

Un modèle mathématique pour la description déterministe d'une catastrophe

J. VASSALO PEREIRA

Departamento de Física, Faculdade de Ciências,
R. da Escola Politécnica, 58
1294 Lisboa Portugal

« parce que c'estoit luy ; parce que
c'estoit moy »

Hommage à Georges Lochak

1 Introduction

Dans la littérature de systèmes dynamiques on trouve souvent des expressions différentes lesquelles semblent traduire des situations physiques dont on peut raisonnablement garantir, sinon l'identité complète, du moins une profonde affinité. Tel est le cas, par exemple, des concepts de bifurcation, transition de phase, catastrophe, morphogénèse, etc, lesquels semblent recouvrir un même type de phénomènes où un effet quantitativement (et même qualitativement) différent fait soudainement son apparition sans que l'on sache le rattacher d'une façon déterministe à l'évolution naturelle qui le précède (ou lui succède) immédiatement. Dans la plupart des cas, ce changement véritablement "inattendu" de l'état du système se manifeste soit par une intensité accrue d'une certaine grandeur physique, soit par l'émergence d'un effet physique nouveau, modifiant la nature même du système.

Comme exemple de ce que nous venons de dire, nous pouvons citer le cas des crises d'épilepsie, lequel se trouve décrit dans la figure 1 dans sa version plus bénigne du « petit mal » bien connu en neurologie. On y voit que la crise fait apparaître soudainement une onde électrique régulière de haute intensité, en opposition nette à la vibration indifférenciée et de basse amplitude qui est de règle la plupart du temps. Cette vibration, que dans un modèle nécessairement simplifié on peut identifier à la superposition d'un très grand nombre d'ondes électriques identiques à très faible amplitude et phase (apparemment) aléatoire, voit ces mêmes phases subir soudainement une modification radicale de leur distribution, amenant pendant quelque temps un effet physique

régulier et de haute énergie qui est typique de ces phénomènes. L'état de ce système passe ainsi par un changement radical, de telle sorte qu'on peut se demander s'il doit être mathématiquement décrit par la succession de solutions différentes d'une même « équation d'état » (encore s'agit-il de la trouver), ou bien si l'on doit envisager l'existence de deux « équations d'état » intrinsèquement différentes, qui se succèderaient selon un mécanisme de causalité réciproque qu'il nous faut découvrir. De toutes façons, et indépendamment du mécanisme sous-jacent, l'explication qui a cours dans ce genre de phénomènes est généralement donnée par voie "heuristique", en postulant un brusque changement de la valeur de certains paramètres introduits "ad hoc" dans la description du système.

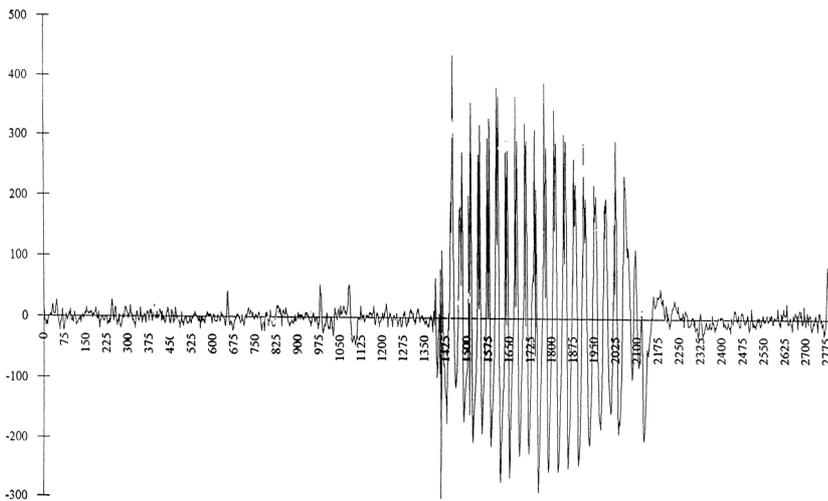


Fig. 1. Crise de « petit mal ». (Abscisse : temps en centièmes de seconde. Ordonnée : différence de potentiel électrique en mV)

A l'opposé d'une telle démarche, nous allons dans ce qui suit présenter un système physique où a lieu une "catastrophe" et la décrire au moyen d'un modèle déterministe. Nous voulons dire par là qu'il sera possible de connaître non seulement les conditions exactes qui règlent l'état du système avant et après la discontinuité physique, mais aussi le lien de causalité qui permet d'établir cette succession. Plus précisément, nous allons déduire deux équations d'état du système (l'une valable avant et l'autre après la transition) et établir les conditions mathématiques rigoureuses traduisant le mécanisme

déterministe par lequel la première vient remplacée l'autre (et réciproquement).

Le système que nous prendrons est constitué par un très grand nombre N de résonateurs identiques, chacun d'eux étant le siège d'une onde continue dont la phase est égale à celle de son propre résonateur. L'amplitude (très faible) et la fréquence sont les mêmes pour tout résonateur. Il s'ensuit que chaque résonateur est perturbé par la superposition de ces $N-1 \cong N$ ondes identiques, amenant par là un changement de sa propre phase. C'est l'évolution temporelle de la valeur des phases de l'ensemble des N résonateurs (décrite, comme on le verra par la suite, par une « fonction d'état » de la forme $\omega = \omega(t, \phi)$) que nous allons étudier, en déduisant l'« équation d'état » à laquelle elle obéit.

Nous trouverons alors *deux* équations au lieu d'une (ou plutôt, deux équations aux dérivées partielles distinctes, dérivant d'une même équation intégrale), et cela en conséquence d'un résultat dû à Rayleigh concernant les propriétés d'une superposition d'un grand nombre d'ondes sinusoidales identiques (même fréquence et même amplitude – très petite), situation qui nous ramène directement au modèle que nous utilisons ici. L'amplitude R et la phase Φ de cette superposition dépendent naturellement de la valeur des phases des N vibrations élémentaires, et si celles-ci sont quelconques (c'est à dire, si elles possèdent – comme le supposait Rayleigh dans sa démonstration – égale probabilité a priori) alors on trouve naturellement une probabilité $f(N, R, \Phi)$ gaussienne régissant les valeurs de R et Φ . Mais si tel n'est pas le cas – et non seulement $\omega = \omega(t, \phi)$ ne sera pas constante au cours du temps, mais c'est même l'équation qui régit ce changement au cours du temps qu'il s'agit de déduire ici – alors $f(N, R, \Phi)$ se trouve avoir des propriétés bien plus riches et quelque peu inattendues. Plus exactement, on trouvera que sa forme géométrique est de deux types bien distincts, selon que les phases $\omega = \omega(t, \phi)$ possèdent ou non une certaine propriété – voir les inégalités (7) et (9). Ce sont ces *deux* formes différentes de la *même* fonction f qui, introduites dans le *même* raisonnement, aboutissent à *deux* formes distinctes pour l'équation d'évolution de ω . D'où le mécanisme déterministe pour la description de la catastrophe : *Une seule* et simple formule – l'équation (5) – décrit le phénomène aussi bien avant qu'après la catastrophe ; mais elle fait intervenir une certaine fonction $f(N, R, \Phi)$ laquelle, dans des conditions très précises *déterminées* par la « fonction d'état » $\omega = \omega(t, \phi)$, change radicalement de propriétés géométriques, de telle sorte que cette unique équation de

convolution (5) prend alors deux formes différentes selon le cas (c'est la déduction de l'avant dernier paragraphe).

2 Le Théorème de Rayleigh

Le rôle joué par ce résultat {1} étant décisif dans les déductions qui vont suivre, il nous semble utile de commencer par exposer en quoi il consiste et quelles sont ses conséquences lorsqu'on le généralise hors du cas considéré par Rayleigh.

Soient alors $N \gg 1$ vibrations sinusoidales, toutes avec la même période 2π et même amplitude $\kappa \ll 1$: La superposition de ces N ondes,

$$R \sin(-t + \Phi) = \sum_{j=1}^N \kappa \sin(-t + \Phi_j),$$

sera une vibration (non sinusoidale) avec la même période et dont l'amplitude R et la phase Φ dépendront des phases des vibrations élémentaires qui la composent. Nous supposons que les valeurs ψ_j des phases de ces vibrations se distribuent selon une certaine densité $\Omega(\psi)$.

(Dans la formulation originelle de Rayleigh, on a partout l'égale probabilité des phases : $\Omega = \text{const} = (2\pi)^{-1}$). Chaque superposition des N vibrations élémentaires fixera ainsi une paire de valeurs R, Φ , que nous prendrons comme coordonnées polaires dans un plan cartésien $x = R \cos \Phi$, $y = R \sin \Phi$ et, inversement, tout point x, y de ce plan représente une superposition des N vibrations élémentaires. Si l'on considère alors un grand nombre n de superpositions possibles des N vibrations élémentaires, ces n points représentatifs se distribueront dans le plan (x, y) selon une certaine densité $f(N, x, y)$, en ce sens que $n \cdot f(N, x, y) dx dy$ est le nombre de ces superpositions dont l'amplitude $R = +\sqrt{x^2 + y^2}$ et phase $\Phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ se trouvent dans la voisinage $dx \cdot dy$ du point x, y . Nous remarquerons ce qui peut sembler une trivialité, à savoir, que $f(N, x, y) = 0$ pour $R = \sqrt{x^2 + y^2} > N\kappa$, c'est à dire que l'amplitude R ne peut *en aucun* cas être supérieure à $N\kappa$, correspondant au cas particulier où toutes les vibrations élémentaires seraient en phase. Nous verrons par la suite toute l'importance de cette remarque lorsque f aura une forme géométrique *non évanescence* pour les grandes valeurs de R .

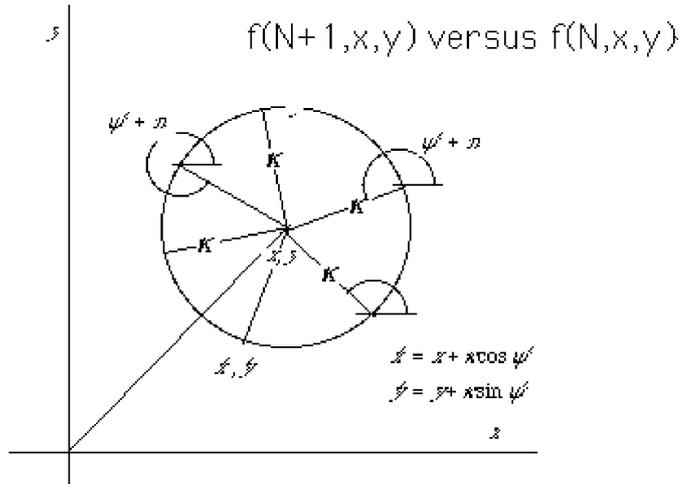


Fig. 2

Supposons alors qu'à chacune des n superpositions on ajoute une vibration élémentaire de la forme $\kappa \sin(-t + \psi)$, où les valeurs de la différence de phase ψ se distribuent selon une certaine densité $\Omega(\psi)$. Il est clair que parmi les n superpositions (des N vibrations élémentaires) celles qui se trouveront avoir, après cette opération, des valeurs de R, Φ dans le voisinage dx, dy du point x, y seront celles dont le point représentatif x', y' se trouve sur le cercle centré en (x, y) et de rayon κ (c'est à dire, $x' = x + \kappa \cos \psi', y' = y + \kappa \sin \psi',$) : il suffit, en effet, d'ajouter une onde élémentaire, avec la valeur particulière $\psi' + \pi$ de sa phase (voir figure 2). Rappelons que le nombre de superpositions (de N vibrations élémentaires) dont le point représentatif se trouve à l'intérieur de dx, dy est donné par $n \cdot f(N, x, y) dx, dy$ et, par conséquent, parmi ceux-ci seul un certain nombre $\Omega(\psi') d\psi'$ donnera lieu à une superposition finale (de N+1 vibrations élémentaires) avec point en dx, dy . Pour obtenir alors le nombre de superpositions (avec N composantes) aboutissant à des superpositions (avec N+1 composantes) avec point représentatif en dx, dy , il suffit de prendre tous les points représentatifs x', y' sur le cercle centré en x, y et de rayon κ , et intégrer sur toutes les valeurs $\psi' \in (0, 2\pi)$ de la phase :

$$n dx dy f(N+1, x, y) = \\ = n dx dy \int_0^{2\pi} f(N, x' = x + \kappa \cos \psi', y' = y + \kappa \sin \psi') \Omega(\psi') d\psi'$$

Puisque $N \gg 1$ on peut écrire $f(N+1, x, y) \cong f(N, x, y) + 1 \cdot \frac{\partial f(N, x, y)}{\partial N}$.

Et en introduisant dans l'intégrale le développement de $f(N, x', y')$ en puissances de $\kappa \ll 1$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\kappa^2}{2} \int \Omega(\xi) \cos^2 \xi d\xi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\kappa^2}{2} \int \Omega(\xi) \sin^2 \xi d\xi + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \kappa^2 \int \Omega(\xi) \cos \xi \sin \xi d\xi + \kappa \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \int \Omega(\xi) \cos \xi d\xi + \kappa \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \int \Omega(\xi) \sin \xi d\xi + \dots$$

Si l'on introduit maintenant la série de Fourier de la fonction $\Omega(\xi)$,

$$\Omega(\xi) \cong \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos k\xi + \beta_k \sin k\xi),$$

avec

$$\alpha_k \cong \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(s) \cos ks ds, \quad \beta_k \cong \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(s) \sin ks ds,$$

on voit que les intégrales présentes dans l'équation s'écrivent:

$$\int_0^{2\pi} \Omega(\xi) \sin \xi d\xi = \pi \beta_1 \quad \int_0^{2\pi} \Omega(\xi) \cos \xi d\xi = \pi \alpha_1 \\ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Omega(\xi) \cos^2 \xi d\xi = \frac{1}{4} (1 + \pi \alpha_2) \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Omega(\xi) \sin^2 \xi d\xi = \frac{1}{4} (1 - \pi \alpha_2).$$

$$\int_0^{2\pi} \Omega(\xi) \sin \xi \cos \xi \, d\xi = \frac{\pi}{2} \beta_2$$

D'où la forme finale de l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire $f(N,x,y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial N} &= \frac{\kappa^2}{4} (1 + \pi \alpha_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\kappa^2 \pi \beta_2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\kappa^2}{4} (1 - \pi \alpha_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \pi \kappa \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \pi \kappa \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

Naturellement, la distribution $f(N,x,y)$ doit aussi obéir aux conditions de normalisation et aux limites :

$$\int_{x,y} f(N,x,y) \, dx dy = 1 \quad \lim_{N \rightarrow 0} f(N,x,y) = \delta(x,y).$$

Rappelons que Rayleigh supposait implicitement $\Omega = (2\pi)^{-1}$, de sorte que la déduction simplifiée aboutissait à une équation de diffusion,

$$\frac{4}{\kappa^2} \frac{\partial f}{\partial N} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

avec

$$f(N,x,y) = \frac{1}{N\pi\kappa^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{N\pi\kappa^2}\right)$$

L'intégration de l'équation généralisée se fait par les méthodes habituelles en EDP linéaires avec coefficients constants, et nous nous bornerons ici à présenter le résultat final. (Pour les détails, voir {2}). Le trait essentiel est que cette intégration se fait différemment selon le signe du discriminant $\Delta \equiv 1 - \pi^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$. En effet, si $\Delta > 0$, on trouve pour $f(N,x,y)$ la forme

$$f(N, x, y) = \frac{1}{N\pi\kappa^2\sqrt{\Delta}} \exp\left\{ \frac{-(1-\pi\alpha_2)x^2 + 2\pi\beta_2xy - (1+\pi\alpha_2)y^2}{N\kappa^2\Delta} \right\} \quad (2)$$

$$\equiv \frac{1}{N\pi\kappa^2\sqrt{\Delta}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) \right\}$$

En admettant que $a_{11} > 0$ (a_{11} et a_{22} ne pouvant être négatifs en même temps), on peut aussi écrire

$$f(N, x, y) = \frac{1}{N\pi\kappa^2\sqrt{\Delta}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(a_{11}x + a_{12}y)^2}{a_{11}} + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} y^2 \right] \right\}.$$

En procédant alors à un changement linéaire et homogène de variables $x, y \leftrightarrow X, Y$ tel que

$$X^2 \equiv \frac{(a_{11}x + a_{12}y)^2}{2a_{11}} \quad Y^2 \equiv \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2a_{11}} y^2,$$

on voit que f possède la forme gaussienne

$$f(N, x, y) = \frac{1}{N\pi\kappa^2\sqrt{\Delta}} \exp\{-[X^2 + Y^2]\}$$

illustrée dans la figure 3 .

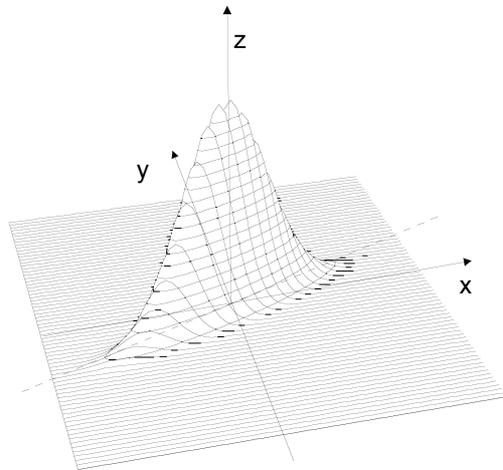


Fig. 3. Distribution gaussienne.

En particulier, la probabilité $f(N,x,y)$, qui est évanescente pour les valeurs croissantes de $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, possède un seul maximum à l'origine $x=y=0$, et prend la même valeur sur chaque ellipse

$$X^2(x, y) + Y^2(x, y) \equiv \frac{1}{2} a_{11}x^2 + a_{12}xy + \frac{1}{2} a_{22}y^2 = C = const$$

Le cas $a_{11} > 0$ est en tout identique, conduisant aussi à une forme gaussienne pour $f(N,x,y)$.

Mais si l'on a $\Delta \equiv 1 - \pi^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) < 0$, nous sommes conduits à une solution intrinsèquement distincte pour $f(N,x,y)$. Plus exactement, on trouve alors pour l'expression analytique de $f(N,x,y)$ dans tout le plan $x, y \in R^2$

$$\begin{aligned}
 f(N, x, y) &= \frac{Const}{N} \exp \left\{ \frac{-(1 - \pi\alpha_2)x^2 + 2\pi\beta_2xy - (1 + \pi\alpha_2)y^2}{N\kappa^2\Delta} \right\} = \\
 &\equiv \frac{Const}{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Puisque a_{11} et a_{22} ne peuvent pas être simultanément positifs, on peut alors procéder au changement linéaire et homogène de variables

$$X^2 \equiv \frac{(a_{11}x + a_{12}y)^2}{2a_{11}} Y^2 \equiv \frac{|a_{11}a_{22} - a_{12}^2|}{2a_{11}} y^2$$

(ceci en supposant que $a_{11} > 0$; le cas $a_{22} > 0$ est identique), ce qui permet d'écrire

$$f(N, x, y) = \frac{Const}{N} \exp\{-X^2 + Y^2\}$$

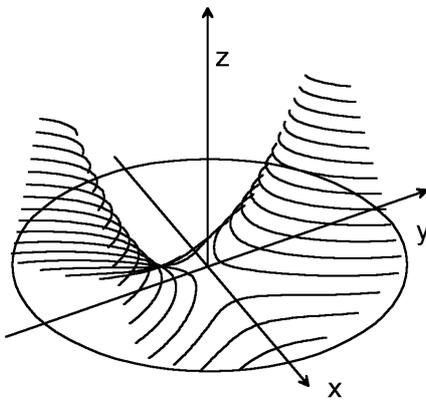


Fig. 4. Distribution hyperbolique (NB : $f=0$ pour $R = \sqrt{x^2 + y^2} > N\kappa$)

Il s'agit ici (voir figure 4) d'un hyperboloïde avec un point selle à l'origine des coordonnées $x=y=0$. Les lignes d'équiprobabilité sont maintenant données par les hyperboles

$$-X^2(x, y) + Y^2(x, y) \equiv \frac{1}{2}a_{11}x^2 + a_{12}xy + \frac{1}{2}a_{22}y^2 = C = const$$

Pour $C=0$ on trouve les deux asymptotes, et pour $C>0$ (resp. $C<0$) f prend des valeurs croissantes (resp. décroissantes) pour C croissant (resp. décroissant).

Le cas $\Delta \equiv 1 - \pi^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$ négatif et proche de zéro est particulièrement intéressant, avec $f(N,x,y)$ prenant des valeurs significatives uniquement dans la région très petite située entre les asymptotes, avec toutes les hyperboles d'équiprobabilité approchant l'axe OY . Dans ces conditions, f aura deux maxima sur les intersections de l'axe OY avec le cercle de rayon $N\kappa$. Cette conclusion découle de la remarque faite plus haut, concernant l'impossibilité stricte pour une superposition de N vibrations d'amplitude κ d'avoir une amplitude supérieure à $N\kappa$ (c'est à dire que $f(N,x,y)=0$ pour $x^2 + y^2 > (N\kappa)^2$). Ce fait, qui ne portait pas à conséquence alors que f avait la forme gaussienne, (avec des valeurs évanescences pour x,y loin de l'origine), est ici d'une importance capitale :

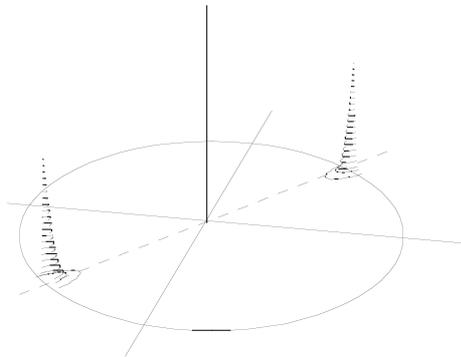


Fig. 5 . Distribution hyperbolique (à la limite $\Delta < 0, |\Delta| \ll 1$)

Puisque la probabilité f doit être normalisée dans le cercle

$$x^2 + y^2 \leq (N\kappa)^2 ,$$

il s'ensuit que les maxima de f doivent être très accusés et que f est pratiquement négligeable ailleurs (voir figure 5). Signalons encore que pour Δ négatif mais non nécessairement proche de zéro, les considérations que nous venons de faire concernant les maxima de f placés à l'intersection de OY avec le cercle de rayon $N\kappa$ demeurent encore valables, à cette différence près qu'ils ne seront pas aussi accusés (voir figure 4)

La conclusion de ce qui précède est que le changement de signe de Δ est associé à un brusque changement des propriétés de la probabilité qui régit la superposition d'un grand nombre de vibrations identiques. Cette « catastrophe » sera capitale dans le modèle physique que nous allons exposer, et c'est elle qui sera responsable des deux formes différentes (8) et (10) de la même équation d'état (5) d'un ensemble de $N \gg 1$ résonateurs, comme nous allons voir dans ce qui suit.

3 Le modèle physique

Comme il a été dit dans l'Introduction, le système physique que nous allons utiliser est constitué par un très grand nombre $N \gg 1$ de résonateurs. Ce terme est employé couramment pour désigner un oscillateur qui émet (et en même temps entretient) une onde sinusoïdale à faible amplitude et dont la phase ϕ se trouve être à chaque instant égale à celle de l'oscillateur lui-même. On pourrait pousser un peu plus loin le détail et prendre comme modèle mathématique pour ce résonateur un simple oscillateur linéaire (naturellement perturbé par des forces extérieures) auquel serait couplé un mécanisme automatique du genre des systèmes d'échappement des horloges {3}. Ce mécanisme n'aurait d'autre fonction que d'agir périodiquement (par exemple, à chaque fois que l'on aurait $\phi = 0$ pour la phase de l'oscillateur) en ramenant *instantanément* l'amplitude de l'oscillateur à sa valeur non perturbée, tout en gardant la valeur de la phase. De cette façon, une certaine stabilité est introduite dans le modèle physique du résonateur laquelle a surtout l'avantage d'identifier l'état de l'oscillateur à la seule valeur de sa phase ϕ , indépendamment de son amplitude, obligée ainsi à demeurer toujours à l'intérieur d'un petit voisinage de sa valeur non perturbée. On comprend que par ce détour on puisse alors identifier l'état de $N \gg 1$ résonateurs identiques au moyen d'une certaine « fonction d'état », $\omega = \omega(N, t, \phi) = \omega(t, \phi)$, le nombre de ceux-ci dont la phase à l'instant t se trouve avoir la valeur ϕ à $d\phi$ près étant égal à $\omega(t, \phi)d\phi$. C'est l'« équation d'état » du système, c'est à dire, l'équation qui régit l'évolution de ω au cours du temps, que nous allons déduire ici.

Considérons alors un ensemble de $N \gg 1$ résonateurs identiques en interaction par le moyen des ondes stationnaires sinusoïdales dont ils sont le siège. L'oscillateur n° j vient alors perturbé par une onde due à la superposition des ondes émises (et entretenues) par les autres oscillateurs, c'est à dire qu'il ob-

éit presque partout (sauf lors des instants où sa phase prend la valeur $\phi_j = 0$), à l'équation

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x = F(t) &\equiv \sum_{n \neq j} \kappa \sin \phi_n \approx \sum_n \kappa \sin \phi_n = \\ &\equiv \sum_n \kappa \sin(-t + (\phi_n + t)) \equiv R \sin(-t + \Phi) \end{aligned} \tag{4}$$

On voit alors apparaître clairement le rôle joué par le théorème de Rayleigh dans cette théorie : Les phases des N oscillateurs étant distribuées selon $\omega(t, \phi)$, il nous faut calculer la probabilité pour la superposition des $N \approx N - 1$ ondes d'avoir certaines valeurs R_0, Φ_0 pour son amplitude et sa phase, ce qui est précisément donné par la fonction de Rayleigh $f(N, x = R \cos \Phi, y = R \sin \Phi)$ étudiée plus haut, la distribution ω remplaçant maintenant la fonction Ω utilisée dans le paragraphe antérieur. En fait, le raisonnement se réduit pour l'essentiel à une propriété de convolution : Si à l'instant t_0 on trouve $N \cdot \omega(t_0, \phi)$ oscillateurs avec phase ϕ (à $d\phi$ près), alors on aura à l'instant $t_0 + \Delta t$:

$$\omega(t_0 + \Delta t, \phi) = \int_{(\phi_0)} \omega(t_0, \phi_0) \Pr(\theta = \phi_0 - \phi - \Delta t) d\phi_0 \tag{5}$$

où $\Pr(\theta)$ désigne la probabilité pour qu'un oscillateur quelconque (perturbé par les autres N-1 oscillateurs et partant de $\phi(t = t_0) \equiv \phi_0$) puisse avoir à l'instant $t_0 + \Delta t$ une certaine valeur θ pour la *différence* de sa phase par rapport à sa valeur non perturbée. (Si les deux oscillateurs partent avec même condition initiale $\phi(t = t_0) \equiv \phi_0$, l'oscillateur non perturbé aura naturellement la phase $\phi_0 - \Delta t$ à l'instant $t_0 + \Delta t$). Il s'ensuit que l'expression de $\Pr(\theta = \phi_0 - \Delta t - \phi)$ dépendra des conditions initiales ϕ_0, t_0 et de Δt , et son calcul fera intervenir la connaissance de la fonction de Rayleigh f et, par là-même, la distribution ω . Par la suite nous montrerons comment (5) s'écrit sous la forme équivalente d'une équation aux dérivées partielles (EDP) en ω , l'« équation d'état » de l'ensemble de N»1 oscillateurs. Tout dans l'équation (5) est donc ramené à la seule distribution ω laquelle, introduite dans l'équation généralisée de Rayleigh, peut déterminer deux expressions

distinctes pour f et conduire ainsi à deux EDP distinctes. Résumons alors ce calcul :

La différence de phase $\theta \equiv \tilde{\phi} - \bar{\phi}$ à l'instant $t_0 + \Delta t$ de deux oscillateurs avec la même condition initiale $\phi(t = t_0) \equiv \phi_0$, où l'un des deux est non perturbé et l'autre est perturbé par la superposition $R_0 \sin(-t + \Phi_0)$ des $N-1$ ondes dues aux autres oscillateurs, s'obtient par un calcul élémentaire sur l'équation (4) et l'on trouve

$$\tilde{\phi} - \bar{\phi} = \Delta t R_0 \sin(-t_0 + \Phi_0) \cos \Phi_0 \equiv \theta(\phi_0, t_0, t = t_0 + \Delta t; R_0, \Phi_0)$$

avec $R_0 \equiv R(t_0)$, $\Phi_0 \equiv \Phi(t_0)$. Or nous avons vu plus haut que les valeurs R_0, Φ_0 se distribuent selon une densité $f(N, x, y)$, de sorte que la densité de probabilité pour la *différence* de phase θ est donnée par

$$d\theta \cdot \text{Pr} ob(\theta)(t_0, \Phi_0; t = t_0 + \Delta t) = \iint_D f(N, x, y) dx dy,$$

le domaine D d'intégration étant fixé par

$$D \equiv \left\{ x, y : \theta \leq \theta(t_0, \Phi_0; t = t_0 + \Delta t; R_0, \Phi_0) \leq \theta + d\theta \right\} = \\ = \left\{ x, y : \frac{\theta}{\Delta t \cos \Phi_0} \leq y \cos t_0 - x \sin t_0 \leq \frac{\theta + d\theta}{\Delta t \cos \Phi_0} \right\}$$

Nous voyons donc apparaître la formule donnée plus haut pour θ dans la définition du domaine d'intégration qui conduit à la détermination de $\text{Pr}(\theta)$.

NB: Rappelons que : $f(N, x = R_0 \cos \Phi_0, y = R_0 \sin \Phi_0) dx dy$,

avec $dx = dR_0 \cos \Phi_0 - d\Phi_0 R_0 \sin \Phi_0$, $dy = dR_0 \sin \Phi_0 + d\Phi_0 R_0 \cos \Phi_0$

est la probabilité pour que l'amplitude et la phase de la superposition des N ondes possèdent des valeurs dans les intervalles $(R_0, R_0 + dR_0)$ et $(\Phi_0, \Phi_0 + d\Phi_0)$.

On peut donner une forme équivalente à l'intégrale du second membre, à savoir :

$$d\text{Prob}(\theta)_{t_0, \Phi_0; t = t_0 + \Delta t} = \frac{d\theta}{|\Delta t \cos \Phi_0 \cos t_0|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(N, x, y = x \operatorname{tg} t_0 + \frac{\theta}{\Delta t \cos \Phi_0 \cos t_0}) dx \quad (6)$$

Admettons alors que, au départ, ω soit tel que ses coefficients de Fourier donnent pour le discriminant Δ une valeur positive :

$$\Delta \equiv 1 - \pi^2 (a_2^2 + b_2^2) > 0. \quad (7)$$

Or nous avons vu que dans ces conditions les valeurs R_0, Φ_0 se distribuent selon une densité $f(N, x, y)$ de la forme gaussienne (2) discutée plus haut, et c'est cette expression que nous devons alors introduire dans (6). Nous omettrons ce calcul, lequel conduit à la forme finale de $\text{Pr}(\theta)$:

$$\text{Pr} ob(\theta)_{t_0, \Phi_0; t = t_0 + \Delta t} \propto \exp \left(\frac{-\theta^2}{|N \kappa^2 (\Delta t)^2 \wp_1(t_0) \cos^2 \phi_0|} \right)$$

où $\wp_1(t) \equiv 1 - \pi a_2(t)$, et a_k, b_k sont les coefficients de Fourier de ω :

$$\omega(t, \phi) \equiv \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos k\phi + b_k(t) \sin k\phi).$$

Il ne nous reste qu'à utiliser cette formule dans l'équation de convolution (5). On obtient alors

$$\omega(t_0 + \Delta t, \phi - \Delta t) = \int_{(s)} \frac{\omega(t_0, s)}{|N \pi \kappa^2 \wp_1(t_0) (\Delta t)^2 \cos^2 s|^{1/2}} \exp \left(\frac{-(\phi - s)^2}{|N \kappa^2 \wp_1(t_0) (\Delta t)^2 \cos^2 s|^{1/2}} \right) ds.$$

On remarquera que tout dans cette formule revient à la seule connaissance de ω . On peut alors démontrer qu'il est possible d'écrire cette équation intégrale sous la forme équivalente d'une équation aux dérivées partielles pour ω . Nous renvoyons à {2}, {4} pour les détails de cette déduction strictement analytique, ne faisant intervenir aucune hypothèse physique. Soulignons seulement que l'équation finale prend une forme particulièrement simple si, au lieu de considérer $\omega(t, \phi)$, nous prenons la fonction équivalente

$$\varpi(t, \psi) \equiv \omega(t, \phi = -t + \psi)$$

laquelle traduit simplement la même distribution des phases $\omega(t, \phi)$ décrite maintenant dans le référentiel tournant avec la vitesse angulaire de la phase d'un oscillateur non perturbé. Le sens physique devient même plus transparent et l'on trouve :

$$\frac{N\kappa^2}{6} \wp_1(t) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} (\varpi(t, \psi) \cos^2(\psi - t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varpi(t, \psi) \quad (8)$$

Naturellement, il faut introduire maintenant les coefficients de Fourier de ϖ

$$\varpi(t, \psi) \equiv \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k(t) \cos k\psi + \beta_k(t) \sin k\psi)$$

lesquels se ramènent à ceux de ω par des formules très simples :

$$\alpha_k = a_k \cos kt - b_k \sin kt \quad \beta_k = a_k \sin kt + b_k \cos kt .$$

On peut aussi écrire le fonctionnel $\wp_1(t)$ et le discriminant Δ en utilisant les coefficients de ϖ au lieu de ω :

$$\wp_1(t) \equiv 1 - \pi a_2(t) = 1 - \pi (\alpha_2(t) \cos 2t + \beta_2(t) \sin 2t),$$

$$\Delta \equiv 1 - \pi (a_2^2 + b_2^2) = 1 - \pi (\alpha_2^2 + \beta_2^2).$$

Retournons à l'équation (6) et admettons qu'à un certain instant la distribution ω (ou ϖ) des phases de l'ensemble soit telle que le discriminant prenne des valeurs négatives :

$$\Delta \equiv 1 - \pi(a_2^2 + b_2^2) < 0 . \tag{9}$$

Nous avons vu que la densité de probabilité f possède maintenant une structure géométrique très différente et qu'au voisinage de la transition $\Delta > 0 \longleftrightarrow \Delta < 0$ elle prend même des valeurs négligeables sauf au voisinage de deux points parfaitement définis par la théorie. Il nous faut donc reprendre le calcul antérieur, en introduisant maintenant en (6) l'expression (3) de f . À l'instar de ce qui a été fait plus haut, nous laisserons de côté les détails et présentons simplement le résultat final, à savoir, l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution de l'« état » de l'ensemble de N oscillateurs décrit en utilisant la distribution ϖ des phases. (Rappelons que ϖ n'est autre que la distribution des phases dans le référentiel tournant avec la phase non perturbée) :

$$N^2 \kappa^2 \varphi_2^2(t) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} (\varpi(t, \psi) \cos^2(\psi - t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varpi(t, \psi) \tag{10}$$

$$(\Delta < 0)$$

où φ_2 désigne un autre fonctionnel non linéaire de ω , dont l'expression est différente de celle de φ_1 :

$$\varphi_2(t) \equiv \frac{\pi \beta_2}{\sqrt{(\pi \beta_2)^2 + (1 - \pi \alpha_2)^2}} \left(\frac{1 - \pi \alpha_2}{\pi \beta_2} - \text{tg } t \right)$$

4 Les équations d'état de l'ensemble de N résonateurs

Nous sommes donc arrivés à deux équations aux dérivées partielles, hyperboliques et non linéaires, traduisant l'état du système, et qui diffèrent par

la forme des fonctionnels non linéaires $\wp_1(\omega)$, $\wp_2(\omega)$ présents dans les premiers membres. Elles ne sont que deux formes distinctes de la même équation intégrale (5), avec Pr donné par (6), chaque forme étant valable dans des conditions physiques très précises du système, c'est à dire, de la fonction d'« état » ω (ou ϖ).

Nous avons des raisons de croire que la structure hyperbolique de ces équations doit être en rapport direct avec le type d'interaction utilisé dans notre modèle physique (onde plane monochromatique). En effet, en utilisant un modèle analogue qui faisait appel à une interaction du genre pulsatile (des solitons émis par les oscillateurs à intervalles réguliers – et modulés – qui perturbent les autres oscillateurs par des collisions) nous avons trouvé une équation d'état parabolique. (Pour plus de détails voir {4})

La première remarque qui s'impose est que, dans le cas d'interaction négligeable (l'amplitude K des ondes émises par les résonateurs vient alors nulle), les deux équations se réduisent à la même forme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varpi(t, \psi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varpi(t, \psi) \equiv F(\psi) \quad \forall t ,$$

c'est à dire que l'ensemble de la distribution des phases reste inchangé dans le temps, tournant comme un tout avec la vitesse angulaire de la phase non perturbée.

Il est clair aussi que la distribution des phases (décrite indifféremment par ω ou ϖ) ne peut pas rester constante. Même si l'on admet au départ l'égale probabilité a priori (c'est à dire $\omega = \varpi = \text{const} = 1/2\pi$; on a alors $\Delta = 1 > 0$) cette distribution change immédiatement en vertu de l'évolution déterminée par (5) .

Par ailleurs, un raisonnement trivial de symétrie analytique permet de conclure que ω et ϖ sont des fonctions périodiques non seulement de période 2π , mais aussi de période π . Il en découle, en particulier, que les phases des N résonateurs ne pourront jamais se concentrer autour d'une seule valeur mais que, si cela arrive, alors une concentration identique existera aussi en opposition de phase avec le même nombre d'oscillateurs. On doit d'ailleurs s'attendre à ce que de telles concentrations de phase aient lieu au cours du temps : En effet, en introduisant la série de Fourier de ϖ dans l'équation (8) on peut conclure à la possibilité d'un « transfert » des intensités des coefficients de Fourier vers les hautes fréquences, ce qui en général tra-

duit l'existence de « bosses » dans la forme géométrique des fonctions développées en séries de Fourier.

Il faut souligner que les deux équations d'« état » (8) et (10) diffèrent non seulement par l'expression des fonctionnels non linéaires $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ mais aussi par les paramètres N et \mathcal{K} présents dans les premiers membres. Rappelons que $N \gg 1$ est le nombre de résonateurs de l'ensemble et que $\mathcal{K} \ll 1$ est l'amplitude de l'onde entretenue et émise par chaque résonateur. On peut donc considérer N comme la « dimension » de l'ensemble et \mathcal{K} comme mesurant l'interaction existant entre les résonateurs de l'ensemble. En prenant alors la seule équation (8), on voit que les paramètres N et \mathcal{K} s'y trouvent par le moyen de leur produit $N\mathcal{K}^2$: On peut alors conclure à une sorte de « compensation » mutuelle entre N et \mathcal{K} , en ce sens que l'état (ω ou son équivalent ϖ) et les propriétés physiques seraient les mêmes pour deux ensembles analogues différant par les valeurs de N et \mathcal{K} , pour autant que le produit $N\mathcal{K}^2$ soit le même pour les deux ensembles. Une conclusion identique est aussi valable quand on considère l'équation (10) (c'est à dire, le cas $\Delta < 0$), à la seule différence que l'on doit considérer maintenant le produit $N^2\mathcal{K}^2$ au lieu de $N\mathcal{K}^2$.

Reste que le fait le plus important concernant l'ordre de grandeur des paramètres dans les deux équations est la multiplication par N quand on passe de (8) à (10), c'est à dire, lorsque (et si) dans son évolution au cours du temps la fonction d'état de l'ensemble

$$\omega(t, \phi) \equiv \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos k\phi + b_k(t) \sin k\phi)$$

(ou son équivalent ϖ) prend des valeurs telles que $\Delta \equiv 1 - \pi(a_2^2 + b_2^2)$ cesse d'être positif. Ce passage abrupt (la catastrophe que nous voulions suivre déterministiquement) s'accompagne donc d'une intensité accrue dans l'effet physique, laquelle est de l'ordre de la « dimension » N de l'ensemble, et il faut souligner que même si $N\mathcal{K}^2$ est petit, $N^2\mathcal{K}^2$ peut avoir des valeurs non négligeables.

Bibliographie

- [1] J.W.Strutt, 3ème baron Rayleigh, Theory of Sound, Dover, 1965.
- [2] J.Vassalo Pereira, Bifurcational behaviour of the state equation for an assembly of interacting resonators, Int.J.of Bifurcation and Chaos, 6, n°2, 295-314, 1996
- [3] A.A.Andronov, A.A.Vitt, S.E. Khaikin, Theory of Oscillators, Pergamon, 1963.
- [4] J.Vassalo Pereira, State equation for an ensemble of self-oscillating systems in interaction, Int. J. NonLinear Mechanics, 24 (3), 177-184, 1989

(Manuscrit reçu le 27 novembre 2000)