L'invariance de jauge et la notion de système isolé
Que signifie l'invariance de jauge pour un expérimentateur ?

G. MOURIER

5 Allée Pacros, F-78124 Mareil sur Mauldre

RÉSUMÉ. On trouvera ici des réflexions et des rappels simples qui m'ont semblé importants au cours d'une correspondance privée avec deux membres éminents de la Fondation de Broglie, à propos d'expériences de A. Tonomura et de V. F. Mikhaïlov.

La méthode scientifique est basée sur l'étude de systèmes simples et souvent isolés. Galilée étudia la chute des corps. Il rejeta l'attraction universelle. Il considérait le mouvement des objets dans ce que nous appelons un champ prédéterminé. Le système simple se réduisait dans ce cas à une particule, et il n'était pas isolé. En étudiant la dynamique d'un système constitué par la terre et la pierre ou la pomme, ou par un astre et un satellite, Newton considérait des systèmes isolés complets. C'était un pas important.

La première approche est pourtant de loin la plus simple. Trois siècles après Galilée, l'ouvrage de Landau et Lifshitz, *Théorie classique des champs*, ne traita qu'un cas d'interaction entre les corps, celui d'une collision binaire ; il se limitera en général au mouvement des corps dans des champs préétablis et aux équations de champ. Un seul paragraphe, sur le défaut de masse, est consacré à un système de plusieurs corps. Encore donne-t-il une expression de la masse de ce système sans la justifier par la dynamique qui est l'objet de l'ouvrage.

Le point de vue des champs préétablis est en fait une approximation valable lorsque l'un des corps est très massif, ce qui est le cas, suivant le problème considéré, pour le soleil, la terre ou un accélérateur de particules. Le point de vue d'un système isolé de corps en interaction est le plus général.

La question de l'origine des potentiels est en pratique liée à ces considérations. La mécanique Galiléenne conduisit Leibniz à la notion d'énergie potentielle, mais les expériences, vues dans l'optique des champs préétablis, ne mettent en jeu que des variations d'énergie potentielle d'un corps, ce qui introduit la notion d'une origine arbitraire des potentiels. Il faut remarquer que l'énergie potentielle apparaît dans ces problèmes comme une propriété du corps mobile.

Dans le traitement interactif, l'énergie potentielle U est au contraire clairement une propriété de l'ensemble d'un système isolé. Il semble naturel de choisir de la prendre nulle lorsque les constituants ne sont pas en interaction, lorsqu'ils sont dispersés à l'infini. Si l'on accepte ce choix, on écrira, dans le cas électrostatique :

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{R_{i,j}}$$

Est-il suffisant de considérer les charges du système étudié ? Il est facile de faire tendre *Rij* vers l'infini sur le papier. Dans une expérience, la notion d'infini n'est pas évidente et il est moins facile d'être sûr que des charges extérieures n'interfèrent pas. Que l'on considère un ensemble supposé isolé de charges électriques ou de masses gravitationnelles, il est impossible de spécifier les champs de forces dans tout l'espace, comme il est en principe nécessaire pour déterminer les potentiels. Heureusement, la théorie du potentiel permet à l'expérimentateur d'éviter ce problème, qui prendrait souvent une dimension cosmique.

On veut connaître les champs électriques dus à un système de charges bien défini dans l'espace. On considère une surface fermée S extérieure à ces charges. D'après le théorème de Green, la valeur du potentiel électrique en un point intérieur $\boldsymbol{r}$ est :

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV}{4\pi\varepsilon_0 R} + \int_S \frac{\nabla\Phi(\boldsymbol{r}')\cdot d\vec{S}}{4\pi R} + \int_S \frac{\Phi(\boldsymbol{r}')}{4\pi R^2}$$

où $\boldsymbol{r}'$ repère un point quelconque du volume V intérieur à la surface S et R est la distance entre un point $\boldsymbol{r}$ et un point $\boldsymbol{r}'$:

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 (z-z')^2}$$

La première intégrale est conforme à la loi de Coulomb, avec une hypothèse sur la constante d'intégration. Les deux dernières contiennent le potentiel et son gradient sur la surface S. L'action éventuelle de charges extérieures à S est contenue dans ces deux intégrales. Or, il est souvent possible de choisir à l'intérieur du laboratoire, et sans considérations telluriques ou cosmiques, le volume V suffisamment grand pour que le gradient de Φ soit nul sur S, ce qui peut être vérifié expérimentalement. On a, dans ce cas :

$$\nabla\Phi(\boldsymbol{r}') = 0 \qquad \Phi(\boldsymbol{r}') = Cte = \Phi_S$$

$$\Phi\,(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\Phi_S}{4\pi}\int_S \frac{dS}{R^2}$$

La dernière intégrale est l'angle solide sous lequel on voit S du point $\boldsymbol{r}$, c'est-à-dire 4π, et on obtient :

$$\Phi\,(\boldsymbol{r}) - \Phi_S = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

C'est dans Φ_S qu'interviennent toutes les charges qui se trouvent à l'extérieur de S. Le problème de l'origine des potentiels est évité si l'on admet ignorer Φ_S et ne connaître $\Phi(r)$ qu'à une constante près, qui n'a pas d'influence sur le champ électrique et les forces. D'autre part, il existe un moyen de créer une surface S : c'est la cage de Faraday. On n'a plus à déterminer le potentiel à l'infini par rapport à une référence locale, ce que l'on serait bien en peine de faire, et qui, répétons-le, est beaucoup plus difficile que de faire tendre R vers l'infini dans une expression mathématique. La théorie électrostatique nous dit que les potentiels et les forces électriques à l'intérieur de la cage de Faraday sont indépendants du milieu dans lequel celle-ci est située. Qu'elle soit reliée à une "terre", accrochée à un ballon à plusieurs kilomètres de hauteur, à près d'un Gigavolt par rapport à la terre, les forces électrostatiques sur les charges seront les mêmes. C'est une conséquence de l'invariance de jauge ; cela signifie pour un expérimentateur qu'il peut se contenter de spécifier les différences de potentiel entre les électrodes auxquels sont exposées les particules chargées dans le dispositif qu'il étudie. Il n'a pas besoin de savoir si sa prise de terre diffère de 100 volts de celle de son collègue d'Orléans, ou si la terre se trouve à 200 MV par rapport au potentiel moyen du système solaire ou de la galaxie. S'il n'en était pas ainsi, la définition d'un potentiel local serait un problème cosmique.

Pour les problèmes gravitationnels, il n'existe pas de cage de Faraday, mais la définition de la masse gravitationnelle par la loi en $1/r^2$ garantit que les forces seront également indépendantes du potentiel Φ_s.

En ce qui concerne le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ d'une distribution statique de courants électriques $\boldsymbol{i}$, il existe une relation analogue, dont la démonstration est moins familière [1] , mais le résultat identique : pourvu que l'on puisse définir une surface S sur laquelle $\boldsymbol{B}$ est nul et $\boldsymbol{A}$ est uniforme et égal à $\boldsymbol{A_s}$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}_S = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{i}\,dV}{R}$$

Dans le cas des courants variables, la définition d'un système isolé est plus délicate. Les conditions d'unicité des solutions des équations de Maxwell comportent les charges et leurs mouvements à l'intérieur d'une surface S ainsi que les valeurs de certaines composantes de champ sur S depuis un temps origine, ainsi que les valeurs des champs dans V à ce temps origine. Le système n'est plus véritablement isolé parce qu'il peut rayonner à travers S. Il est indispensable en principe de spécifier les conditions à l'extérieur de la surface S parce que le rayonnement qui en sort est partiellement réfléchi par des obstacles extérieurs et pénètre de nouveau dans S. Cet effet est généralement négligeable en pratique ; il est négligé en théorie des antennes. Il n'est pas négligeable en théorie des particules parce qu'un système isolé doit comprendre non seulement la particule elle-même, mais aussi les rayonnements qu'elle reçoit ou qu'elle émet.

En mécanique quantique, ce sont les potentiels, et non les champs, qui figurent dans les équations d'ondes; les fonctions d'ondes dépendent des potentiels et donc de la jauge. Mais les quantités mesurables, en particulier la densité et le courant de probabilités n'en dépendent pas.

* * *

D'innombrables expériences sont effectuées dans le potentiel vecteur du champ terrestre qui, sous l'hypothèse axisymétrique, a la valeur :

$$A_\varphi = B\, a \sin\theta$$

B étant le champ à l'équateur, a le rayon de la terre et θ la colatitude. $B\,a$ est de l'ordre de 100 Tesla-mètre, valeur qui n'est pas atteinte dans les plus grands circuits supraconducteurs actuels. Cette quantité considérable ne joue généralement aucune rôle dans les expériences parce qu'il est facile de trouver autour de l'expérience une surface sur laquelle ce potentiel est uniforme avec un haut degré de précision. En outre, la condition de l'uniformité de $\boldsymbol{A}$ sur S peut être élargie puisque les événements mesurables restent inchangés par l'addition d'un gradient à A.

En résumé, tant en mécanique quantique qu'en mécanique classique, les phénomènes observables sont indépendants de la jauge électromagnétique et de l'origine des potentiels gravitationnels, ce que requiert la notion de système isolé. Au contraire, toute théorie qui rejette l'invariance de jauge demande une nouvelle mécanique quantique aussi bien que classique, rend caduque la notion de système isolé et fait intervenir tout l'espace extérieur aux appareillages, a priori sans limite. Cette nouvelle théorie ne pourrait évidemment être déduite de la théorie quantique actuelle. Ce serait une nouvelle théorie des interactions. Sa nécessité pourrait être montrée par des expériences qui, pour des champs donnés, dépendraient des potentiels. La nouvelle dynamique permettrait en principe de déterminer de manière absolue le potentiel en un point donné. A partir des équations de champ, elle pourrait éventuellement expliquer ou prévoir dans les mouvements relatifs des constituants d’un système des anomalies par rapport à la théorie en vigueur, aussi bien pour une interaction gravitationnelle qu’électrique.

* * *

Les théorèmes de Green et apparentés sont établis dans l’espace euclidien et supposent des champs newtoniens. La relativité générale permettrait-elle de fixer les jauges? Les métriques sans torsion habituellement considérées impliquent l’invariance de jauge.

* * *

Selon de Broglie [2], “le potentiel peut être incorporé à la masse propre” . Il me semble qu’il ne s’agit pour lui que du potentiel d’interaction, mais plusieurs physiciens sont allés plus loin. Ainsi V. F. Mikhaïlov a observé que la fréquence d’un oscillateur électronique placé dans une cage de Faraday dépend du potentiel V de cette cage par rapport à la terre, et il attribue œ phénomène à une variation de la masse des électrons [3]. Cette variation serait de l’ordre de eV/c^2. Le mécanisme des oscillations est complexe et une dynamique générale, complète et cohérente, conforme à la variation de masse prédite n’a pas été formulée, à ma connaissance, ce qui rend la vérification expérimentale douteuse.

* * *

En résumé, c’est l’invariance de jauge qui permet les expériences *locales*. Elle est vérifiée expérimentalement avec grande précision par le fonctionnement d’innombrables appareils. Je citerai en particulier les lasers du Global Positioning System qui fonctionnent dans des satellites. En altitude règnent des potentiels électrostatiques de mégavolts par rapport à la terre, ainsi que le potentiel vecteur élevé de cette dernière. Aucune anomalie n’a été constatée, conformément à la théorie courante. L’invariance de jauge ne pourrait donc être mise en défaut que par des expériences d’une précision exceptionnelle qui contrediraient la physique quantique actuellement admise [4].

Dans la limite des plus grandes précisions atteintes actuellement, imposer une origine des potentiels serait aussi arbitraire et inutile que d'imposer une choix unique de coordonnées pour toutes les expériences de physique.

ANNEXE

Interférences électroniques et potentiel vecteur magnétique

Récemment, G. Lochak a considéré l'influence d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ sur une expérience d'interférences électroniques [5]. Selon lui, il en résulterait un déplacement de la frange centrale et une modification de l'interfrange même si le champ magnétique est nul dans la région intéressée. Ce résultat est contraire à un théorème de mécanique quantique suivant lequel les effets observables sont indépendants de la jauge électromagnétique ; il infirmerait l'invariance de jauge en rendant $\boldsymbol{A}$ mesurable.

Selon G. Lochak, les physiciens qui ont considéré ce problème n'ont pas vu qu'il faut calculer la phase le long de la vitesse de groupe des ondes de de Broglie, qui est la vitesse des électrons observés, et non dans la direction de propagation. En effet, le faisceau d'ondes suit la vitesse de groupe, même si les ondes semblent se propager "de travers" au sein du faisceau.

Il est clair que, sans commettre l'erreur indiquée par G. Lochak, sa méthode de calcul montre que le potentiel vecteur n'agit que dans la mesure où il existe un champ magnétique local, conformément au théorème bien connu.

Pour des électrons de 100 eV, la longueur d'onde de de Broglie est de 1,22 10-10 m, très petite devant les dimensions du système expérimental. On peut donc évaluer les phases ϕ par des intégrales du type :

$$\hbar\varphi = \int \vec{p} \cdot \vec{dl}$$

suivant l'approximation WKB, prises le long des trajectoires des électrons, ou même de tout parcours entre la source et le point d'impact.

En présence d'un potentiel vecteur, c'est l'impulsion canonique

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A}$$

qui joue. Il faut donc écrire :

$$\hbar\varphi = \int \vec{p} \cdot \vec{dl} + \int q\vec{A} \cdot \vec{dl}$$

Dans la première intégrale, le produit vectoriel scalaire se réduit à un produit algébrique, selon la remarque de G. Lochak, si l'on intègre le long des parcours classiques des électrons. A ce premier terme de phase, qui correspond à une expérience où ***A*** est nul, s'ajoute algébriquement le terme en ***A*** :

$$\int q\vec{A}\cdot\vec{dl}$$

Il s'agit de considérer au moins deux intégrales de ce genre, prises sur différents parcours. Pour assurer la cohérence de phase, il est indispensable que toutes les intégrales soient prises d'un point source S commun à un même point d'impact M. Or, il est clair que ces différentes intégrales seront toutes égales si ***A*** est un gradient. Si ***B*** est nul, elles ne modifieront donc ni les différences de phase en M, ni les observations. Dans le cas contraire, le théorème de Stokes entraîne qu'il existera des modifications données par des intégrales de contour de ***A***, c'est-à-dire par le flux de ***B*** à travers des surfaces s'appuyant sur deux chemins d'intégration.

C'est seulement si l'on effectue les intégrales sur des trajectoires incomplètes qu'une différence de phase due à ***A*** peut apparaître dans le calcul.

Il faut souligner que la méthode de calcul célèbre depuis Young et Fresnel n'est qu'approximative ; un calcul rigoureux demande l'intégration de l'équation d'onde en observant les conditions aux limites sur le circuit magnétique et sur la source des électrons. Il est possible que l'effet prédit par G. Lochak existe dans un espace supposé sans champ, mais voisin d'un champ, car les surfaces équiphase ne restent pas planes au voisinage de la source magnétique. Cet effet serait de toute manière assez petit et indépendant de la jauge.

Références

[1] Stratton J., *Electromagnetic theory,* McGraw-Hill, (1941).

[2] de Broglie L., Comp. Rend. Acd. Sci., **275B**, 899, (1972).

[3] Mikhailov V.F., Ann. Fond. Louis de Broglie, **24**, 161-169, (1999).Costa de Beauregard O. and Lochak G., Ann. Fond. Louis de Broglie, **24**, 159-160, (1999).

[4] Costa de Beauregard O., Lochak G., Ann. Fond. Louis de Broglie, **25**, 303-308, (2000).

[5] Lochak G., Ann. Fond. Louis de Broglie, **25**, 107-127, (2000).

(Manuscrit reçu le : 30 octobre 2000)