Matière cachée et relativité générale

Nikias Stavroulakis

Solomou 35, 15233 Chalandri, Grèce

Dédié à Georges Lochak

RÉSUMÉ. Contrairement aux prévisions des théories gravitationnelles classiques, les observations astronomiques montrent que les vitesses d'orbitation des étoiles dans une galaxie se stabilisent à une valeur constante non nulle ou croissent très faiblement à proximité du bord de la galaxie.

Pour s'en rendre compte, la plupart des astrophysiciens postulent l'existence d'une quantité énorme de matière invisible dans l'univers. Dans le présent article on propose une nouvelle approche du problème sans faire appel à une matière cachée. On montre que, si l'on attribue à la soi-disant constante cosmologique une nouvelle signification, alors les équations d'Einstein sont à même de rendre compte du comportement constatée des vitesses d'orbitation.

Dark matter and general relativity

ABSTRACT. The rotation curve related to the speeds of the stars orbiting close to the edge of a galaxy is flat or slowly rising out to the last measured point. In order to account for this phenomenon, which is inexplicable by the classical theories of gravitation, most astrophysicists postulate the existence of a huge quantity of dark matter in the universe. In the present paper we propose a different approach to this problem without referring to the dark matter hypothesis. We prove that, if the so-called cosmological constant is given a new meaning, then the Einstein equations can account for the observed speeds of the stars in a galaxy.

1. Introduction

D'après les calculs fondés sur la mécanique classique, la vitesse d'orbitation des étoiles dans une galaxie augmente d'abord, en fonction de la distance au centre, presque linéairement jusqu'à une valeur maximale et ensuite décroît et tend rapidement vers zéro. Or les observations astronomiques ne confirment pas cette prévision. Au lieu de décroître, la vitesse d'orbitation se stabilise à une valeur constante ou croît très faiblement au fur et à mesure que la distance augmente. Pour expliquer ces survitesses périphériques, la plupart des astrophysiciens postulent l'existence d'une quantité énorme de matière invisible (ou matière cachée ou matière sombre ou matière manquante) dix fois supérieure à la matière totale visible, distribuée de façon tout à fait spécifique sous forme d'un halo s'étendant bien au delà du bord visible de la galaxie.

Une situation analogue, mais encore plus déconcertante, se constate à propos des vitesses des galaxies dans un amas de galaxies. Dans ce cas, suivant les calculs des astrophysiciens, la masse invisible doit être cent fois supérieure à la masse observable de l'amas.

Tant que l'on reste dans le cadre de la gravitation de Newton ou dans celui de la relativité générale telle qu'elle est présentée actuellement, l'hypothèse de la matière cachée est incontournable. En effet, s'il n'existe pas de matière cachée, les vitesses d'orbitation circulaire montrent clairement que la loi gravitationnelle de Newton cesse d'être valable à partir d'un certain ordre de grandeur de la distance au centre. Et il en est de même de la théorie gravitationnelle d'Einstein sous sa forme classique.

Cependant, malgré les moyens mis en œuvre pour la détection de la matière invisible, leurs résultats sont décevants. Les observations ne confirment pas l'existence de la matière cachée. Dans ces conditions, certains astrophysiciens ont été conduits à proposer la théorie de la matière-ombre (shadow matter). D'après cette théorie, la matière-ombre constitue un deuxième univers dans le même espace que le nôtre, mais totalement inaccessible à nos sens et à nos moyens d'investigation. Aucun échange de matière ou de rayonnement n'est réalisable entre les deux univers, leur seule interaction étant de nature gravitationnelle. Nous ne nous proposons pas d'entrer dans une discussion de ces idées dont la coloration fortement métaphysique est évidente, de sorte que la seule question qui se pose naturellement est la suivante :

Peut-on présenter des éléments d'explication du phénomène évoqué (platitude des courbes de rotation) sur la base de la matière visible en faisant usage de la relativité générale complétée par des notions et des paramètres négligés classiquement ?

La réponse à cette question est positive. Le paramètre négligé est en fait la soi-disant constante cosmologique Λ qui intervient traditionnellement uniquement dans les problèmes cosmologiques. On sait que cette constante est liée à une idée extrêmement ambitieuse qui s'est fait jour très tôt dans l'étude de la relativité générale, à savoir à l'idée que les équations de gravitation d'Einstein sont aptes à nous faire connaître la structure de l'univers dans sa totalité. Cependant l'idée de départ de la gravitation d'Einstein était beaucoup plus modeste : Associer la conception du champ gravitationnel aux métriques spatio-temporelles afin d'en faire une action se propageant de proche en proche et d'en obtenir une détermination plus précise que celle de Newton au voisinage des distributions de matière et sur des domaines de plus en plus vastes suivant les possibilités des calculs. Le retour à ce point de vue nous amène à penser qu'il n'y a aucune raison d'attribuer un rôle spécifique, un rôle cosmologique, à la constante Λ, qui doit, en conséquence, figurer conjointement avec la constante de Newton k dans les équations de gravitation relatives à une distribution quelconque de matière. Dans ces conditions, il convient même d'abandonner le terme constante cosmologique et de considérer simplement Λ comme une deuxième constante gravitationnelle.

Les cosmologistes pensent que la constante Λ traduit l'influence du "vide" sur les effets gravitationnels et parlent parfois de "forces répulsives du vide". Or la notion de force n'a pas droit de cité en relativité générale. La constante Λ est un élément primordial dans la conception des équations de gravitation, et l'on se contente d'étudier les conséquences de sa présence dans leurs solutions. Nous n'essayons pas d'élucider "l'origine" de la constante Λ.

Bien entendu on sera particulièrement attentif au signe qu'il faut attribuer à la constante Λ. Il y a à cet égard une grande confusion dans la littérature scientifique. En fait le signe de Λ est commandé par les solutions elles-mêmes des équations de gravitation, solutions qui entraînent, comme nous le verrons $\Lambda < 0$. Or étant donné que l'on pose

$$\Lambda = -3\lambda$$

pour la commodité des calculs, on aura $\lambda > 0$.

Cela dit, la calcul des vitesses d'orbitation, d'après la théorie de Newton, est basé sur une hypothèse extrêmement simplificatrice. La distribution de la matière dans la galaxie est supposée isotrope par rapport à son centre. Or celui-ci est mal défini et de plus l'hypothèse de l'isotropie est certainement inexacte. Cependant on l'accepte du fait que les mouvements circulaires considérés se réalisent sensiblement sur ple plan de symétrie de la galaxie. C'est la raison pour laquelle l'idée de l'isotropie par rapport à un centre sera reprise dans l'approche du problème suivant les principes de la relativité générale. La distribution de la matière sera aussi supposée stationnaire. Cette hypothèse est acceptable dans la mesure où les mouvements d'orbitation des constituants de la distribution de matière ne perturbent pas les caractéristiques de l'ensemble de la formation.

Cela dit, puisque la distribution de matière est supposée stationnaire et isotrope par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^3$, nous raisonnons finalement sur le cas théorique où elle occupe une boule fermée stationnaire Q_0 dont le rayon sera noté ρ_0

$$Q_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\| \leq \rho_0\}$$

Nous supposons d'ailleurs qu'elle ne comporte pas de charges électriques, car celles-ci ne jouent aucun rôle dans les questions que nous allons aborder.

La métrique spatio-temporelle correspondante sera stationnaire et $\Theta(4)$-invariante, donc de la forme

$$ds^2 = \big(fdt + f_1(xdx)\big)^2 - l_1^2 dx^2 - \frac{l^2 - l_1^2}{\rho^2}(xdx)^2 \tag{1.1}$$

$$(dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad , \quad xdx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3) \quad ,$$

où f, f_1, l, l_1 sont des fonctions paires C^∞ de $\rho = \|x\|$, dont aussi C^∞ par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3, avec les conditions

$$|\rho f_1(\rho)| \leq l(\rho) \quad , \quad l(o) = l_1(o)$$

On sait qu'il est commode d'introduire les fonctions

$$h(\rho) = \rho f_1(\rho) \quad , \quad g(\rho) = \rho l_1(\rho)$$

à cause de leur signification géométrique et physique. La première commande essentiellement le choix de la datation sur les géodésiques radiales à l'extérieur de Q_0. La deuxième est le rayon de courbure des sphères de centre O par rapport à la métrique spatiale (définie positive)

$$l_1^2 dx^2 + \frac{l^2 - l_1^2}{\rho^2}(xdx)^2 \tag{1.2}$$

et joue un rôle prépondérant dans les solutions des équations de gravitation et dans la discussion des problèmes que nous avons en vue.

2. Sur la solution des équations de gravitation

On sait [1], [2], que la solution des équations de gravitation relatives à (1.1) à l'extérieur de Q_0 est donnée par les deux relations ci-après :

$$f^2 = c^2\Big(1 - \frac{2\mu}{g} + \lambda g^2\Big) \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{dg}{d\rho}\right)^2 = l^2\left(1 - \frac{2\mu}{g} + \lambda g^2\right) \tag{2.2}$$

avec $\mu = km/c^2$. La fonction $h = h(\rho)$ n'y intervient pas.

Il y a alors deux problèmes qui se posent d'abord de façon tout à fait naturelle.

Premièrement la question relative au signe de la constante $\lambda = -\frac{1}{3}\Lambda$.

Deuxièmement la question relative au domaine de validité de la solution (traditionnellement on suppose à tort que la solution soit valable sur la totalité de l'ouvert extérieur $\mathbb{R}^3 - Q_0$).

2.1. Détermination du signe de λ

D'après (2.2), on a nécessairement

$$1 - \frac{2\mu}{g} + \lambda g^2 = 0$$

mais l'égalité

$$1 - \frac{2\mu}{g} + \lambda g^2 = 0$$

est exclue, car, d'après (2.1), elle implique $f = 0$, c'est-à-dire qu'elle donne lieu à une dégénérescence de la métrique spatio-temporelle. En conséquence la fonction $g = g(\rho)$, $\rho \geq \rho_0$, satisafait à la condition

$$1 - \frac{2\mu}{g(\rho)} + \lambda(g(\rho))^2 > 0 \tag{2.3}$$

Si la constante λ est non nulle, comme nous le supposons, il en résulte $\lambda > 0$. Pour le prouver, raisonnons par l'absurde et supposons $\lambda = -\alpha < 0$. Alors la fonction

$$\psi(u) = 1 - \frac{2\mu}{u} - \alpha u^2$$

est croissante sur l'intervalle

$$\left]0, \sqrt[3]{\mu/\alpha}\right] \quad ,$$

décroissante sur la demi-droite

$$\left]\sqrt[3]{\mu/\alpha}, +\infty\right] \quad ,$$

de sorte que la valeur

$$\psi\left(\sqrt[3]{\mu/\alpha}\right) = 1 - 3\sqrt[3]{\alpha\mu^2}$$

est le maximum de $\psi(u)$ sur $]0, +\infty[$.

Si $\alpha\mu^2 \geq 1/27$, ce qui a certainement lieu pour une très grande concentration de matière, on a $\psi(u) \leq 0$ pour tout $u \in]0, +\infty[$, de sorte qu'il n'existe alors aucune valeur de $g(\rho)$ vérifiant la condition (2.3). Par conséquent l'hypothèse $\lambda = -\alpha < 0$ est à rejeter lorsque $\alpha\mu^2 \geq \frac{1}{27}$ et puisque λ est une constante indépendante de μ, on a nécessairement $\lambda > 0$.

On peut renforcer cette conclusion en montrant que la condition $\alpha\mu^2 < \frac{1}{27}$ conduit aussi à rejeter l'hypothèse $\lambda = -\alpha < 0$. En effet, il existe alors un intervalle borné $]\beta_1, \beta_2[, 0 < \beta_1 < \beta_2$, tel que $\psi(u) < 0$ sur $]0, \beta_1[$ et sur $]\beta_2, +\infty[\quad , \quad \psi(\beta_1) = \psi(\beta_2) = 0$, et $\psi(u) > 0$ sur $]\beta_1, \beta_2[$. Dans ces conditions, la solution est définie sur le domaine borné :

$$\left\{ x \epsilon \mathbb{R}^3 | \beta_1 < \|x\| < \beta_2 \right\}$$

avec dégénérescences sur les deux sphères $\|x\| = \beta_1$ et $\|x\| = \beta_2$. La deuxième dégénérescence présuppose physiquement l'existence de matière couvrant la sphère $\|x\| = \beta_2$, de sorte que toute masse m pour laquelle

$$\frac{km}{c^2} = \mu < \frac{1}{\sqrt{27\alpha}}$$

doit être entourée d'une couche sphérique de matière, ce qui est absurde physiquement.

En conséquence la constante gravitationnelle λ est nécessairement positive.

Il en résulte en particulier que la fonction

$$1 - \frac{2\mu}{u} + \lambda u^2$$

est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule pour une valeur unique, notée $2\mu_1$, de u avec $0 < 2\mu_1 < 2\mu$. Alors la métrique dégénère pour $g = 2\mu_1$, de sorte que cette valeur n'intervient pas dans la solution physique. Par conséquent $g(\rho_0) > 2\mu_1$. En outre la fonction $g(\rho)$ est C^∞ est ¿strictement croissante pour $\rho \geq \rho_0$.

Cela dit, la présence de la constante λ dans la solution doit être vue à la lumière de la constatation faite dans l'introduction :

Dès que l'on rejette l'hypothèse de la matière invisible, il en résulte que la théorie gravitationnelle d'Einstein sous sa présentation classique cesse d'être valable à partir d'un certain ordre de grandeur de la coordonnées radiale.

Or le formalisme classique de la gravitation d'Einstein est fondé essentiellement sur la condition $\lambda = 0$. Par conséquent, pour aborder le problème évoqué dans le cadre de la relativité générale sans matière invisible, la seule issue possible consiste à tenir compte de la condition $\lambda > 0$. En effet, la métrique qui en résulte présente alors de nouvelles caractéristiques qui deviennent de plus en plus notables au fur et à mesure que la coordonnée radiale augmente.

Remarque 2.1.

Les constantes k et λ induisent des actions gravitationnelles différentes, voire opposées. Puisque la constante k figure uniquement comme coefficient dans l'expression de

$$\frac{2\mu}{g(\rho)} = k\Big(\frac{2m}{c^2}\frac{1}{g(\rho)}\Big) \quad ,$$

sa contribution s'affaiblit quand on s'éloigne de la matière. Pour ce qui concerne la constante λ, elle n'affecte pas la masse, mais le carré du rayon de courbure dans le terme

$$\lambda(g(\rho))^2 \quad .$$

Vu son ordre de grandeur, sa contribution est négligeable pour les petites valeurs de $g(\rho)$, mais devient de plus en plus marquée au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la matière.

2.2. Sur le domaine de validité de la solution

Comme la distribution de matière Q_0 n'est pas seule dans $\mathbb{R}^3$, la métrique (1.1) n'est pas valable sur l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ tout entier, et, par conséquent, la solution qui en résulte n'est pas non plus valable sur la totalité de l'ouvert $\mathbb{R}^3 - Q_0$. Il faut donc tenir compte de l'existence d'autres distributions de matière dans $\mathbb{R}^3$.

Bien entendu ce qu'on appelle distributions de matière dépend du contexte où l'on se place. A l'échelle des étoiles, il s'agit d'étoiles. A l'échelle des galaxies (resp. des amas de galaxies), il s'agit de galaxies (resp. d'amas de galaxies). Quelle que soit la situation envisagée, les autres distributions de matière sont aussi représentées par des compacts (au sens topologique du terme qui n'entraîne pas la connexité) :

$$Q_1, Q_2, \quad \ldots \quad , \quad Q_n \quad , \quad \ldots$$

suffisamment éloignés les uns des autres et aussi suffisamment éloignés de Q_0.

Supposons que le tenseur impulsion-énergie s'annule sur l'ouvert

$$\mathbb{R}^3 - (Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n \cup \ldots)$$

Alors chaque compact Q_n, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, possède dans $\mathbb{R}^3$ un voisinage, nécessairement borné, dans lequel le champ gravitationnel est conditionné uniquement par la distribution de matière correspondante, l'influence des autres distributions de matière y étant pratiquement nulle. Un tel voisinage sera appelé *distingué*.

Pour préciser cette idée, rapportons-nous à la boule de matière Q_0, et considérons une boule ouverte de centre O contenant Q_0 :

$$B = \{x \epsilon \mathbb{R}^3 | \|x\| < \beta \quad ; \quad \beta > \rho_0\}$$

Alors, pour que cette boule soit distinguée par rapport à Q_0, il faut évidemment qu'elle laisse à son extérieur les autres distributions de matière

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

Mais cela ne suffit pas. Il faut en outre qu'elle soit assez éloignée de

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

Alors en diminuant au besoin le rayon β, on obtient finalement une valeur $\beta_0 > \rho_0$ telle que la boule

$$B_0 = \{x \epsilon \mathbb{R}^3 | \|x\| < \beta_0\}$$

soit distinguée. La valeur β_0 n'est pas définie de façon unique et d'ailleurs toute valeur du rayon dans l'intervalle $]\rho_0, \beta_0[$ donne lieu à une boule distinguée. Cependant on s'intéresse manifestement à la valeur la plus grande possible de β_0. Mais une telle valeur n'est pas définissable de façon claire, car il n'y a pas une coupure nette entre le champ associé strictement à Q_0 et son prolongement. En fait la $\Theta(4)$-invariance de la métrique disparaît progresivement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de Q_0. On se rapporte donc à *la boule maximale* B_0 sans oublier que sa frontière n'est pas définie de façon mathématiquement précise. Du point de vue physique, il faut substituer à la sphère $\|x\| = \beta_0$ une couche sphérique dans laquelle se réalise progressivement le passage dans une région où la $\Theta(4)$-invariance n'est plus acceptable physiquement. Par conséquent la boule maximale B_0 peut être considérée aussi bien comme boule ouverte que comme boule fermée.

Peut-on concevoir un voisinage distingué de Q_0 plus vaste que la boule B_0 ? Un tel voisinage résulterait nécessairement d'une extension partielle de B_0, c'est-à-dire d'une extention respectant une partie de la frontière (ou presque frontière) $\|x\| = \beta_0$. Mais cela est impossible, car la $\Theta(4)$-invariance est concevable uniquement par rapport à une boule ouverte ou fermée.

Cela dit, la fonction $g(\rho)$ de notre solution étant définie sur une boule fermée, elle est bornée. Lorsqu'il s'agit de phénomènes cosmiques, sa borne supérieure sera aussi d'ordre cosmique, c'est-à-dire d'ordre de grandeur très élevé. Mais l'étude des vitesses d'orbitation montrera qu'elle doit être telle que les valeurs de $\sqrt{\lambda} g(\rho)$ soient relativement petites dans B_0. Compte tenu de l'ordre de grandeur de λ, ce comportement de $g(\rho)$ est bien concevable dans le cadre de notre solution.

Remarque 2.2.

Puisque la contribution de la constante k est négligeable pour les grandes valeurs de $g(\rho)$, le champ gravitationnel est conditionné, à partir d'une valeur de $g(\rho)$, donc, en particulier, près du bord de la boule B_0, par la constante λ. Il est donc raisonnable de supposer que la constante λ commande aussi les propriétés du champ gravitationnel au delà de B_0, bien que la situation gravitationnelle dans cette région soit inconnue.

Remarque 2.3.

Supposons que les autres distributions de matière

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

soient aussi $\Theta(4)$-invariantes. Alors Q_n possède un voisinage maximal distingué qui s'identifie à une boule $B_n, (n = 1, 2, \ldots)$. Les boules ainsi définies

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$$

sont manifestement assez éloignées les unes des autres. D'autre part, d'après la remarque précédente, la constante λ doit conditionner le champ gravitationnel au delà de $B_n,\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Par conséquent la constante λ doit jouer un rôle fondamental dans la conception et le comportement du champ gravitationnel sur la région multiplement connexe

$$\mathbb{R}^3 - (B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots).$$

3. Vitesse d'orbitation circulaire

Nous nous proposons maintenant de calculer la vitesse d'orbitation d'une particule test de masse au repos non nulle décrivant une orbite circulaire du centre O dans l'ouvert $B_0 - Q_0$. Nous détaillons les calculs en évitant délibérément l'utilisation des coordonnées polaires afin de rester constamment dans le cadre de la variété du problème.

Rappelons d'abord brièvement les intégrale premières qui définissent, dans le cas général, le mouvement d'une particule test dans un champ stationnaire $\Theta(4)$-invariant.

Comme les équations des géodésiques correspondant aux coordonnées x_1, x_2, x_3 entraînent

$$\frac{d}{ds}\left(x_i \frac{dx_j}{ds} - x_j \frac{dx_i}{ds}\right) + 2\left(\frac{d}{ds} ln \frac{g(\rho)}{\rho}\right)\left(x_i \frac{dx_j}{ds} - x_j \frac{dx_i}{ds}\right) = 0$$

il en résulte

$$\left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 \left(x_i \frac{dx_j}{ds} - x_j \frac{dx_i}{ds}\right) = \alpha_k = Cte \quad ,$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3 \quad , \quad i \neq j \neq k \neq i),$$

d'où en particulier

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire que la particule test se déplace sur un plan vectoriel que l'on identifie au plan $x_3 = 0$, ce qui donne l'intégrale première

$$\left(\frac{g(\rho)}{\rho}\right)^2 \left(x_1 \frac{dx_2}{ds} - x_2 \frac{dx_1}{ds}\right) = \epsilon = Cte \tag{3.1}$$

$$(x_3 = 0, \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2).$$

Les mouvements radiaux étant exclus, la contante ϵ est non nulle et l'on la suppose positive.

D'autre part en tenant compte de $x_3 = 0$ et en considérant une combinaison convenable des équations des géodésiques correspondant aux coordonnées x_0, x_1, x_2, on obtient

$$f^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + fh \frac{d^2 \rho}{ds^2} + 2ff' \frac{dt}{ds}\frac{d\rho}{ds} + (f'h + fh')\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 0 \tag{3.2}$$

ce qui donne l'intégralle première

$$f^2 \frac{dt}{ds} + fh \frac{d\rho}{ds} = E_0 = Cte \tag{3.3}$$

Tout cela concerne le cas général. Or les mouvements circulaires donnent aussi lieu à une autre intégralee première. En effet, si le point

$$x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$$

décrit une orbite circulaire, on a

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = \rho^2 = Cte \tag{3.4}$$

d'où

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho}{ds} = 0, \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = 0$$

Considérons maintenant les équations des géodésiques correspondant aux coordonnées x_1 et x_2. En multipliant la première par x_1, la deuxième par x_2 et en les ajoutant ensuite, en tenant aussi compte des conditions ci-dessus, on obtient l'intégrale première

$$ff'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{gg'}{\rho^2}\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{ds^2} = 0 \tag{3.5}$$

Naturellement l'équation relative à la coordonnées temporelle $x_0 = t$ doit être aussi vérifiée. Or elle se réduit à l'équation

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{hf'}{l^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{hgg'}{\rho^2 fl^2}\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{ds^2} = 0$$

et puisque

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \quad ,$$

d'après (3.2), elle est bien vérifiée en vertu de (3.5).

Cela dit, d'après (3.4), on a

$$x\frac{dx}{dt} = x_1\frac{dx_1}{dt} + x_2\frac{dx_2}{dt} = 0$$

et en tenant compte de (3.1), on obtient

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\epsilon x_2}{g^2}\frac{ds}{dt} \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\epsilon x_1}{g^2}\frac{ds}{dt} \quad ,$$

donc aussi

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \frac{\epsilon^2\rho^2}{g^4}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

et

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{ds^2} = \frac{\epsilon^2\rho^2}{g^4} \tag{3.6}$$

La vitesse d'orbitation, notée v, s'obtient maintenant en utilisant la métrique spatiale (1.2), et alors, compte tenu de

$$x\frac{dx}{dt} = 0$$

on trouve

$$v^2 = l_1^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = l_1^2 \left(\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\epsilon^2 \rho^2 l_1^2}{g^4} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{\epsilon^2}{g^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

de sorte que

$$v = \frac{\epsilon}{g} \frac{ds}{dt}.$$

Or, d'après (3.5) et (3.6),

$$ff' \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{\epsilon^2 g'}{g^3} \quad ,$$

d'où

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{\epsilon} \sqrt{\frac{gff'}{g'}}$$

et

$$v = \sqrt{\frac{gff'}{g'}} \quad .$$

Compte tenu maintenant de (2.1), il en résulte

$$ff' = c^2 \left(\frac{\mu}{g^2} + \lambda g \right) g'$$

donc aussi

$$\frac{ff'}{g'} = c^2 \left(\frac{\mu}{g^2} + \lambda g \right)$$

ce qui donne en définitive la vitesse d'orbitation circulaire

$$v = c \sqrt{\frac{\mu}{g} + \lambda g^2} \tag{3.7}$$

avec $g = g(\rho)$ pour $\rho > \rho_0$ et aussi pour $\rho = \rho_0$ par continuité.

Pour ce qui concerne l'intégrale première (3.3), elle n'intervient pas dans nos calculs. Elle détermine simplement la constante E_0 en fonction de $g(\rho)$ et de la constante ϵ.

Notons aussi que, pour $\lambda = 0$, la vitesse d'orbitation se réduit à l'expression

$$\sqrt{\frac{km}{g(\rho)}}$$

qui est à rapprocher de l'expression analogue newtonienne

$$\sqrt{\frac{km}{r}}$$

dans laquelle r désigne la distance de l'origine à la particule test.

La formule (3.7) appelle deux remarques.

Premièrement, elle entraîne en apparence une conséquence inadmissible, à savoir que $v \to +\infty$ lorsque $g \to +\infty$ (donc aussi lorsque $\rho \to +\infty$). Mais il s'agit là d'une conclusion illusoire, car la formule est valable uniquement sur l'ouvert borné $B_0 - Q_0$. D'ailleurs dès que l'on sort de la boule B_0, la notion même de mouvement d'orbitation autour de Q_0 n'a absolument aucun sens.

Deuxièmement, la formule (3.7) définit les vitesses d'orbitation à l'extérieur de la distribution considérée de matière, de sorte que, sous cette forme, elle n'est pas applicable à toutes les situations réelles. Pour sa confrontation avec les observations, nous devons calculer les vitesses d'orbitation des étoiles dans une galaxie. Mais on peut obtenir une formule générale s'appliquant dans tous les cas envisageables.

Soit donc ρ une valeur positive inférieure à ρ_0. Alors nous admettons que la matière contenue dans la couche sphérique entre les sphères $\|x\| = \rho$ et $\|x\| = \rho_0$ n'a pas d'influence sur le champ gravitationnel dans la boule $\|x\| \leq \rho$. Cette assertion est rigoureusement vraie en gravitation newtonienne. Elle est aussi rigoureusement vraie en gravitation einsteinienne lorsque la boule $\|x\| \leq \rho$ est vide de matière. En effet, la solution donnée par (2.1) et (2.2) y est encoe valable avec une valeur convenable de la constante μ. Mais celle-ci est nécessairement nulle dans ce cas, car le champ gravitationnel ne peut pas être singulier à l'origine, de sorte que

$$f^2 = c^2(1 + \lambda g^2) \quad , \quad \left(\frac{dg}{d\rho}\right)^2 = l^2(1 + \lambda g^2)$$

Toutefois on ne saurait affirmer la validité de notre assertion en général dans le cadre de la gravitation einsteinienne. Mais il ne faut pas oublier que notre problème a été formulé sur la base d'hypothèses simplificatrices introduites à titre d'approximations acceptables. Dans ce contexte, et compte tenu de sa validité dans les cas signalés précédemment, notre assertion s'introduit aussi comme une approximation acceptable.

Cela dit, pour obtenir la vitesse d'orbitation sur la sphère $\|x\| = \rho$, il suffit de se rapporter à la formule (3.7) en substituant à μ la valeur

$$\mu(\rho) = \frac{km(\rho)}{c^2} \quad ,$$

$m(\rho)$ étant la masse contenue dans la boule $\|x\| \leq \rho$, d'où la formule générale

$$v(\rho) = c\sqrt{\frac{\mu(\rho)}{g(\rho)} + \lambda(g(\rho))^2}$$

qui est valable pour toutes les valeurs de la coordonnée radiale. Naturellement, pour $\rho \geq \rho_0$, on retrouve la formule (3.7).

On sait que, dans le cas d'une galaxie, la fonction

$$\sqrt{\frac{c^2\mu(\rho)}{g(\rho)}} = \sqrt{\frac{km(\rho)}{g(\rho)}}$$

croît d'abord jusqu'à une valeur maximale et ensuite décroît et tend rapidement vers zéro. Par conséquent la vitesse d'orbitation se réduit à l'expression simple

$$v = c\sqrt{\lambda}\, g(\rho)$$

à patir d'une valeur ρ_1 de ρ. La masse n'y intervient plus pour $\rho \geq \rho_1$ et la vitesse $v = v(\rho)$ varie linéairement en fonction du rayon de courbure $g(\rho)$ qui est l'invariant fondamental de la métrique (1.1). La courbe de rotation ainsi conçue par rapport à $g(\rho)$ est une ligne droite dont la pente $c\sqrt{\lambda}$ est extrêmement petite. En effet, λ est probablement de l'ordre de $10^{-50} cm^{-2}$ de sorte que

$$c\sqrt{\lambda} \simeq 3 \times 10^{-15} sec^{-1} \quad ,$$

ce qui explique d'ailleurs pourquoi on doit recourir à des dimensions cosmiques pour avoir des valeurs non négligeables de $c\sqrt{\lambda}\, g(\rho)$. Dans ces conditions la courbe de rotation s'identifie pratiquement, pour $\rho \geq \rho_1$, à une ligne droite parallèle à l'axe des valeurs de g. Cela est conforme à la platitude, constatée par les observations, des courbes de rotations de galaxies.

Cependant la confrontation de cette conclusion simple avec les mesures astronomiques n'est pas dépourvue de difficultés. Nos résultats se rapportent à une géométrie non euclidienne qui doit être correctement interprétée. Il ne faut pas oublier, en particulier, que le rayon de courbure $g(\rho)$ est une grandeur non euclidienne que l'on ne saurait identifier à une coordonnée. C'est la coordonnée radiale ρ qui sert à localiser les orbites circulaires, et par conséquent la courbe de rotation doit être définie par rapport à ρ. Il y a là une difficulté, car la coordonnée radiale est susceptible d'une infinité de choix. Mais on peut commencer par un choix simple qui s'impose de façon naturelle lorsque le champ est stationnaire et qui consiste à identifier la coordonnée radiale avec la distance géodésique correspondante. Cela revient à poser $l = 1$ dans la métrique. Alors le rayon de courbure se présente comme fonction de la distance ρ. Sa détermination rigoureuse est théoriquement possible pour $\rho \geq \rho_0$ par intégration de l'équation différentielle (2.2) avec $l = 1$, mais en fait on ne peut pas en tirer une information vraiment utile, car la détermination qui en résulte présuppose la connaissance de la valeur $g(\rho_0)$.

Pour la confrontation des vitesses calculées avec les observations, nous avons besoin des valeurs de $g(\rho)$ pour $\rho \leq \rho_0$, mais les valeurs de $g(\rho)$ pour $\rho \geq \rho_0$ sont aussi assez significatives pourvu que la différence $\rho - \rho_0$ soit suffisamment petite.

Cela dit, puisque les observations montrent que $\rho_0 > \rho_1$, on peut considérer un intervalle ouvert borné, noté I, contenant la valeur ρ_0 et laissant ρ_1 à son extérieur. Alors la dérivée de la vitesse d'orbitation se réduit pratiquement sur I à la valeur

$$c\sqrt{\lambda}\; g'(\rho)$$

et, pour $l = 1$, on a aussi avec une approximation satisfaisante

$$g'(\rho) = \sqrt{1 + \lambda\big(g(\rho)\big)^2}$$

Par conséquent la pente de la tangente à la courbe de rotation s'identifie pratiquement sur I à l'expression

$$c\sqrt{\lambda}\sqrt{1 + \lambda\big(g(\rho)\big)^2}$$

dont les valeurs sont du même ordre que celui de $c\sqrt{\lambda}$ parce que l'ordre de grandeur de $\lambda\big(g(\rho)\big)^2$ est certainement très petit sur l'intervalle I. La platitude de la partie correspondante de la courbe de rotation, définie par rapport à ρ, est ainsi vérifiée lorsque $l = 1$, c'est-à-dire lorsque la coordonnée radiale s'identifie à la distance géodésique.

Considérons maintenant un autre choix de la coordonnée radiale. Alors, pour des raisons physiques, la fonction corespondante $l(\rho)$ sera majorée sur la boule B_0 par une constante positive de petit ordre de grandeur. Puisque la pente de la tangente à la courbe de rotation s'obtient maintenant en multipliant par $l(\rho)$ l'expression donnée précédemment, la platitude de la courbe de rotation sera encore assurée.

Références

[1] N. Stavroulakis, *Paramètres cachés dans les potentiels des champs statiques*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 6, n ° 4, 1981, pp. 287-327.

[2] N. Stavroulakis, *Particules et particules test en relativité générale*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 16, n ° 2, 1991, pp. 129-175.

(Manuscrit reçu le 21 novembre 2000)