

Vers une mécanique quantique sans nombre complexe.

CLAUDE DAVIAU

La Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France
email : cdaviau@worldnet.fr

RÉSUMÉ. L'équation de Dirac est écrite à l'aide de matrices réelles. Le formalisme réel introduit trois matrices distinctes jouant le rôle de i . Les matrices unitaires sont remplacées par les matrices orthogonales. Un groupe de jauge $SO(8)$ s'introduit naturellement. On étudie les sous-groupes laissant invariantes les parties droites et gauches de l'onde. Le formalisme réel permet d'obtenir des équations d'onde de fermions chiraux et dotés d'une masse propre. On associe à chaque type de fermion un type d'équation d'onde relativiste. On étudie les tenseurs constructibles à partir des spineurs utilisés. Deux de ces tenseurs redonnent l'électromagnétisme du photon de L. de Broglie. Le formalisme réel modifie la problématique des énergies négatives.

ABSTRACT. The Dirac equation is written with only real matrices. The real formalism introduces three distinct matrices in the place of i . Unitary matrices are replaced by orthogonal matrices. A $SO(8)$ gauge group is induced by this change. We study the sub-groups which leave the left or right part of the wave invariant. With the real formalism we get wave equations for chiral fermions with a proper mass term. We associate to each kind of fermions a particular relativistic wave equation. We study the tensors coming from the spinors. Two tensors give the electromagnetic laws of L. de Broglie's photon. The real formalism modifies the problem of negative energies.

À mon ami et maître Georges Lochak

Introduction

Après la découverte des ondes de matière par Louis de Broglie [1], à partir de considérations relativistes, le premier chercheur qui réussit à donner une équation d'onde fut E. Schrödinger, d'abord pour les ondes

stationnaires, puis pour les ondes non stationnaires dans le cas non relativiste. Pour obtenir une équation d'onde correcte au second ordre il dut introduire un facteur i dans l'équation du premier ordre. C'était la première fois que les nombres complexes prenaient place en physique, de manière intrinsèque et non comme simple outil de calcul. Jusque là toutes les grandeurs utilisées, scalaires, vecteurs ou tenseurs, étaient à composantes réelles. On a d'abord cherché à se débarrasser de ces étranges nombres complexes, par exemple avec la représentation hydrodynamique de Madelung. Puis on s'est habitué à l'usage des nombres complexes, du produit scalaire hermitien et des matrices unitaires, grâce aux nombreux phénomènes dont rendait compte la théorie quantique.

Dans le même temps était découvert le spin de l'électron, et Dirac trouvait une équation d'onde [2], relativiste, correspondant à une particule à spin. L. de Broglie et ses élèves étudièrent en détail cette équation qui correspondait beaucoup mieux au point de départ de la mécanique ondulatoire, fille de la relativité restreinte. Et même si on ne le sait plus guère aujourd'hui, c'est l'équation de Dirac, et non pas celle de Schrödinger, qui permet d'obtenir les bons résultats pour l'atome d'hydrogène et plus généralement pour la chimie. Pourtant c'est l'équation non relativiste de Schrödinger qui a induit l'essentiel de l'interprétation de la mécanique quantique et des théories de jauge, car elle est utilisable pour des systèmes de particules, alors que l'équation de Dirac ne décrit qu'un électron unique.

Les ondes de matière sont-elles intrinsèquement complexes, étrangères à la physique classique ? On ne se pose plus beaucoup la question aujourd'hui, et pourtant il est possible de concevoir les ondes de matière dans un cadre où les nombres complexes n'interviennent pas. C'est le cas de l'algèbre paire d'espace-temps qui a permis à D. Hestenes [3], R. Boudet [4] et alii d'écrire l'équation de Dirac dans le cadre d'une algèbre de Clifford sur le corps des réels, sans nombre complexe. Il est aussi possible d'utiliser l'algèbre de Clifford de l'espace physique à trois dimensions, avec Baylis [5] et Daviau [6]. Il est enfin possible d'utiliser une représentation matricielle de ces deux algèbres, ce qui peut être plus simple pour ceux qui sont habitués au calcul matriciel. On se limitera ici à l'utilisation de cette représentation matricielle.

1 - L'équation de Dirac avec des matrices réelles.

Partons de l'équation de Dirac sous la forme usuelle :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = 0 \quad (1)$$

$$q = \frac{e}{\hbar c} ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar}$$

où e , négatif, est la charge de l'électron et les A_μ sont les composantes covariantes du vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. La signature utilisée ici pour la métrique d'espace-temps est $+ - - -$. On prend la forme usuelle des matrices de Dirac :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} ; \quad \gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \quad \gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

I_n désigne la matrice unité $n \times n$. Pour passer aux matrices réelles, il suffit de séparer les parties réelles et imaginaires des composantes de ψ , en posant :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a_1 + ia_4 \\ \psi_2 &= -a_3 - ia_2 \\ \psi_3 &= a_8 + ia_5 \\ \psi_4 &= a_6 + ia_7 \end{aligned} ; \quad \Phi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'équation de Dirac prend alors la forme :

$$[\Gamma^\mu(\partial_\mu + qA_\mu P) + mP]\Phi = 0 \quad (4)$$

où les matrices Γ^μ et P sont des matrices réelles 8×8 , à savoir :

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^1 = -\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{013} \\ \gamma_{013} & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma^2 &= -\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{03} \\ \gamma_{03} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Gamma^3 = -\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{01} \\ \gamma_{01} & 0 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} \gamma_{135} & 0 \\ 0 & -\gamma_{135} \end{pmatrix} ; \quad \gamma_5 = -i\gamma_{0123} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

où $\gamma_{03} = \gamma_0\gamma_3$, $\gamma_{013} = \gamma_0\gamma_1\gamma_3$, et ainsi de suite. Les matrices Γ^μ anti-commutent entre elles et commutent avec P :

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\Gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu}I_8 \\ \Gamma^\mu P &= P\Gamma^\mu \quad ; \quad P^2 = -I_8\end{aligned}\quad (6)$$

La matrice P , de carré $-I_8$, remplace le i du formalisme usuel. Par exemple l'invariance de jauge électrique de l'équation d'onde prend la forme :

$$\begin{aligned}A_\mu &\mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu a \\ \Phi &\mapsto \Phi' = e^{aP}\Phi\end{aligned}\quad (7)$$

L'adjoint $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ est remplacé par

$$\bar{\Phi} = \Phi^t\Gamma_0\quad (8)$$

En transposant les matrices de l'équation (4), puis en multipliant à droite par Γ_0 , on obtient, avec $P^t = -P$ et $(\Gamma^\mu)^t\Gamma_0 = \Gamma_0\Gamma^\mu$:

$$\partial_\mu\bar{\Phi}\Gamma^\mu - qA_\mu\bar{\Phi}P\Gamma^\mu - m\bar{\Phi}P = 0\quad (9)$$

Le courant de probabilité prend la forme

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\Phi}\Gamma^\mu\Phi\quad (10)$$

On obtient les lois d'évolution de la même manière qu'avec le formalisme usuel : en multipliant (4) à gauche par $\bar{\Phi}$, (9) à droite par Φ , et en ajoutant, on obtient la loi de conservation du courant de probabilité : $\partial_\mu J^\mu = 0$. Les tenseurs sans dérivée de la théorie de Dirac prennent la forme :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \bar{\psi}\psi = \bar{\Phi}\Phi \\ J^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\Phi}\Gamma^\mu\Phi \\ S^{\mu\nu} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi = \bar{\Phi}\Gamma^{\mu\nu}P\Phi \\ K^{\mu\nu\rho} &= i\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu\rho}\psi = \bar{\Phi}\Gamma^{\mu\nu\rho}P\Phi \\ \Omega_2 &= \bar{\psi}\gamma^{0123}\psi = \bar{\Phi}\Gamma^{0123}\Phi\end{aligned}\quad (11)$$

Ce qui précède n'est qu'une réécriture de la théorie de Dirac, qui semble n'apporter rien de nouveau. Il y a pourtant une différence importante

entre les deux formalismes : l'algèbre des matrices de Dirac, formée par les combinaisons linéaires à coefficients complexes des matrices γ^μ et de leurs produits, est de dimension 16 sur le corps des complexes, donc est identique à l'algèbre des matrices complexes 4×4 . Par contre l'algèbre des combinaisons linéaires à coefficients réels des matrices Γ^μ et de leurs produits, qui est aussi de dimension 16 sur le corps des réels, n'est pas identique à l'algèbre des matrices réelles 8×8 , qui est de dimension 64. L'algèbre des matrices réelles est beaucoup plus riche que l'algèbre des matrices complexes. Avec

$$\begin{aligned} P_3 &= P \\ P_1 &= Q = \begin{pmatrix} \gamma_{013} & 0 \\ 0 & \gamma_{013} \end{pmatrix} \\ P_2 &= R = \begin{pmatrix} -\gamma_{05} & 0 \\ 0 & \gamma_{05} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

toute matrice de l'algèbre $M_8(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$M = M_0 + M_1 P_1 + M_2 P_2 + M_3 P_3 \quad (13)$$

où les M_j sont des combinaisons linéaires de matrices Γ^μ et de leurs produits. Les P_j commutent avec les Γ^μ ; I_8, P_1, P_2, P_3 engendrent une algèbre isomorphe au corps des quaternions car on a :

$$\begin{aligned} P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 &= -I_8 ; \quad P_1 P_2 = -P_2 P_1 = P_3 \\ P_2 P_3 &= -P_3 P_2 = P_1 ; \quad P_3 P_1 = -P_1 P_3 = P_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Il résulte de l'existence de ces trois matrices de carré $-I_8$ que l'on peut écrire sur le modèle de l'équation de Dirac (4) deux autres équations :

$$[\Gamma^\mu (\partial_\mu + q A_\mu P_1) + m P_1] \Phi = 0 \quad (15)$$

$$[\Gamma^\mu (\partial_\mu + q A_\mu P_2) + m P_2] \Phi = 0 \quad (16)$$

Ces équations présentent des ressemblances importantes entre elles, mais aussi des différences. À toute solution de l'une on peut associer une solution des autres : par exemple en posant $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 + P_3)\Phi'$ dans (15) on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 + P_3)[\Gamma^\mu (\partial_\mu + q A_\mu P_3) + m P_3] \Phi' = 0 \quad (17)$$

Donc si l'on résoud (15) ou (16) dans le cas de l'atome d'hydrogène on obtiendra le même nombre d'états et les mêmes niveaux d'énergie.

Voyons maintenant les différences : dans la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène, on diagonalise les opérateurs J_3 et J^2 . C'est toujours l'axe $n^{\circ}3$ qui est utilisé. Avec les équations (15) et (16) ce seront respectivement J_1 et J_2 , au lieu de J_3 , qui seront utilisés [7]. Les trois équations ne sont en fait équivalentes que si les masses sont identiques. Or la masse propre est justement le premier paramètre qui change quand on passe d'un électron à un muon. Considérons en outre l'invariance relativiste des équations d'onde. Celle-ci résulte, en théorie de Dirac, du fait que pour toute transformation de Lorentz on peut construire une matrice Λ telle que

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

Par exemple pour une rotation de Lorentz propre telle que

$$\begin{aligned}\partial'_0 &= \cosh 2a\partial_0 + \sinh 2a\partial_3 \\ \partial'_3 &= \sinh 2a\partial_0 + \cosh 2a\partial_3 \\ x'_1 &= x_1 \quad ; \quad x'_2 = x_2\end{aligned}\tag{18}$$

on obtient

$$\Phi' = e^{a\Gamma_{03}}\Phi\tag{19}$$

Pour une rotation telle que

$$\begin{aligned}\partial'_1 &= \cos 2a\partial_1 - \sin 2a\partial_2 \\ \partial'_2 &= \sin 2a\partial_1 + \cos 2a\partial_2 \\ x'_0 &= x_0 \quad ; \quad x'_3 = x_3\end{aligned}\tag{20}$$

on obtient

$$\Phi' = e^{a\Gamma_{21}}\Phi\tag{21}$$

Il est donc toujours possible de trouver une matrice Λ telle que

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda &= a^\mu{}_\nu\gamma^\nu \\ \Phi' &= \Lambda\Phi \quad ; \quad \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}\Lambda^{-1}\end{aligned}\tag{22}$$

Par suite de la forme que prend l'invariance relativiste, la direction privilégiée 1, 2 ou 3 demeure.

Autre différence avec le formalisme complexe, les tenseurs sans dérivée, qui étaient de la forme $\bar{\psi}M\psi$, sont maintenant de la forme $\bar{\Phi}M\Phi$. Il y a non plus 16, mais en fait 36 densités tensorielles de ce type, à savoir : un scalaire et un pseudoscalaire :

$$\Omega_1 = \bar{\Phi}\Phi \quad ; \quad \Omega_2 = \bar{\Phi}\Gamma^{0123}\Phi \quad (23)$$

le vecteur d'espace-temps dont la composante temporelle est la densité de probabilité de présence :

$$J^\mu = \bar{\Phi}\Gamma^\mu\Phi \quad ; \quad J^0 = \sum_{i=1}^{i=8} a_i^2 \quad (24)$$

trois tenseurs antisymétriques de rang deux, au lieu d'un seul :

$$S_{(j)}^{\mu\nu} = \bar{\Phi}\Gamma^{\mu\nu}P_j\Phi \quad (25)$$

et trois tenseurs antisymétriques de rang trois, au lieu d'un seul :

$$K_{(j)}^{\mu\nu\rho} = \bar{\Phi}\Gamma^{\mu\nu\rho}P_j\Phi \quad (26)$$

Le formalisme complexe ne connaît que Ω_1 , J^μ , $S_{(3)}^{\mu\nu}$, $K_{(3)}^{\mu\nu\rho}$ et Ω_2 , qui sont les densités tensorielles de (11). Ce sont aussi les densités invariantes de jauge électrique avec l'équation (4). Avec l'équation (15) les tenseurs invariants de jauge électrique sont Ω_1 , J^μ , $S_{(1)}^{\mu\nu}$, $K_{(1)}^{\mu\nu\rho}$ et Ω_2 .

L'existence de trois formes d'équation, semblables mais différentes, est à rapprocher d'un fait aujourd'hui avéré mais qui n'a pas de justification théorique, à savoir l'existence de trois générations de particules élémentaires, à la fois semblables et non identiques. Une compréhension complète de la situation nécessiterait sans doute une théorie des systèmes de particules relativistes, très au-delà de la seule équation de Dirac. Mais on voit ici apparaître exactement trois équations, pas 2 ou 4. La direction privilégiée, ou les tenseurs invariants de jauge électrique, changent quand on passe d'une équation à une autre. Et changent aussi les projecteurs sur la partie gauche ou droite de l'onde. En effet avec le formalisme complexe la partie gauche ψ_L et la partie droite ψ_R de l'onde vérifient :

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5)\psi \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5)\psi \end{aligned} \quad (27)$$

Comme $\gamma_5 = i\gamma^{0123}$, nous obtenons, avec les matrices réelles :

$$\begin{aligned}\Phi_L &= \frac{1}{2}(I_8 - \Gamma^{0123}P_3)\Phi \\ \Phi_R &= \frac{1}{2}(I_8 + \Gamma^{0123}P_3)\Phi\end{aligned}\quad (28)$$

Ces égalités doivent être modifiées, P_3 étant remplacé respectivement par P_1 ou P_2 lorsque l'on passe de l'équation (4) aux équations (15) et (16). Or la chiralité joue un rôle essentiel en physique, par suite de la violation maximale de la parité dans les interactions faibles. G. Lochak a beaucoup insisté sur le fait que les spineurs fondamentaux de la théorie de Dirac sont les spineurs chiraux, et non pas les combinaisons linéaires de ces spineurs que l'on rencontre dans la résolution de l'atome d'hydrogène. Ces spineurs chiraux sont à la base de sa théorie du monopôle magnétique [8].

2 - Groupe orthogonal

Les travaux utilisant l'algèbre d'espace-temps ont porté principalement sur les tenseurs de la théorie de Dirac et se sont peu intéressés aux opérateurs de moment cinétique ou au produit scalaire qui tient pourtant un grand rôle en mécanique quantique :

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \iiint \psi'^{\dagger} \psi dv \quad (29)$$

Ce produit scalaire est associé à la norme :

$$\|\psi\|^2 = \iiint \psi^{\dagger} \psi dv = \iiint J^0 dv \quad (30)$$

Cette norme est aisément transposable au formalisme réel :

$$\|\Phi\|^2 = \iiint J^0 dv = \iiint \Phi^t \Phi dv \quad (31)$$

Mais il n'y a aucune raison d'associer à cette norme un produit scalaire hermitien. Il est par contre tout à fait naturel d'y associer le produit scalaire euclidien :

$$\Phi' \cdot \Phi = \iiint \Phi'^t \Phi dv = \iiint \left(\sum_{i=1}^{i=8} a'_i a_i \right) dv \quad (32)$$

On pourrait s'attendre à ce que la substitution du produit scalaire euclidien au produit scalaire hermitien produise des catastrophes. Mais dans le cas pourtant excessivement pointu de la résolution pour l'atome d'hydrogène, l'orthogonalité des solutions avec l'un ou l'autre des deux produits scalaires donne exactement les mêmes résultats [7].

Le remplacement du produit scalaire hermitien par le produit scalaire euclidien s'accompagne du remplacement des matrices unitaires par des matrices orthogonales. En effet les équations (4), (15) et (16) sont invariantes sous les transformations de jauge globale :

$$\begin{aligned}\Phi &\mapsto \Phi' = M\Phi \quad ; \quad M^t = M^{-1} \\ \Gamma^\mu &\mapsto \Gamma'^\mu = M\Gamma^\mu M^{-1} \\ P_j &\mapsto P'_j = MP_j M^{-1}\end{aligned}\tag{33}$$

où M est une matrice orthogonale fixe quelconque. Par ailleurs les transformations de jauge locale sont déjà présentes avec (7). Il est possible d'élargir cette invariance de jauge en modifiant le terme de potentiel de telle sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned}\Phi' &= M\Phi \quad ; \quad A'_\mu = [MA_\mu + \frac{1}{q}(\partial_\mu M)P_j]M^t \\ \Gamma'^\mu &= M\Gamma^\mu M^{-1} \quad ; \quad P'_j = MP_j M^{-1} \\ [\Gamma'^\mu(\partial_\mu + qA'_\mu P'_j)]\Phi' &= M[\Gamma^\mu(\partial_\mu + qA_\mu P_j) + mP_j]\Phi\end{aligned}\tag{34}$$

On dispose donc avec l'équation de Dirac d'un groupe de jauge locale très vaste, puisque le groupe $SO(8)$ des matrices 8×8 telles que $M^t M = I_8$ est un groupe de Lie de rang 4, à 28 paramètres. Les 28 paramètres de ce groupe sont liés aux 36 densités tensorielles ($28+36=64$) de la manière suivante : si l'on écrit complètement les matrices M_j de (13), on obtient une base de l'espace vectoriel des matrices 8×8 constituée de 64 matrices. 28 sont de carré $-I_8$, vérifient $M^t = -M$, et constituent une base de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $SO(8)$, à savoir : $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{12}, \Gamma_{023}, \Gamma_{031}, \Gamma_{012}, \Gamma_{0123}, P_j, \Gamma_0 P_j, \Gamma_{01} P_j, \Gamma_{02} P_j, \Gamma_{03} P_j, \Gamma_{123} P_j, j = 1, 2, 3$. 36 sont de carré I_8 , vérifient $M^t = M$, et donnent les densités tensorielles de la forme $\Phi^t M \Phi$, à savoir : $I_8, \Gamma_0, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}, \Gamma_{123}, \Gamma_1 P_j, \Gamma_2 P_j, \Gamma_3 P_j, \Gamma_{23} P_j, \Gamma_{31} P_j, \Gamma_{12} P_j, \Gamma_{023} P_j, \Gamma_{031} P_j, \Gamma_{012} P_j, \Gamma_{0123} P_j, j = 1, 2, 3$.

Les interactions faibles violent de manière maximale la parité, ce qui se traduit par le fait que le neutrino est gauche et l'antineutrino droit.

Si l'on cherche, parmi les transformations de jauge définies par (33) et (34), celles qui agissent uniquement sur la partie gauche des ondes et qui laissent la partie droite invariante, on obtient un groupe d'invariance à 6 paramètres ayant pour générateurs :

$$\begin{aligned} B_1 &= \Gamma_{23}p_j ; & C_1 &= P_j p_j ; & p_j &= \frac{1}{2}(I_8 - \Gamma^{0123}P_j) \\ B_2 &= \Gamma_{31}p_j ; & C_2 &= P_{j+1}\Gamma_0 p_j \\ B_3 &= \Gamma_{12}p_j ; & C_3 &= P_{j+2}\Gamma_0 p_j \end{aligned} \quad (35)$$

p_j est le projecteur sur la partie gauche de l'onde, pour l'équation contenant P_j . L'addition des indices $j+1$ et $j+2$ doit être prise modulo 3. L'algèbre de Lie engendrée par les B_k et les C_k est isomorphe à celle du groupe $SU(2) \times SU(2)$, car on a :

$$\begin{aligned} B_1 B_2 &= -B_2 B_1 = B_3 ; & C_1 C_2 &= -C_2 C_1 = C_3 \\ B_2 B_3 &= -B_3 B_2 = B_1 ; & C_2 C_3 &= -C_3 C_2 = C_1 \\ B_3 B_1 &= -B_1 B_3 = B_2 ; & C_3 C_1 &= -C_1 C_3 = C_2 \\ B_k C_l &= C_l B_k = 0 ; & B_k B_k &= C_k C_k = -p_j \end{aligned} \quad (36)$$

Cette algèbre de Lie contient des sous-algèbres isomorphes à celle du groupe $U(1) \times SU(2)$ du modèle électro-faible, par exemple l'algèbre engendrée par B_1, C_1, C_2, C_3 . Les interactions fortes étant indépendantes des interactions faibles, on est amené à chercher ce qui commute avec les B_k et les C_k . On trouve alors, toujours comme sous-groupe du groupe orthogonal, un autre groupe à 6 paramètres, de même structure, engendré par :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \Gamma_{23}p'_j ; & X_1 &= P_j p'_j ; & p'_j &= \frac{1}{2}(I_8 + \Gamma^{0123}P_j) \\ Y_2 &= \Gamma_{31}p'_j ; & X_2 &= P_{j+1}\Gamma_0 p'_j \\ Y_3 &= \Gamma_{12}p'_j ; & X_3 &= P_{j+2}\Gamma_0 p'_j \end{aligned} \quad (37)$$

Ce groupe n'a pas l'algèbre de Lie de $SU(3)$, mais à nouveau l'algèbre de Lie de $SU(2) \times SU(2)$.

Par ailleurs on sait que les particules élémentaires se présentent en deux classes : les leptons qui ont des interactions faibles et sont totalement insensibles aux interactions fortes, et les quarks qui sont concernés par les interactions faibles et par les interactions fortes. Cette situation

est incontestable du point de vue expérimental, mais n'a pas de justification théorique dans le modèle standard. Si l'on suit la logique de ce qui précède, pour qu'une particule soit insensible aux interactions fortes, il suffit que l'onde de cette particule soit purement gauche, (ou droite pour l'antiparticule). Ceci amène à de nouvelles équations d'onde pour les leptons.

3 - Equations d'onde chirales pour les leptons

On a considéré jusqu'ici comme impossible de donner une équation d'onde pour une particule chirale et massive. C'est effectivement impossible en partant de l'équation de Dirac, et pour le neutrino, on a à choisir entre la chiralité et une masse nulle, ou une masse non nulle sans vraie chiralité. Mais on peut donner une équation pour une particule chirale et massive en considérant les matrices :

$$M^\mu = \Gamma^\mu P_{j+1} p_j \quad (38)$$

et l'équation d'onde :

$$(M^\mu \partial_\mu + m)\Phi = 0 \quad (39)$$

qui donne au second ordre

$$\begin{aligned} (M^\nu \partial_\nu - m)(M^\mu \partial_\mu + m)\Phi &= 0 \\ (M^\nu M^\mu \partial_\nu \partial_\mu - m^2)\Phi &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Or on a :

$$M^\mu M^\nu + M^\nu M^\mu = -2g^{\mu\nu} p_j \quad (41)$$

et l'on obtient

$$(\square + m^2)\Phi_L + m^2\Phi_R = 0 \quad (42)$$

On obtient donc l'équation des ondes si et seulement si la partie droite Φ_R est nulle, ce qui semble bien être le cas pour le neutrino :

$$\Phi = \Phi p_j \quad ; \quad (\square + m^2)\Phi = 0 \quad (43)$$

Comme le neutrino n'est pas la seule particule insensible aux interactions fortes, que les leptons chargés sont dans la même situation, on est amené

à se demander s'il est possible d'obtenir des équations d'ondes chirales avec charge. C'est possible à partir de deux ondes chirales :

$$\Phi_1 = \Phi_1 p_j \quad ; \quad \Phi_2 = \Phi_2 p_j \quad (44)$$

couplées entre elles par le champ électromagnétique extérieur de potentiels A_μ :

$$\begin{aligned} (M^\mu \partial_\mu + m)\Phi_1 + qM^\mu A_\mu \Phi_2 &= 0 \\ (M^\mu \partial_\mu + m)\Phi_2 - qM^\mu A_\mu \Phi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

On obtient donc ici un modèle permettant, pour chaque génération de fermions correspondant à l'une des trois valeurs possibles de l'indice des P_j et des p_j , de donner une équation d'onde (39) de lepton non chargé, une équation d'onde de fermion chargé (45). Reste alors à justifier l'existence, pour chaque génération, de deux quarks chargés et deux seulement. Or on peut disposer de deux autres équations d'onde, la première est simplement l'équation de Dirac elle-même :

$$[\Gamma^\mu (\partial_\mu + qA_\mu P_j) + mP_j]\Phi = 0 \quad (46)$$

Et la seconde correspond à deux spineurs Φ_1 et Φ_2 liés par :

$$\begin{aligned} (\Gamma^\mu \partial_\mu + mP_j)\Phi_1 &= q\Gamma^\mu A_\mu \Phi_2 \\ (\Gamma^\mu \partial_\mu + mP_j)\Phi_2 &= -q\Gamma^\mu A_\mu \Phi_1 \end{aligned} \quad (47)$$

Les ondes suivant les équations (46) et (47) comportent à la fois des parties gauche et droite, et sont donc concernées à la fois par les groupes de jauge engendrés par les C_j et D_j , et par les Y_j et X_j . On a donc ainsi, à chaque génération, assez d'équations pour un lepton non chargé, un lepton chargé, invariants sous le groupe de jauge engendrés par les Y_j et X_j , et deux quarks chargés sensibles à la totalité du groupe de jauge.

Les premiers résultats obtenus à partir de ces équations sont conformes à ce que l'on attend. Pour les ondes planes de l'équation (39), on retrouve la relation

$$p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (48)$$

qui lie l'énergie, l'impulsion et la masse en relativité restreinte. Pour l'équation de lepton chargé (45), on obtient, pour l'atome d'hydrogène, les solutions attendues. Les nombres quantiques qui s'introduisent par la séparation des variables angulaires, le nombre des états, les niveaux d'énergie sont les mêmes que dans la résolution de l'équation de Dirac[9].

4 - Lagrangiens et tenseurs

Même s'il est assez facile de construire des équations d'onde qui ne peuvent pas découler de lagrangiens [10], il est assez remarquable que toutes les équations de la mécanique quantique ont été jusqu'ici obtenues dans ce cadre lagrangien. Il en est de même ici, et l'on peut obtenir l'équation (39) associée au neutrino à partir de la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \bar{\Phi}_R P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\mu \Phi_L + \bar{\Phi}_L P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\mu \Phi_R + 2m \bar{\Phi}_R P_j \Phi_L \quad (49)$$

où Φ_L désigne l'onde gauche de la particule, et Φ_R l'onde droite de l'antiparticule. Ici, contrairement au lagrangien de l'équation de Dirac avec les nombres complexes, la conjugaison de charge est présente à l'intérieur même du lagrangien, il n'est pas possible d'obtenir une formulation lagrangienne sans utiliser la conjugaison de charge. En outre les équations d'onde qui découlent de ce lagrangien sont :

$$\begin{aligned} (\Gamma^\mu P_{j+1} \partial_\mu + m) \Phi_L &= 0 \\ (\Gamma^\mu P_{j+1} \partial_\mu - m) \Phi_R &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

La conjugaison de charge correspond donc à ce qu'avait décrit Ziino, partant des seules contraintes posées par la violation maximale de la parité [11] :

$$\Phi_L \leftrightarrow \Phi_R ; \quad q \leftrightarrow -q ; \quad A_\mu \leftrightarrow -A_\mu ; \quad m \leftrightarrow -m \quad (51)$$

Le lagrangien, pour l'équation de lepton chargé (45), prend en effet la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Phi}_{1R} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\mu \Phi_{1L} + \bar{\Phi}_{2R} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\mu \Phi_{2L} \\ & + \bar{\Phi}_{1L} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\mu \Phi_{1R} + \bar{\Phi}_{2L} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\mu \Phi_{2R} \\ & + 2q (\bar{\Phi}_{2R} P_{j+2} \Gamma^\mu A_\mu \Phi_{1L} - \bar{\Phi}_{1R} P_{j+2} \Gamma^\mu A_\mu \Phi_{2L}) \\ & + 2m (\bar{\Phi}_{1R} P_j \Phi_{1L} + \bar{\Phi}_{2R} P_j \Phi_{2L}) \end{aligned} \quad (52)$$

Les équations qui découlent de ce lagrangien sont :

$$\begin{aligned} 0 &= (\Gamma^\mu P_{j+1} \partial_\mu + m) \Phi_{1L} - q \Gamma^\mu P_{j+1} A_\mu \Phi_{2L} \\ 0 &= (\Gamma^\mu P_{j+1} \partial_\mu + m) \Phi_{2L} + q \Gamma^\mu P_{j+1} A_\mu \Phi_{1L} \\ 0 &= (\Gamma^\mu P_{j+1} \partial_\mu - m) \Phi_{1R} - q \Gamma^\mu P_{j+1} A_\mu \Phi_{2R} \\ 0 &= (\Gamma^\mu P_{j+1} \partial_\mu - m) \Phi_{2R} + q \Gamma^\mu P_{j+1} A_\mu \Phi_{1R} \end{aligned} \quad (53)$$

Le passage de l'onde de la particule à l'onde de l'antiparticule est bien celui décrit par (51). Il est remarquable que l'on n'a pas le choix : à la seule condition que l'on veuille une formulation lagrangienne pour l'équation d'onde (45), on doit prendre le lagrangien (52), qui donne pour la conjugaison de charge (51). Ces conditions, que postulait Ziino à partir des contraintes de la violation de la parité, sont ici déduites de l'existence même d'une formulation lagrangienne.

Le tenseur d'impulsion-énergie que l'on calcule à partir de la densité lagrangienne (49) vaut

$$T^\mu{}_\nu = \bar{\Phi}_R P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\nu \Phi_L + \bar{\Phi}_L P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\nu \Phi_R \quad (54)$$

tandis que le tenseur d'impulsion-énergie venant de (52) vaut

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu = & \bar{\Phi}_{1R} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\nu \Phi_{1L} + \bar{\Phi}_{2R} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\nu \Phi_{2L} \\ & + \bar{\Phi}_{1L} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\nu \Phi_{1R} + \bar{\Phi}_{2L} P_{j+2} \Gamma^\mu \partial_\nu \Phi_{2R} \end{aligned} \quad (55)$$

La question du signe de la densité d'énergie se pose ici de manière différente : on n'obtient une énergie non nulle que si l'on considère à la fois l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule.

Par suite de la forme que prend l'invariance relativiste, les densités tensorielles sans dérivée que l'on peut former à partir des spineurs sont de la forme $\bar{\Phi} M \Phi$. Par suite de la présence des projecteurs dans Φ_L et Φ_R , de nombreuses densités sont identiquement nulles. Celles qui sont constructibles à partir de Φ_L seul sont :

$$\begin{aligned} J^\mu &= \bar{\Phi}_L \Gamma^\mu \Phi_L \\ S^{\mu\nu} &= \bar{\Phi}_L \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_L \end{aligned} \quad (56)$$

De même celles qui sont constructibles à partir de l'onde de l'antiparticule Φ_R seule sont :

$$\begin{aligned} J'^\mu &= \bar{\Phi}_R \Gamma^\mu \Phi_R \\ S'^{\mu\nu} &= \bar{\Phi}_R \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_R \end{aligned} \quad (57)$$

Mais il y a aussi 16 densités tensorielles constructibles à partir de Φ_L et

Φ_R à savoir :

$$\begin{aligned}
s &= \bar{\Phi}_L \Phi_R \\
B^\mu &= \bar{\Phi}_L \Gamma^\mu P_{j+1} \Phi_R \\
F^{\mu\nu} &= 2m \bar{\Phi}_L \Gamma^{\mu\nu} P_j \Phi_R \\
A^\mu &= \bar{\Phi}_L \Gamma^\mu P_{j+1} P_j \Phi_R \\
p &= \bar{\Phi}_L \Gamma^{0123} \Phi_R
\end{aligned} \tag{58}$$

Les courants J et J' sont conservatifs :

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad ; \quad \partial_\mu J'^\mu = 0 \tag{59}$$

ce qui assure la conservation de la densité de probabilité de présence, tant pour la particule que pour l'antiparticule. Il existe aussi de nombreux autres tenseurs si l'on ne se restreint pas aux tenseurs sans dérivée.

Les tenseurs constructibles à partir des ondes de leptons chargés sont des mêmes types, mais avec plus de diversité, puisque l'on dispose de deux spineurs gauches et de deux spineurs droits. Les densités tensorielles que l'on peut construire à partir des seuls spineurs gauches sont : les scalaires

$$\begin{aligned}
s_1 &= \bar{\Phi}_{1L} P_{j+1} \Phi_{2L} \\
s_2 &= \bar{\Phi}_{1L} P_{j+2} \Phi_{2L}
\end{aligned} \tag{60}$$

trois vecteurs d'espace-temps :

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \bar{\Phi}_{1L} \Gamma^\mu \Phi_{1L} + \bar{\Phi}_{2L} \Gamma^\mu \Phi_{2L} \\
J'^\mu &= \bar{\Phi}_{1L} \Gamma^\mu \Phi_{1L} - \bar{\Phi}_{2L} \Gamma^\mu \Phi_{2L} \\
J''^\mu &= 2\bar{\Phi}_{1L} \Gamma^\mu \Phi_{2L}
\end{aligned} \tag{61}$$

trois tenseurs antisymétriques de rang deux :

$$\begin{aligned}
S^{\mu\nu} &= \bar{\Phi}_{1L} \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_{1L} + \bar{\Phi}_{2L} \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_{2L} \\
S'^{\mu\nu} &= \bar{\Phi}_{1L} \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_{1L} - \bar{\Phi}_{2L} \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_{2L} \\
S''^{\mu\nu} &= 2\bar{\Phi}_{1L} \Gamma^{\mu\nu} P_{j+1} \Phi_{2L}
\end{aligned} \tag{62}$$

et un tenseur antisymétrique de rang trois :

$$K^{\mu\nu\rho} = 2\bar{\Phi}_{1L} \Gamma^{\mu\nu\rho} \Phi_{2L} \tag{63}$$

On peut remarquer que le nombre total de composantes de ces tenseurs est 36, comme dans le cas de l'équation (4). 16 de ces composantes sont invariantes de jauge électrique, là aussi comme pour l'équation (4). En effet l'invariance de jauge électrique, pour l'équation (47), prend la forme :

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu a \\ \Phi_1 &\mapsto \Phi'_1 = \cos a \Phi_1 + \sin a \Phi_2 \\ \Phi_2 &\mapsto \Phi'_2 = \cos a \Phi_2 - \sin a \Phi_1 \end{aligned} \quad (64)$$

et les tenseurs invariants de jauge sont les scalaires s et t , le vecteur J , conservatif, le bivecteur S et le trivecteur K . On obtient aussi 36 densités tensorielles constructibles à partir des ondes droites de l'antiparticule, mais il y a en outre un nombre important, 64, de densités tensorielles constructibles à partir des spineurs gauches et droits : chacune des 16 densités tensorielles de (58) donne 4 densités, par exemple s donne :

$$\begin{aligned} s_+ &= \bar{\Phi}_{1L} \Phi_{1R} + \bar{\Phi}_{2L} \Phi_{2R} \\ s_- &= \bar{\Phi}_{1L} \Phi_{1R} - \bar{\Phi}_{2L} \Phi_{2R} \\ s_{(12)} &= \bar{\Phi}_{1L} \Phi_{2R} + \bar{\Phi}_{2L} \Phi_{1R} \\ s_{[12]} &= \bar{\Phi}_{1L} \Phi_{2R} - \bar{\Phi}_{2L} \Phi_{1R} \end{aligned} \quad (65)$$

On obtient donc au total 136 densités tensorielles constructibles à partir des spineurs du lagrangien (52), dont 64 sont invariantes de jauge électrique. On peut remarquer que si l'on dispose de n composantes spinorielles, on peut construire $\frac{(n+1) \times n}{2}$ densités tensorielles.

5 - Electromagnétisme du photon de L. de Broglie

Après avoir associé une onde au mouvement de toute particule, L. de Broglie s'est tourné vers le photon, et notamment parce que la lumière fut à l'origine de la découverte des quanta. Après divers essais, il conçut l'idée du photon de masse m comme composé de deux spineurs de Dirac de masse $\frac{m}{2}$. Ces spineurs de même masse étaient sans charge électrique, d'où le nom de théorie neutrinienne de la lumière [12].

Comme on a donné ici une équation d'onde qui doit convenir au neutrino, il est naturel de se demander si cette équation peut convenir pour la construction broglienne du photon. Nous allons voir que la réponse est positive, à partir des tenseurs A^μ et $F^{\mu\nu}$ de (58), fabriqués à partir

d'un couple onde de la particule, onde de l'antiparticule, comme l'avait imaginé L. de Broglie. On supposera, pour poser les calculs, que $j = 3$, $P_j = P$. Les spineurs prennent alors la forme suivante :

$$\Phi_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ -a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} ; \quad \Phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_4 \\ -b_3 \\ -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Les ondes $\psi^{(1)}$ et $\psi^{(2)}$ des deux neutrinos étant bloquées dans le même état de mouvement, L. de Broglie avait supposé

$$(\partial_\mu \psi_k^{(1)}) \psi_j^{(2)} = \psi_k^{(1)} \partial_\mu \psi_j^{(2)} \quad (67)$$

De manière analogue, on supposera ici les ondes Φ_L et Φ_R liées dans le même état de mouvement par les 64 conditions

$$(\partial_\mu a_j) b_k = a_j \partial_\mu b_k \quad (68)$$

Les équations d'onde (50), avec une masse $\frac{m}{2}$, équivalent aux systèmes

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{2} a_1 + \partial_0 a_2 + \partial_1 a_4 + \partial_2 a_1 + \partial_3 a_2 \\ 0 &= \frac{m}{2} a_2 - \partial_0 a_1 - \partial_1 a_3 - \partial_2 a_2 + \partial_3 a_1 \\ 0 &= \frac{m}{2} a_3 - \partial_0 a_4 - \partial_1 a_2 + \partial_2 a_3 + \partial_3 a_4 \\ 0 &= \frac{m}{2} a_4 + \partial_0 a_3 + \partial_1 a_1 - \partial_2 a_4 + \partial_3 a_3 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{m}{2} b_1 + \partial_0 b_2 - \partial_1 b_4 - \partial_2 b_1 - \partial_3 b_2 \\ 0 &= -\frac{m}{2} b_2 - \partial_0 b_1 + \partial_1 b_3 + \partial_2 b_2 - \partial_3 b_1 \\ 0 &= -\frac{m}{2} b_3 - \partial_0 b_4 + \partial_1 b_2 - \partial_2 b_3 - \partial_3 b_4 \\ 0 &= -\frac{m}{2} b_4 + \partial_0 b_3 - \partial_1 b_1 + \partial_2 b_4 - \partial_3 b_3 \end{aligned} \quad (70)$$

Les composantes du vecteur potentiel A_μ prennent la forme

$$\begin{aligned} A_0 &= a_1 b_3 + a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2 \\ A_1 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4 \\ A_2 &= -a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1 \\ A_3 &= a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 - a_4 b_2 \end{aligned} \quad (71)$$

tandis que les composantes du tenseur antisymétrique champ électromagnétique F prennent la forme

$$\begin{aligned} F_{01} &= m(-a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3) \\ F_{02} &= m(a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 + a_4 b_2) \\ F_{03} &= m(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1) \\ F_{12} &= m(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + a_4 b_4) \\ F_{23} &= m(-a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2) \\ F_{31} &= m(-a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_4 + a_4 b_3) \end{aligned} \quad (72)$$

Les équations d'onde (69) et (70), avec les conditions (68), donnent

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -m^2 A^\nu \end{aligned} \quad (73)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Les équations (73) et (74) sont appelées équations maxwelliennes chez L. de Broglie, par opposition aux tenseurs non maxwelliens qui sont ici s , B_μ et p . Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_1, E_2, E_3) ; \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) \\ A_\mu &= (V, \mathbf{A}) ; \quad \mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) \\ E_j &= F_{0j} ; \quad H_1 = F_{32} ; \quad H_2 = F_{13} ; \quad H_3 = F_{21} \end{aligned} \quad (75)$$

les équations (73) équivalent à

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } V - \partial_0 \mathbf{A} ; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \\ \text{div } \mathbf{E} &= -m^2 V ; \quad \partial_0 \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = m^2 \mathbf{A} \end{aligned} \quad (76)$$

tandis que (74) équivaut à

$$\begin{aligned}\partial_0 V + \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \partial_0 \mathbf{H} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}\end{aligned}\tag{77}$$

Les tenseurs non maxwelliens valent

$$\begin{aligned}s &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \\ p &= a_1 b_4 - a_2 b_3 + a_3 b_2 - a_4 b_1\end{aligned}\tag{78}$$

$$\begin{aligned}B_0 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3 \\ B_1 &= a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1 \\ B_2 &= a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \\ B_3 &= a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 + a_4 b_3\end{aligned}\tag{79}$$

Toujours à partir des équations d'onde (69) et (70) et avec les conditions (68) on obtient

$$\begin{aligned}\partial_\mu p &= 0 \\ \partial_\mu s &= -m B_\mu \\ \partial_\mu B^\mu &= m s\end{aligned}\tag{80}$$

Ces équations sont semblables aux équations non maxwelliennes de L. de Broglie, avec une différence cependant, car l'invariant p est une constante, mais cette constante n'est pas forcément nulle, ce qui était le cas pour l'un des deux invariants qu'obtenait L. de Broglie, et ceci prouve que ce que nous obtenons ici n'est pas identique, seulement proche de ce qu'avait obtenu L. de Broglie. Il y a une autre différence, beaucoup plus importante, c'est que le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ et le potentiel électromagnétique A_μ qui viennent des tenseurs (58) sont à composantes réelles, alors que les composantes du champ électromagnétique de L. de Broglie étaient à composantes complexes. Nos $F_{\mu\nu}$ et A_μ sont directement identifiables aux tenseurs maxwelliens. Le partage entre tenseurs maxwelliens et non maxwelliens ne peut pas être modifié à la manière du second photon de G. Lochak [13], car la condition de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ n'est pas vérifiée par le vecteur B .

6 - Sur le signe de l'énergie.

Si l'équation de Dirac a obtenu des résultats remarquables dans le cas du potentiel coulombien, donnant les nombres quantiques comprenant le spin, le nombre des niveaux et les bons niveaux dans le cas de l'atome d'hydrogène, elle a buté sur la question des énergies négatives. La relation (48) donne en effet aussi bien les énergies positives attendues que des énergies négatives. Les ondes à énergie négative ont dans un premier temps été associées à l'anti-électron, et la conjugaison de charge fut considérée comme le triomphe de l'équation de Dirac. Mais comme la création d'une paire électron-positron nécessite une énergie positive de $2 \times 511\text{keV}$, on ne peut pas dire que cela correspond à $+511\text{keV}$ et -511keV . Aussi Dirac a-t-il dans un premier temps proposé la théorie des trous dans la mer des états d'énergie négative, puis la physique des particules a adopté les procédures dites de seconde quantification, où l'on manie des opérateurs de création et d'annihilation, le ψ de Dirac étant lui-même considéré comme un élément d'un tel espace d'opérateurs.

La place des énergies négative a été étudiée en détail par L. de Broglie, qui a mis en évidence la nécessité de les prendre en compte dans l'analyse de Fourier d'un paquet d'onde [14]. Les ondes planes de l'équation de Dirac comportent seulement deux constantes complexes arbitraires, et il en faut quatre pour obtenir un système complet, ce que l'on obtient en considérant les deux constantes des ondes à énergie positive et les deux constantes des ondes à énergie négative. Or on peut remarquer qu'avec l'équation chirale(39) l'onde fait intervenir quatre fonctions réelles, et l'onde plane dépend de quatre constantes réelles arbitraires. Le raisonnement de L. de Broglie ne vaut donc pas pour elle, les ondes à énergie positive forment un système complet pour l'analyse de Fourier d'un paquet d'onde.

Comme l'équation (39) donne aussi la relation (48), on ne peut pas dire qu'elle résoud l'énigme des énergies négatives. Elle modifie cependant les questions liées au signe de l'énergie, puisque la conjugaison de charge change le signe de la masse propre, et que le tenseur d'impulsion-énergie venant du lagrangien fait intervenir à la fois l'onde de la particule et de l'antiparticule. Les équations étudiées ici partagent avec l'équation de Dirac la linéarité, dont L. de Broglie avait analysé les insuffisances pour comprendre le dualisme onde-corpuscule. Les équations linéaires ne peuvent être que des approximations des véritables équations, non linéaires. Il y a en tout cas, dans le domaine des ondes relativistes, une variété des types d'équation très supérieure à ce que l'on croyait jusqu'ici.

Les ondes considérées ici sont de même nature que celles imaginées par L. de Broglie, se propageant dans l'espace physique en fonction du temps, et invariantes relativistes. Par la suite a été utilisée une théorie sophistiquée à base d'opérateurs. Cette théorie, que Dirac lui-même a rejetée, souffre de défauts mathématiques évidents, comme l'existence de quantités infinies dont on se débarrasse mal. Mais il y a plus grave car la totalité de la théorie repose sur des espaces fonctionnels non définis, des produits tensoriels non définis, des techniques d'intégration non définies, donc sur des choses qui, du point de vue mathématique, n'existent pas.

Parce qu'il ne se satisfaisait pas de la tournure que prenait la théorie quantique, L. de Broglie a créé cette fondation, et en a donné la responsabilité à Georges Lochak, avec la devise "Pour l'avenir". L'histoire, qui a toujours tenu une grande place dans la pensée de L. de Broglie, montre que les progrès, en physique, ont toujours allié la vigueur de l'imagination à la rigueur de l'outil mathématique.

Références

- [1] L. De Broglie : *Recherches sur la théorie des quantas* (thèse), réimprimée dans : Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°1 1988.
- [2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **117**, 610 (1928)
- [3] D. Hestenes : *Space-Time Algebra* (Gordon & Breach, New York 1966, 1987, 1992).
 D. Hestenes : *Real Spinor Fields*. J. Math. Phys., **8** n°4 1967
 D. Hestenes : *Local observables in the Dirac theory*. J. Math. Phys, **14** n°7 1973)
 D. Hestenes : *Proper particle mechanics*. J. Math. Phys., **15** n°10 1974)
 D. Hestenes : *Proper dynamics of a rigid point particle*. J. Math. Phys., **15** n°10 1974)
 D. Hestenes : *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* J. Math. Phys., **16** n°3 1975
 D. Hestenes : *A unified language for Mathematics and Physics in Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics* JSR Chisholm & AK Common eds, (Reidel, Dordrecht, 1986)
- [4] R. Boudet : *La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps*. Ann. Fond. Louis de Broglie, **13** n°1 1988.
 R. Boudet : *Le corpuscule de Louis de Broglie et la géométrie de l'espace-temps*. (Courants, Amers, Ecueils en microphysique, Ann. Fond. Louis de Broglie, 1993)

- R. Boudet : *The Takabayasi moving Frame, from a Potential to the Z Boson*, in "The Present Status of the Quantum Theory of the Light", S. Jeffers and J.P. Vigièr eds., Kluwer Dordrecht 1995
- [5] W. E. Baylis : *Eigenspinors and electron spin*, in "The Theory of the Electron, Advances in Applied Clifford Algebras **7** (S), 1997
- [6] C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n° 1 1997.
- C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 1 1998
- C. Daviau : *Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 3 - 4, 1998
- C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** n° 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : à paraître.
- [7] C. Daviau : *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht, 1998
- [8] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$* . Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n° 4 1983 et **9** n° 1 1984
- G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin $\frac{1}{2}$ magnetic monopole*. Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985
- G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole*. Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985
- G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992
- [9] : C. Daviau : *Gauge Groups for chiral Dirac equations* submitted to Found. of Phys.
- [10] : C. Daviau : *De nouvelles équations d'ondes relativistes pour les fermions* Ann. Fond. L. de Broglie, **20** n°3 1995
- [11] G. Ziino : *Massive chiral fermions : a natural account of chiral phenomenology in the framework of Dirac's fermion Theory*, Ann. Fond. L. de Broglie, **14** n°4, 1989
- G. Ziino : *On the true meaning of "maximal parity violation" : ordinary mirror symmetry regained from "CP symmetry"* Ann. Fond. L. de Broglie, **16** n°3, 1991

- [12] L. de Broglie : *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la Lumière : tome 1 La Lumière dans le vide*, Hermann, Paris 1940
tome 2 Les interactions entre les photons et la matière, Hermann, Paris 1942.
- L. de Broglie : *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*, Gauthier-Villars, Paris 1954
- L. de Broglie : *Ondes électromagnétiques et photons*, Gauthier-Villars, Paris 1968
- [13] G. Lochak : *Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de de Broglie*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** n° 1 1995
- [14] Louis de Broglie : *La théorie des particules de spin $\frac{1}{2}$* , Gauthier-Villars, Paris 1952.

(Manuscrit reçu le 17 août 2000)