c}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial t}Q(G)\Big)\frac{\partial \pi}{\partial t}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{25.11}$$

$$H = \frac{\dfrac{\partial \pi}{\partial t}\dfrac{\partial G}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \pi}{\partial \rho}\dfrac{\partial G}{\partial t} + c\dfrac{\partial \pi}{\partial t}\dfrac{\partial \pi}{\partial \rho}Q(G)}{\left[\Big(\dfrac{2}{c}\dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial \pi}{\partial t}Q(G)\Big)\dfrac{\partial \pi}{\partial t}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{25.12}$$

avec

$$Q(G) = 1 - \frac{2\mu}{G} + \frac{\nu^2}{G^2} + \lambda G^2 \quad ,$$

$$\frac{2}{c}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial t}Q(G) > 0 \quad , \quad \frac{\partial(\pi, G)}{\partial(t,\rho)} > 0 \quad ,$$

en notant

$$\frac{\partial(\pi, G)}{\partial(t,\rho)}$$

le déterminant jacobien de π et G.

Démonstration. Puisque (25.1) s'identifie à la métrique qui s'obtient en remplaçant, dans (25.2), τ par $\pi(t,\rho)$, on a d'abord

$$F(t,\rho) = f(\pi(t,\rho),\rho)\frac{\partial\pi(t,\rho)}{\partial t} \quad ,$$

$$H(t,\rho) = f(\pi(t,\rho),\rho)\frac{\partial\pi(t,\rho)}{\partial\rho} + \ell(\pi(t,\rho),\rho) \quad ,$$

$$L(t,\rho) = \ell(\pi(t,\rho),\rho) \quad , \quad G(t,\rho) = g(\pi(t,\rho),\rho).$$

Il en résulte

$$f = \Big(\frac{\partial\pi}{\partial t}\Big)^{-1} F \quad ,$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial\tau}\frac{\partial\pi}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial\rho} = \frac{\partial g}{\partial\tau}\frac{\partial\pi}{\partial\rho} + \frac{\partial g}{\partial\rho} \quad ,$$

de sorte que

$$\frac{\partial g}{\partial\tau} = \Big(\frac{\partial\pi}{\partial t}\Big)^{-1}\frac{\partial G}{\partial t} \quad ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial\rho} = \frac{\partial G}{\partial\rho} - \Big(\frac{\partial\pi}{\partial t}\Big)^{-1}\frac{\partial\pi}{\partial\rho}\frac{\partial G}{\partial t} = \Big(\frac{\partial\pi}{\partial t}\Big)^{-1}\frac{\partial(\pi,G)}{\partial(t,\rho)} \quad ,$$

d'où, en particulier,

$$\frac{\partial(\pi,G)}{\partial(t,\rho)} > 0.$$

En remplaçant les expressions précédentes de f, $\frac{\partial g}{\partial\tau}$, $\frac{\partial g}{\partial\rho}$ dans la solution (25.7), (25.8), on trouve le système

$$FL = c\frac{\partial(\pi,G)}{\partial(t,\rho)}$$

$$L^2\Big(\frac{2}{c}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial t}Q(G)\Big)\frac{\partial\pi}{\partial t} = \Big(\frac{\partial(\pi,G)}{\partial(t,\rho)}\Big)^2$$

d'où l'on tire (25.10) et (25.11). Finalement, en tenant compte de l'expression de $H(t,\rho)$ donnée précédemment, on obtient

$$H = \Big(\frac{\partial\pi}{\partial t}\Big)^{-1}\frac{\partial\pi}{\partial\rho}F + L \quad ,$$

d'où, compte tenu de (25.10) et (25.11), la relation (25.12).

L'application de la proposition précédente aux problèmes gravitationnels nécessite la prise en considération des propriétés de la fonction de propagation $\pi(t, \rho)$ et, en particulier, de son comportement asymptotique [6]. De plus, il faut tenir compte de la modification subie par la fonction de propagation lors du passage d'un état dynamique à un état stationnaire et vice versa. D'après la proposition 5.4 de [6], durant un état stationnaire, la fonction de propagation se réduit à la forme

$$t - \psi(\rho)$$

avec $\psi'(\rho) \geq 0$ partout et $\psi'(\rho) \leq \frac{2}{c}$ à partir d'une certaine valeur de ρ. Bien entendu, dans ce cas, la métrique canonique correspondante est aussi stationnaire et l'on a

$$F = F(\rho) = f(\rho) \quad , \quad L = L(\rho) = \ell(\rho) \quad , \quad G = G(\rho) = g(\rho) \quad ,$$

$$H = H(\rho) = h(\rho) = f(\rho)\frac{\partial \pi(t, \rho)}{\partial \rho} + \ell(\rho) = -\psi'(\rho)f(\rho) + \ell(\rho)$$

avec

$$f(\rho) = c\sqrt{Q(g(\rho))} \quad , \quad \ell(\rho) = \frac{g'(\rho)}{\sqrt{Q(g(\rho))}} \quad ,$$

de sorte que l'on peut, en particulier, définir la dérivée $\psi'(\rho)$, donc aussi la fonction $\psi(\rho)$, au moyen de $h(\rho)$ et $g(\rho)$:

$$\psi'(\rho) = \frac{-h(\rho) + \ell(\rho)}{f(\rho)} \quad , \quad \psi(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{-h(u) + \ell(u)}{f(u)} du \quad ,$$

conformément d'ailleurs à la définition directe déjà vue de la fonction de propagation dans un état stationnaire. Par conséquent nous pouvons alors substituer à la "fonction arbitraire $\pi(t, \rho)$" la "fonction arbitraire $h(\rho)$" qui reste indéterminée par la solution stationnaire. Or, dans le cas général de la solution non stationnaire, la relation (25.12) ne nous permet pas de définir, du moins globalement, $\pi(t, \rho)$ en fonction de H et G.

Références

[1] P. Curie, Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre, Journal de Physique, 3e série, t III, 1984, p. 415.

[2] G. Lochak, Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$, (1ère partie), Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 8, n° 4, 1983, pp. 345-370.

[3] N. Stavroulakis, Paramètres cachés dans les potentiels des champs statiques, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 6, n° 4, 1981, pp. 287-327.

[4] N. Stavroulakis, Mathématiques et trous noirs, Gazette des mathématiciens, n° 31, pp. 119-132, Juillet 1986.

[5] N. Stavroulakis, Solitons et propagation d'actions suivant la relativité générale, deuxième partie, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 13, n° 1, 1988, pp. 7-42.

[6] N. Stavroulakis, Sur la fonction de propagation des ébranlements gravitationnels, Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 20, n° 1, 1995, pp. 1-31.

Épilogue

Puisque l'article est présenté en quatre parties, il convient d'en faire un résumé général.

Le titre de l'article ne se réfère pas à la totalité de son contenu. Il est destiné à signaler l'existence de transgressions de principes mathématiques dans les solutions classiques, en exhibant une de leurs conséquences, peut-être la plus extravagante, à savoir celle de l'idée de trou noir. Mais en fait l'article entreprend une investigation à fond de toutes les méprises relatives aux fondements de la théorie, en mettant en évidence une succession d'erreurs mathématiques qui se sont constituées en un système dogmatique empêchant toute critique et tout renouvellement.

L'article présente ensuite une nouvelle façon d'aborder les problèmes en respectant scrupuleusement les principes mathématiques. En particulier, il met en évidence le rôle des groupes $S\Theta(4)$ et $\Theta(4)$ non seulement pour la formulation des notions qui y interviennent, mais aussi pour l'établissement et la solution des équations de gravitation. Finalement il donne en toute généralité et avec champ électromagnétique les solutions stationnaires et dynamiques à l'extérieur de la matière.

(Manuscrit reçu le 17 avril 2000)