Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 26, n° spécial, 2001

Une histoire qu'on cherche à écrire : la relativité générale en termes d'équations du premier ordre

SILVIO BERGIA[1] ET MARIO DI GIOVANNI[2]

[1]Dipartimento di Fisica, Università di Bologna
[2]Scuola Superiore di studi in Fondamenti e Filosofia della Fisica, Università di Bologna, sede di Cesena

1 Introduction.

Les équations du champ gravitationnel d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = k_g T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

(où $k_g = \frac{8\pi G}{c^4}$) ont une structure semblable à celle des équations décrivant l'évolution des composantes du potentiel électromagnétique (que nous écrivons ici dans la jauge de Lorentz):

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu = k_e j^\mu \tag{2}$$

(où $k_e = \frac{4\pi}{c}$). Les équations (1) sont en effet des équations à dérivées partielles du second ordre pour les composantes $g_{\mu\nu}$ du potentiel gravitationnel.

Pourtant, dans le cas de l'électromagnétisme, les équations du second ordre sont accompagnées des équations du premier ordre de Maxwell. Dans le cas gravitationnel, au contraire, les textes se limitent généralement à présenter la théorie en termes des équations (1) et on ne saurait pas immédiatement dire où se cachent les équations du premier ordre qui devraient jouer un rôle équivalent à celui des équations de Maxwell.

Il s'avère que dans la littérature récente on trouve presque tout ce qu'il faut savoir à ce sujet du point de vue du contenu physique[1]. Ce qu'on n'y trouve pas c'est, d'un côté, un exposé organique de la matière, de l'autre côté, une reconstruction de l'histoire détaillée de ce chapitre de la théorie relativiste de la gravitation. Le premier but a été atteint dans une thèse présentée pour l'obtention d'une "laurea in fisica" à l'Université de Bologne[2]. Dans ce travail on a aussi mentionné l'exiguïté du matériel trouvé dans le domaine historique.

Le premier auteur de cet article présenta l'exposé de la matière qui avait été l'objet de la thèse de Savini à l'occasion d'un séminaire donné à l'Université de Paris VI. Dans cette occasion il put se rendre compte qu'elle était bien connue.

Dans une thèse successive[3] on a essayé de discerner quelques étapes significatives de cette histoire. Il faut dire que la tâche ne paraît pas tout à fait facile. C'est un de ces cas où on dirait que la tradition transmise par les textes paraît vouloir délibérément détourner celui qui se soit proposé d'obtenir cette reconstruction. Ici on présentera le résultat, en vérité très partiel, de l'effort fait en cette direction. C'est grâce aux informations obtenues par les collègues parisiens à l'occasion du séminaire qu'on vient de mentionner qu'on a pu atteindre ce résultat.

Cet article a un double but: d'un côté, évidemment, celui de donner des renseignements, même si pas tout à fait complets, sur ce chapitre de l'histoire de la physique; de l'autre côté – et la chose, nous croyons, peut être instructive – celui de donner un exemple significatif de comment la tradition des textes est souvent adversaire de la vérité historique.

La structure de l'article est la suivante. Dans le premier chapitre, en trois paragraphes, on donne une reconstruction sommaire du rangement formel, faisant complètement abstraction du développement historique. Dans le premier paragraphe du second chapitre on donnera d'abord une liste des articles récents (postérieurs à 1973) traitant des aspects du thème. Ensuite on présentera le problème historiographique, car on montre, d'un côté, que cette littérature est pauvre d'indications sur ses sources mêmes, de l'autre côté, que les renvois qu'on y trouve sont souvent fourvoyant. Enfin, dans le dernier paragraphe, on reconstruit quelques étapes parmi les premières du long chemin de ce chapitre de la physique.

---

[1] Voir, par example, Hawking-Ellis (1973), Carmeli (1982).
[2] Savini (1997).
[3] Di Giovanni (2000).

2 Rangement formel.

2.1 Transcription formelle.

On cherche donc l'équivalent des équations de Maxwell

$$F^{\nu\mu}{}_{,\nu} = k_e j^{\mu} \tag{3}$$

$$^{*}F^{\nu\mu}{}_{,\nu} = 0, \tag{4}$$

où $^{*}F^{\nu\mu}$ y indique le dual du tenseur de Maxwell[4]. Nous allons commencer par un exercice formel. Partons des identités de Bianchi (ici et ensuite, […] signifie anti-symétrisation),

$$R_{\alpha\beta[\gamma\delta,\lambda]} = 0\,. \tag{5}$$

On vérifie que ces équations peuvent s'écrire

$$R^{\alpha\beta\gamma\lambda}{}_{,\lambda} = -R^{\gamma\beta,\alpha} + R^{\gamma\alpha,\beta}\,. \tag{6}$$

On peut considérer les équations (6) comme des équations de champ pour le tenseur de Riemann où les termes au deuxième membre jouent formellement le rôle de sources. On peut rendre moins formelle cette identification tout en considérant les équations de champ (1) dans la forme équivalente

$$R_{\alpha\beta} = k_g (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T)\,. \tag{7}$$

En utilisant (7) on peut écrire (6) sous la forme

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = 2k_g J^{\alpha\beta\gamma}\,, \tag{8}$$

[4] Voir, par example, Schutz (1980).

où $$J^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T^{\gamma\alpha,\beta} - \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}T^{,\beta} - T^{\gamma\beta,\gamma} + \frac{1}{2}g^{\gamma\beta}T^{,\alpha}) . \tag{9}$$

Ensuite, on démontre que les identités de Bianchi (5) peuvent s'écrire sous la forme

$$^*R^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = 0 , \tag{10}$$

où $^*R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le biadjoint (double dual) du tenseur de Riemann ($^*R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4g}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\gamma\delta\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$; g est le déterminant de la métrique). On a ainsi formellement réussi, en termes des équations (8) et (10), à écrire des équations pour le champ gravitationnel dans une forme qui rappelle celle des équations de Maxwell (3) et (4).

Plusieurs questions se posent quand-même à présent:

1) Qu'est ce qui se passe avec les équations de champ (1): sont-elles comprises dans les nouvelles équations? On tendrait tout d'abord à répondre négativement, en considérant qu'il ne s'agit pas d'équations différentielles liant le tenseur qui, comme il a été confirmé, décrit le champ, c'est à dire le tenseur de Riemann, à ses sources, mais plutôt d'équations algébriques; et, en ce cas, quel est le rôle respectif des nouvelles équations et des vieilles?
2) Quel est le sens physique de sources décrites par un tenseur du troisième ordre, et, en plus, ne dépendant pas des sources traditionnelles, c'est à dire des composantes du tenseur qui décrit la densité de l'énergie et de l'impulsion, mais plutôt de ses dérivées?

On cherchera à donner des réponses à ces questions dans la suite. Un point de départ pour la discussion de la première question se trouve dans la considération que dans la formulation einsteinienne de la relativité générale [Éq. (1)] on n'utilise qu'une partie du tenseur de Riemann, à savoir le tenseur de Ricci. Donc, en particulier, on ne fait aucun usage du tenseur de Weyl, la partie à trace nulle du tenseur de Riemann. Si on pouvait prouver qu'en effet les équations (8) peuvent s'exprimer en termes du seul tenseur de Weyl, on parviendrait à la conclusion que la nouvelle formulation et la vieille ne se superposent pas, mais plutôt qu'elles s'ajoutent l'une à l'autre pour donner une formulation complète de la théorie. Ces considérations ont été formulées, par exemple par Lanczos[5], qui a observé que dans la formulation traditionnelle on perd quelque chose de la richesse du tenseur de Riemann, qui donne l'expression la plus complète du champ gravitationnel. À cela on peut ajouter qu'on aimerait bien que les champs de la théorie complète puissent dériver d'un potentiel. Or, le tenseur fondamental de la théorie est un tenseur du quatrième ordre. Dans la logique qu'on poursuit ici, les véritables composantes du potentiel de la théorie ne peuvent pas être celles du tenseur métrique, mais plutôt celles d'un tenseur du troisième ordre. Or, on trouve que le tenseur de Riemann n'admet pas en général de potentiel en ce sens, lorsque que, comme Lanczos a prouvé, on trouve un potentiel pour le tenseur de Weyl. En résumé: on trouvera qu'on peut formuler une théorie où la richesse du tenseur de Riemann est complètement exploitée, dans laquelle des équations différentielles du premier ordre pour le tenseur de Weyl s'ajoutent aux équations traditionnelles d'Einstein. Ensuite, on discutera le sens physique des équations du premier ordre et, en particulier, du tenseur de Weyl.

2.2 Le tenseur de Weyl et ses propriétés.

On prouve immédiatement que le tenseur

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \tag{11}$$

est de trace nulle. Par conséquent on l'appellera dans la suite le tenseur de Ricci à trace nulle. Ce tenseur et le scalaire de courbure R sont deux objets irréductibles sur lesquels on peut décomposer le tenseur de Riemann. Le dernier tenseur irréductible qu'on dérive du tenseur de Riemann, après $S_{\mu\nu}$ et R, est le tenseur de Weyl, défini comme:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} - g\beta\right) -$$

$$- \frac{1}{6}\left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}\right) R, \tag{12}$$

ou, en termes du tenseur de Ricci à trace nulle:

[5] Lanczos (1962).

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}S_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}S_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}S_{\alpha\gamma}) -$$

$$-\frac{1}{12}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})R, \tag{13}$$

On peut voir (13) comme la décomposition du tenseur de Riemann en ses composants irréductibles, qu'on peut indiquer formellement comme

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = W_{\alpha\beta\gamma\delta} \oplus S_{\eta\beta} \oplus R. \tag{14}$$

Le tenseur de Riemann, comme il est bien connu, a 20 composantes indépendantes; le tenseur de Ricci, pour sa propriété de symétrie, en a 10; le tenseur $S_{\mu\nu}$, puisqu'il doit satisfaire à la condition de trace, en a 9. On peut démontrer que, en effet, le tenseur de Weyl a 10 composantes indépendantes. Les informations contenues dans le tenseur de Riemann se distribuent parmi ses parties irréductibles. De ce point de vue, il est important de souligner que les équations einsteiniennes du champ peuvent s'exprimer en termes des tenseurs irréductibles $S_{\mu\nu}$ et R, dans la forme:

$$S_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R = k_g T_{\mu\nu} \tag{15}$$

On prouve que la définition donnée du tenseur de Weyl et du tenseur de Ricci à trace nulle ne sont valables que sur des variétés 4-dimensionnelles. En particulier, pour $n < 4$, $W_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. On prouve aussi que le tenseur de Weyl a les mêmes propriétés que le tenseur de Riemann:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = -W_{\alpha\beta\delta\gamma} = -W_{\beta\alpha\gamma\delta}$$

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = W_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{16}$$

$$W_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$$

La propriété ultérieure qui caractérise le tenseur de Weyl est son irréductibilité, c'est à dire:

$$W^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\beta} = 0$$

$$W_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta\sigma} = 0 \tag{17}$$

C'est grâce aux conditions (16) et (17) qu'on établit que le tenseur de Weyl a 10 composantes indépendantes. On peut considérer le tenseur de Weyl comme la partie du tenseur de courbure dont chaque possible contraction est nulle. Par conséquent, les 10 composantes du tenseur de Riemann qui ne sont pas "saturées" par les équations d'Einstein sont précisément les 10 composantes indépendantes du tenseur de Weyl. L'étude de ce dernier coïncide donc avec l'étude des composantes de la courbure qui ne sont pas déterminées algébriquement par les équations d'Einstein.

En plus des propriétés algébriques qu'on a rappelées, le tenseur de Weyl possède, dans le cas quadri-dimensionnel, une importante propriété différentielle, celle qu'on dérive aisément des identités de Bianchi [5] :

$$W^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta,\alpha} = R_{\beta[\delta,\gamma]} + \frac{1}{6} g_{\beta[\gamma} R_{,\delta]} \tag{18}$$

2.3 Equations de champ pour le tenseur de Weyl.

On dispose maintenant de tous les instruments nécessaires pour exprimer le lien entre le tenseur de Weyl et ses sources. De (1) et (18) on obtient :

$$W^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = k_g \left(T^{\gamma[\alpha,\beta]} - \frac{1}{3} g^{\gamma[\alpha} T^{,\beta]} \right) \tag{19}$$

Faisant usage de l'identité

$$J^{\alpha\beta\gamma} \equiv T^{\gamma[\alpha,\beta]} - \frac{1}{3} g^{\gamma[\alpha} T^{,\beta]}, \tag{9'}$$

qu'on dérive de (9), on obtient :

$$W^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{,\delta} = k_g J^{\alpha\beta\gamma}. \tag{20}$$

Puisqu'on a trouvé que les équations (8) peuvent s'exprimer en termes du seul tenseur de Weyl, on est parvenu à la conclusion, comme on avait anticipé, que la nouvelle formulation et la vieille ne se superposent pas, mais au contraire qu'elles s'ajoutent l'une à l'autre pour donner une formulation complète de la théorie. En résumé : les équations d'Einstein (1) ou (15) saturent 10 composantes du tenseur de Riemann ; les 10 composantes restantes sont données par les 10 composantes indépendantes du tenseur de Weyl qui ne sont pas liées algébriquement aux sources. Le tenseur de Weyl est ainsi la partie de la courbure qui n'est pas déterminée localement par la distribution de matière dans d'autres points. C'est pour cela qu'on dit que le tenseur de Weyl décrit le champ gravitationnel libre.

2.4. Le potentiel de Lanczos.

L'introduction d'un potentiel pour le champ de Weyl est attribuée à Lanczos[6]. Néanmoins, c'est seulement après vingt ans que Bampi et Caviglia[7] ont démontré l'existence d'une fonction potentielle pour le tenseur de Weyl dans un espace-temps arbitraire. En plus, la démonstration entraîne la conclusion que le tenseur de Riemann ne peut pas être déterminé en général par un potentiel.

Le lien entre le tenseur de Weyl et celui de Lanczos est le suivant :

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = H_{\alpha\beta\gamma,\delta} - H_{\alpha\beta\delta,\gamma} + H_{\gamma\delta\alpha,\beta} - H_{\gamma\delta\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\{g_{\alpha\gamma}\left(H_{\beta\delta} + H_{\delta\beta}\right) -$$

$$- g_{\alpha\delta}\left(H_{\beta\gamma} + H_{\gamma\beta}\right) + g_{\beta\delta}\left(H_{\gamma\alpha} + H_{\alpha\gamma}\right) - g_{\beta\gamma}\left(H_{\alpha\delta} + H_{\gamma\alpha}\right) +$$

---

[6] Lanczos, *ibidem*.
[7] Bampi et Caviglia (1983).

$$+\frac{2}{3}H^{\sigma\rho}{}_{\sigma,\rho}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right) \tag{21}$$

où

$$H_{\mu\nu}\equiv H^{\sigma}{}_{\mu\nu,\sigma}-H^{\sigma}{}_{\mu\nu,\sigma}. \tag{22}$$

La formule (21) est une équation différentielle du premier ordre pour $H_{\alpha\beta\gamma}$. Le sens du théorème de Bampi et Caviglia est qu'elle admet toujours une solution et permet d'écrire le tenseur de Weyl en termes des premières dérivées du tenseur $H_{\alpha\beta\gamma}$. Udeschini[8] avait trouvé qu'on pouvait exprimer différentiellement le tenseur de Riemann en termes d'un tenseur du troisième ordre : néanmoins Bampi et Caviglia ont prouvé qu'en général l'équation différentielle n'était pas intégrable.

3 Histoire.

3.1. Les équations du premier ordre dans quelques articles récents et le problème historiographique.

Nous sommes à même de donner une première liste d'articles ou textes postérieurs à 1973 traitant des aspects du thème. Dans le premier chapitre on a fait référence, en ordre chronologique, aux traités de Hawking-Ellis et de Carmeli et à l'article de Bampi et Caviglia. On peut y ajouter une série d'articles publiés entre 1980 et 1995[9]. C'est dans ces travaux qu'on a trouvé presque tout ce qu'il fallait pour formuler la reconstruction qu'on a donnée dans le chapitre précédent, avec en plus plusieurs développements dont on n'a pas fait mention ici.

C'est en lisant ces contributions qu'on se rend compte qu'il y a ici un problème historiographique. En fait, on verra, d'un côté, que cette littérature est pauvre d'indications sur ses sources mêmes, de l'autre côté, que les renvois qu'on y trouve sont souvent fallacieux.

Dans l'article écrit par Roberts en 1995 on souligne, en effet, que, à côté de la formulation traditionnelle de la relativité générale, il existe une formu-

---

[8] Udeschini (1977).
[9] Novello et Duarte de Oliveira (1980), Novello et Velloso (1987), Edgard (1987), Roberts (1988 et 1995)), Hammon & Norris (1992).

lation alternative des équations du champ, dite de Jordan, dans laquelle elles sont écrites sous forme d'équations différentielles du premier ordre pour le tenseur de Weyl. A ce sujet, on renvoie au livre de Hawking-Ellis. Or, il s'avère que dans ce livre on peut trouver les équations du champ dans la forme donnée ci-dessus. Hawking et Ellis font aussi remarquer qu'on peut écrire les identités de Bianchi sous la forme de l'équation (18). Par surcroît, ils soulignent que les identités de Bianchi écrites dans cette forme sont très semblables aux équations de Maxwell, de façon qu'on peut les voir comme équations de champ pour le tenseur de Weyl. Ils ajoutent même que ce dernier est la partie de la courbure en un point qui dépend de la distribution de la matière ailleurs. On peut dire, par conséquent, que dans ce livre on trouve l'essentiel sur la matière du point de vue du contenu physique. À ce moment là il fallait vérifier le second message de Roberts, c'est à dire l'attribution à Jordan de cette formulation. On a par conséquent cherché chez Jordan, en particulier là où l'article de Roberts nous renvoyait, c'est à dire dans son livre *Schwerkraft und Weltall*[10], mais on n'y a pas trouvé la moindre référence à la formulation qu'on lui attribue. Hawking et Ellis renvoient à une série d'articles[11] où on utilise cette formulation pour analyser le comportement de la radiation gravitationnelle (pour des considérations analogues voir, plus récemment, Bonnor[12]). Dans son article Hawking ne parle pas d'une formulation de Jordan, mais, de toute façon, il renvoie à un article écrit par Jordan en collaboration avec Ehlers et Kundt[13], où en effet on trouve des éléments qui ont à faire avec le sujet. Dans le premier chapitre de l'article on introduit la notion de bivecteur, ou tenseur réel anti-symétrique du deuxième ordre. Ensuite, on y considère les applications linéaires d'un espace de bivecteurs en soi, qui sont générés par tenseurs $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Parmi les applications de ce type figurent celles engendrés par le tenseur de Riemann lui-même. Les auteurs considèrent ensuite la décomposition usuelle du tenseur de Riemann dans ses parties irréductibles. À cette décomposition correspond l'analogue pour le tenseur de Weyl. Le tenseur de Weyl détermine une application linéaire dualement symétrique de l'espace des bivecteurs en lui-même. On peut toujours mettre la matrice représentative d'un tenseur de Weyl en forme normale avec un choix de base. Les auteurs montrent que seulement 4 formes normales de Jordan sont possibles pour la matrice. Cela permet une classification des ten-

---

[10] Jordan (1952).
[11] Newman et Penrose (1962), Newman et Unti (1962), Hawking (1966).
[12] Bonnor (1995).
[13] Jordan *et al*. (1960).

seurs de Weyl, qui repropose la classification déjà formulée par Petrov. Et voilà tout.

Puisqu'il paraît que, suivant l'indication de Roberts, on s'est trouvé dans un cul-de-sac, il faut chercher un parcours alternatif. C'est là que les indications reçues par les collègues parisiens paraissent donner le matériel pour obtenir une version plus proche de la vérité sur ce chapitre de l'histoire de la physique.

3.2 Les travaux de Bel.

Voyons donc en résumé ce qu'on peut trouver dans une série de travaux publiés par Bel entre 1959 et 1962. Dans un premier article[14], Bel souligna que le mieux qu'on puisse faire pour aborder le problème de la radiation gravitationnelle c'est d'essayer de trouver des analogies entre ce problème et celui bien connu de la radiation électromagnétique. À ce propos il suit une terminologie de Lichnerowicz appelant double 2-forme tout tenseur du quatrième ordre possédant les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann. Ce sont ces propriétés qui font du tenseur de Riemann l'extension naturelle de la 2-forme de Maxwell décrivant le champ électromagnétique. Il faut remarquer que cette terminologie et l'exploitation de l'analogie sont poursuivies de nos jours[15]. Le départ est donc le point de vue, exprimé par Lichnerowicz et Pirani, que ça devrait être le tenseur de courbure, plutôt que le tenseur métrique, l'élément géométrique adéquat à la description des phénomènes de radiation gravitationnelle. Dans le second article de la série Bel[16] suppose qu'on est dans le vide; par conséquent on a $R_{\alpha\beta} = 0$. On y écrit les identités de Bianchi dans la forme (9), et on introduit le tenseur

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(R^{\alpha\rho\lambda\sigma} R^{\beta}{}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} + {*R^{\alpha\rho\lambda\sigma}} * R^{\beta}{}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma}\right),$$

qui possèderait les propriétés de symétrie

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu} = T^{\beta\alpha\lambda\mu} = T^{\alpha\beta\mu\lambda} = T^{\lambda\mu\alpha\beta}$$

par des équations du vide avec constante cosmologique, et devient complètement symétrique dès que $\lambda = 0$. Ensuite on montre que (bien entendu dans le vide) T est conservatif. Les équations du champ gravitationnel dans le

[14] Bel (1959a).
[15] Misner et al. (1973).
[16] Bel (1959b).

vide se réduisent à l'identité de Bianchi et à l'équation exprimant la conservation de T. Nulle part on ne fait mention du tenseur de Weyl. Bel souligne que T joue pour le champ de gravitation le même rôle que le tenseur de Maxwell pour le champ électromagnétique. Bel retourna sur le problème dans sa thèse de doctorat[17] en 1961. Cette foi-ci les équations de vide sont écrites en forme de l'identité de Bianchi et de l'équation

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = J_{\lambda\mu\beta} \, ,$$

c'est à dire l'équation (20) ci-dessus. On peut dire qu'à cet étage Bel était parvenu à la formulation qui nous a intéressés ici. Des considérations du même type sont développées dans un article de 1962[18]. Il paraît que depuis ce moment l'argument devient d'actualité: quatre ans séparent ce dernier article de celui de Hawking, qui a signé le démarrage des plus récents développements.

Bibliographie

Bampi F. et Caviglia G. (1983), Gen. Rel. Grav., **15**, 375.

Bel L. (1959a), *La radiation gravitationnelle*, Séminaire de mécanique analytique et de mécanique céleste, Faculté des Sciences de Paris, année 1958/59, 16 mai 1959.

Bel L. (1959b), *La radiation gravitationnelle*, Royaumont conférence CNRS.

Bel L., *La radiation gravitationnelle*, thèse présenté a la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1960.

Bel L., *Les états de radiation et le problème de l'énergie en relativité général*, Cahier de Physique, **138**, 1962, 59.

Bonnor W.B. (1995), *Class. Quant. Grav*., **12**, 499.

Carmeli M. (1982), *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theories*, John Wiley & Sons.

Di Giovanni M., "Aspetti della formulazione della relatività generale in termini di equazioni del primo ordine", Tesi di Laurea in Fisica, Università di Bologna, a.a. 1999-2000, inédite.

[17] Bel (1961).
[18] Bel (1962).

Edgard S.B. (1987), *Gen. Rel. Grav.*, **19**, 1149.

Hammon K.S., Norris L.K. (1992), *Gen. Rel. Grav.*, **25**, 55.

Hawking S.W. (1966), *Astrophys. J.*, **145**, 544.

Hawking S.W. & Ellis G.F.R. (1973), *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.

Jordan P., *Schwerkraft und Weltall-Grundlagen der theoretischen Kosmologie*, Friedr. Vieweg & Sohn, 1952.

Jordan P., Ehlers J., Kundt W. (1960), *Akad. Wiss. Mainz*, **2**, 23.

Lanczos C. (1962), *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 379.

Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. (1973), *Gravitation*, W.H. Freeman & Co.

Newman E.T., Penrose R. (1962), *J. Math. Phys.*, **3**, 566.

Newman E.T., Unti T.W.J. (1962), *J. Math. Phys.*, **3**, 891.

Novello M. et Duarte de Oliveria (1980), *Gen. Rel. Grav.*, **12**, 871.

Novello M. et Velloso A. (1987), *Gen. Rel. Grav.*, **19**, 1251.

Roberts M.D. (1995), *Il Nuovo Cimento*, **B110**, 1165.

Savini D., "La relatività generale dai campi ai potenziali", Tesi di Laurea in Fisica, Università di Bologna, a.a. 1996-1997, inédite.

Schutz B. (1980), *Geometrical Methods in Mathematical Physics*, Cambridge University Press.

Udeschini, B. (1977), *Istit. Lombardo Acad. Sci., Lett. Rend.* A, **111**, 466.

(Manuscrit reçu le 25 janvier 2001)