

## Probabilité de présence d'une particule dans les théories de champs à bosses

J. LAMEAU

Ecole Centrale - 1, Rue de la Noë 44321 Nantes Cédex 3, France.

**RÉSUMÉ.** Cet article complète deux articles [1] et [2] déjà publiés par l'auteur dans ces Annales. On y présente une méthode qui pourrait être utilisée pour déterminer la probabilité de présence d'une particule en mouvement dans un champ donné.

*ABSTRACT.* The aim of this paper is to complete the two that the author has published in these Annals in 1988 [1] and 1990 [2]. A method is presented, that can be useful to determine the presence probability of a particle moving in a given field.

Dans les théories de champs à bosses, telles que les théories électromagnétiques de Mie et de Born-Infeld [3], ou la version non dualiste de la Relativité Générale [4], une particule n'est rien de plus qu'une singularité étendue d'un certain champ, c'est-à-dire un très petit domaine où ce champ a une très grande intensité, tout en restant cependant borné. Comme on l'a déjà vu dans [1] et [2], un tel objet ne peut pas être considéré comme indéformable, comme une sorte de petit solide. Son état ne peut pas être défini uniquement par la position et la vitesse de son centre.

Dans la suite, on fait l'hypothèse que les particules sont des singularités étendues d'un champ unitaire  $U$  régi par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui se déduisent d'un principe variationnel associé à un lagrangien  $\mathcal{L}$ . On admet que, sauf dans le voisinage immédiat du centre des particules,  $\mathcal{L}$  est approximativement égal au lagrangien  $L$  associé à l'approximation linéaire des équations du champ. Le champ unitaire  $U$  peut être scalaire, vectoriel ou tensoriel.

On fait aussi l'hypothèse que le champ de gravitation est négligeable, sauf peut-être dans le voisinage immédiat du centre des particules, où la densité d'énergie est extrêmement grande.

Considérons donc une particule qui se déplace dans un domaine  $D$  où elle est soumise à un champ  $v$  d'origine extérieure, supposé connu, et dont l'ordre de grandeur est celui des champs pour lesquels la non-linéarité des équations du champ est négligeable. A cause de ce champ, la particule a non seulement un mouvement accéléré, mais elle subit aussi une déformation qui évolue constamment au cours du temps, et qui lui fait perdre toute symétrie. L'observation et la mesure de cette déformation sont évidemment impossibles pour l'expérimentateur. Mais rien ne permet d'affirmer a priori qu'elle n'a pas de conséquence observable. S'il s'agit d'une particule électriquement chargée, elle se comporte comme un objet porteur non seulement d'une charge, mais aussi d'une infinité de moments électriques et magnétiques multipolaires.

On désignera par  $u$  le champ propre de la particule. L'évolution de ce champ est déterminée par les équations aux dérivées partielles non linéaires qui régissent le champ total  $U = u + v$ .

L'état initial de la particule n'est plus seulement défini par la position et la vitesse initiales de son centre, mais aussi par l'état initial  $u^0(P)$  de son champ propre,  $P$  désignant le point courant. Pour une position et une vitesse initiales données du centre de la particule, il existe une infinité de champs propres  $u^0(P)$  admissibles, qui sont inobservables. A chacun de ces champs propres correspond une trajectoire de la particule. Bien que le mouvement de la particule et l'évolution de sa forme soient régis par des équations à caractère déterministe, il est donc nécessaire d'élaborer une théorie probabiliste du mouvement des particules.

On négligera le "bruit de fond", champ stochastique déjà mentionné dans [1] et [2], dont l'existence est due à tout l'environnement de la particule. Son existence est indéniable, mais le caractère déformable des bosses de champ est suffisant pour rendre nécessaire l'élaboration d'une théorie probabiliste du mouvement des particules. De plus, ce "bruit de fond" est vraisemblablement homogène et isotrope, et sa présence ne doit donc pas modifier les résultats de nature statistique déduits du caractère déformable des bosses de champ.

On admettra enfin que la particule est beaucoup plus petite que le domaine  $D$  où elle se déplace, pratiquement ponctuelle par rapport à lui. Par conséquent, le domaine où la non-linéarité des équations du champ

intervient de manière non négligeable est extrêmement petit par rapport à  $D$  et, à chaque instant, l'approximation linéaire de ces équations est donc valable dans  $D$  presque tout entier.

La particule étudiée pourrait être par exemple un électron en mouvement dans un atome d'hydrogène.  $D$  serait alors l'intérieur d'une sphère centrée sur le proton central, diminué d'une très petite boule également centrée sur ce proton. Le rayon de la première sphère serait celui de l'atome d'hydrogène. L'électron est pratiquement ponctuel par rapport à un tel domaine. Le champ  $v$  serait le champ électrique créé par le proton, et le champ  $u$  le champ propre de l'électron.

Il faut bien sûr que la singularité qui constitue la particule ne soit pas trop déformée par rapport à une structure de référence définie par un champ  $u_S(P)$  correspondant par exemple à la solution statique à symétrie sphérique des équations du champ, ou au champ qui s'en déduit par la transformation de Lorentz. Cette condition pourra s'exprimer par l'inégalité

$$\|u^o(P) - u_S(P)\| < \varepsilon,$$

valable à l'instant initial dans un voisinage suffisamment grand de la particule, la constante  $\varepsilon$  ayant une valeur suffisamment petite. Les doubles barres désignent la norme algébrique du champ. Dans la suite, on désignera par  $E$  l'ensemble des champs  $u^o(P)$  admissibles. Si le champ unitaire  $U$  est régi par des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à un, l'état initial comprendra aussi les valeurs de certaines dérivées temporelles des composantes du champ.

Si  $\rho(P, t)$  est la densité de probabilité de présence de la particule au point  $P$  et à l'instant  $t$ , il faut évidemment que soit vérifiée à tout instant l'égalité :

$$\int_D \rho(P, t) d\tau = 1$$

$d\tau$  désignant l'élément de volume. On doit donc pouvoir associer à  $\rho(P, t)$  un courant de probabilité  $\vec{j}(P, t)$  tel que soit vérifiée l'équation de conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

On peut y parvenir en utilisant le fait que les équations aux dérivées partielles qui régissent le champ sont les équations d'Euler-Lagrange déduites d'un principe variationnel.

Désignons par  $U_\sigma$  les composantes du champ unitaire  $U$ , l'indice  $\sigma$  pouvant représenter d'une manière abrégée plusieurs indices d'espace-temps, chacun d'eux prenant les valeurs 0, 1, 2, 3. La coordonnée temporelle est  $x^0 = ct$ , les coordonnées  $x^1, x^2, x^3$  sont des coordonnées curvilignes quelconques dans l'espace à trois dimensions. Les indices grecs, sauf  $\sigma$ , seront des indices d'espace-temps. Les indices latins, sauf indication contraire, seront des indices d'espace. Comme on admet que la gravitation est négligeable en dehors du voisinage immédiat du centre des particules, on se place dans le cadre de l'espace-temps de Minkowski.

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  associé au principe variationnel est une fonction des composantes  $U_\sigma$  et de leurs dérivées covariantes. Dans le cas où  $\mathcal{L}$  ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à l'unité, le champ  $U$  est régi par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\sigma} - \nabla_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\alpha U_\sigma)} = 0 \quad (1)$$

On lui associe le tenseur d'énergie-impulsion dont les composantes sont les

$$T_{\alpha.}^\beta = \nabla_\alpha U_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\beta U_\sigma)} - \mathcal{L} g_\alpha^\beta \quad (2)$$

Elles vérifient l'équation de conservation

$$\nabla_\beta T_{\alpha.}^\beta = 0 \quad (3)$$

La densité d'énergie  $H$  et le vecteur d'espace  $\vec{S}$ , courant d'énergie, sont définis par les égalités

$$T_{0.}^0 = H \quad , \quad T_{0.}^k = S^k \quad (4)$$

D'après (3), ils vérifient l'équation de conservation

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = 0 \quad (5)$$

Dans l'ensemble  $E$  des champs  $u^o(P)$  qui peuvent représenter l'état initial de la particule, choisissons au hasard  $N$  champs  $u^{o,p}(P)$  ( $p = 1, \dots, N$ ) ainsi que, éventuellement, les valeurs initiales de certaines dérivées temporelles. A chacun de ces champs, associons le champ total

$$U^{0,p}(P) = u^{0,p}(P) + v(P, 0) \quad (6)$$

somme du champ propre de la particule et du champ extérieur à l'instant initial.

A un instant ultérieur quelconque  $t$ , ces champs deviennent respectivement  $U^p(P, t)$ ,  $u^p(P, t)$  et  $v(P, t)$ .

Désignons par  $H^p$  et  $\vec{S}^p$  la densité et le courant d'énergie associés au champ total  $U^p(P, t)$ . D'après (5), on a l'équation de conservation

$$\frac{\partial H^p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S}^p = 0 \quad (7)$$

Désignons par  $H_e$  et  $\vec{S}_e$  la densité et le courant d'énergie associés au champ extérieur  $v$ , qui vérifient l'équation de conservation

$$\frac{\partial H_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S}_e = 0 \quad (8)$$

Désignons enfin par  $h^p$  et  $\vec{s}^p$  la densité et le courant d'énergie associés au champ propre  $u^p$  de la particule. On a évidemment

$$h^p = H^p - H_e \quad , \quad \vec{s}^p = \vec{S}^p - \vec{S}_e$$

d'où, d'après (7) et (8),

$$\frac{\partial h^p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{s}^p = 0 \quad (9)$$

Introduisons la densité moyenne et le courant moyen définis par les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} h_N(P, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N h^p(P, t) \\ \vec{s}_N(P, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \vec{s}^p(P, t) \end{array} \right. \quad (10)$$

D'après (9),  $h_N$  et  $\vec{s}_N$  vérifient l'équation de conservation

$$\frac{\partial h_N}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{s}_N = 0 \quad (11)$$

Définissons les limites

$$\begin{cases} \rho = K \lim_{N \rightarrow \infty} h_N \\ \vec{j} = K \lim_{N \rightarrow \infty} \vec{s}_N \end{cases} \quad (12)$$

$K$  est une constante de normalisation telle que

$$\int_D \rho(P, t) dv = 1$$

Lorsqu'on fait tendre  $N$  vers l'infini, les champs propres  $u^p$  sont choisis au hasard. Le sous-ensemble qu'ils forment dans  $E$  ne doit donc pas avoir de point d'accumulation. Il y a évidemment une infinité de manières de faire ce choix. Moyennant certaines conditions de régularité, on peut admettre que les limites  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont uniques, indépendantes du choix des champs  $u^{o.p}(P)$  dans l'ensemble  $E$ , et que, tout comme  $h_N$  et  $\vec{s}_N$ , elles vérifient l'équation de conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Il est naturel d'admettre que  $\rho$  représente la densité de probabilité de présence de la particule. C'est en effet la densité moyenne d'énergie associée aux champs  $u^p(P, t)$  qui peuvent représenter la particule en mouvement. Or cette densité d'énergie est extrêmement grande dans le voisinage immédiat du centre de celle-ci. La probabilité de présence de cette particule est donc particulièrement grande là où  $\rho$  a une valeur élevée.

De plus, en théorie quantique, la fonction d'onde  $\psi$  et la probabilité de présence d'une particule sont déterminées par l'hamiltonien dont l'expression se déduit de celle de l'énergie de cette particule. De même, dans la méthode ici présentée, la probabilité de présence de la particule est étroitement liée à l'énergie de la bosse de champ qui la représente.

Cependant, en théorie quantique, les équations qui déterminent la fonction d'onde (Schrödinger, Dirac etc...) sont linéaires, alors que la méthode proposée ici est basée sur des équations non linéaires. C'est là qu'intervient l'hypothèse selon laquelle le domaine  $D$  où se déplace la particule est extrêmement grand par rapport à celle-ci, c'est-à-dire par rapport au très petit domaine où la non-linéarité des équations du champ intervient de manière appréciable. Ce qui fait que, à chaque instant,

l'approximation linéaire de ces équations est valable dans le domaine  $D$  presque tout entier.

De plus, pour une position et une vitesse initiales données du centre de la particule, il suffit d'une très faible variation de la structure initiale  $u^o(P)$  pour qu'on obtienne, au bout d'un temps plus ou moins long, deux trajectoires très différentes. Par exemple, dans l'atome d'hydrogène, où l'électron a un mouvement orbital, il suffit d'un infime changement de l'état initial de cette particule pour que, très vite, on obtienne des positions très éloignées, du moins en ce qui concerne les deux variables angulaires. C'est pourquoi, dans les formules (10) qui définissent  $h_N$  et  $\vec{s}_N$ , et où  $N$  peut être considéré comme très grand puisqu'il tend vers l'infini, un point donné quelconque  $P$  est en dehors de la bosse de champ pour presque toutes les valeurs de l'indice  $p$ . Dans presque tous les termes de ces deux formules, on peut donc remplacer le lagrangien  $\mathcal{L}$  par le lagrangien  $L$  associé à l'approximation linéaire des équations du champ. La non-linéarité n'intervient que pour un très petit nombre de valeurs de l'indice  $p$ , et l'on peut, soit négliger les quelques termes correspondants, soit y remplacer  $\mathcal{L}$  par  $L$ . Finalement, pour définir  $h_N$  et  $\vec{s}_N$ , on utilisera le tenseur d'énergie-impulsion associé au lagrangien  $L$ , dont les composantes sont les

$$\tau_{\alpha.}^{\beta} = \nabla_{\alpha} U_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial (\nabla_{\beta} U_{\sigma})} - L g_{\alpha}^{\beta} \tag{13}$$

La non-linéarité des équations du champ n'interviendra donc pas dans les résultats de nature statistique relatifs au mouvement des particules.

Pour mener à son terme la détermination de  $\rho$  et  $\vec{j}$ , il faudrait connaître les fonctions  $u^p(P, t)$ , donc avoir résolu le problème des équations du mouvement d'une particule, et montrer ensuite que le résultat obtenu coïncide avec celui que fournit la théorie quantique. Malheureusement, comme cela a déjà été noté dans [1], on ne peut pas utiliser les méthodes actuellement connues, du moins si l'on veut tenir compte du caractère déformable des bosses de champ. On peut néanmoins remarquer que les fonctions  $u^p(P, t)$  dépendent nécessairement de la solution statique  $u_S(P)$  qui représente la particule immobile soustraite à toute action extérieure. Les fonctions  $u^p(P, t)$  qui correspondent au cas où  $u_S(P)$  a la symétrie sphérique sont évidemment très différentes de celles qui correspondent à d'autres cas de symétrie, par exemple aux cas où  $u_S(P)$  a la symétrie du champ d'un dipôle ou d'un quadripôle. On peut

supposer que cela correspond au fait que l'équation d'onde des particules dépend de leur spin.

Je ne saurais terminer cet article sans rendre hommage et sans exprimer mon amitié à Georges Lochak, Directeur de la Fondation Louis de Broglie. C'est un ami de longue date dont j'ai fait la connaissance il y a maintenant cinquante ans, alors que nous étions étudiants en Physique à Paris, à la Sorbonne. Depuis la création de la Fondation Louis de Broglie, ses conseils et ses encouragements ont été extrêmement précieux pour moi.

### Références

- [1] J. Lameau, Remarques sur les théories de champs à bosses : équations du mouvement d'une particule, onde et moment magnétique associés à une particule, Ann. Fond. Louis de Broglie, 13, n ° 2, 1988
- [2] J. Lameau : Remarques sur le choix des équations fondamentales, dans les théories de champs à bosses, Ann. Fond. Louis de Broglie, 15, n ° 2, 1990
- [3] M. Born, L. Infeld, Proc. Roy. Soc., (A), t. 144, 1934, p. 425
- [4] M.A. Tonnelat, Les théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme, Gauthier-Villars, 1965.

*(Manuscrit reçu le 31 juin 2000)*