Sur le Théorème d'Inversion des Spineurs de Dirac [1]

Joël Tossa

Université d'Abomey-Calavi
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)
B. P. 613, Porto-Novo, Bénin
e-mail: j_tossa@yahoo.fr

RÉSUMÉ. La question de savoir si on peut déterminer un spineur connaissant les tenseurs sans dérivation de la théorie de Dirac a été étudiée par plusieurs auteurs. Nous proposons ici une méthode algébrique basée sur la représentation du spineur comme élément de $\mathbb{C}^2$ (dans le cas d'un spineur de Pauli), ou d'un élément de $\mathbb{C}^4$ (dans le cas d'un spineur de Dirac). Cette méthode conduit de façon naturelle á la construction d'un fibré de Hopf au-dessus de l'algèbre des observables.

ABSTRACT. A spinor has bilinear covariants (the observables) satisfying certain quadratic equations called Fierz identities. These identities are sufficient to reconstruct a Dirac spinor from its bilinear covariants, up to a phase factor. We use algebraic method to recover the spinor from its bilinear covariants for the Clifford algebras Cl_3, Cl_4 and $Cl_{(1,3)}$. This method leads in a natural way to the Hopf fibrations $S^1 \to S^3 \to S^2$ and $S^3 \to S^7 \to S^4$ for the Euclidean cases.

1 Introduction

L'équation de Dirac, en utilisant l'algèbre de Cliford $Cl_{1,3}$ de l'espace-temps de Minkowski s'écrit ([5], [1]),

$$\partial\Psi\gamma_{12} = m\Psi\gamma_0 + qA\Psi$$

avec

$$\partial = \gamma^\mu\partial_\mu; \quad A = \gamma^\mu A_\mu, \quad \gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j$$

et la représentation

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma_k = -\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

les σ_k désignant les matrices de Pauli et Ψ une application de l'espace-temps à valeurs dans $Cl^+_{1,3}$, la sous-algèbre paire de $Cl_{1,3}$

Les tenseurs sans dérivée de la théorie (les observables) décrivent les états physiques de l'électron et représentent des densités de probabilité de certaines grandeurs telles que : la probabilité de présence, le courant de Dirac, la vitesse de l'électron et le moment électromagnétique.

Ils sont définis en utilisant la représentation (1) par :

$$J_\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi, \quad K_\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_5 \gamma_\mu \Psi$$

$$\sigma = \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi, \quad \omega = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_5 \Psi, \quad S_{\mu\nu} = \Psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{\mu\nu} \Psi$$

avec

$$\gamma_5 = \gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad \text{et} \quad \gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu\gamma_\nu$$

Ce sont 16 grandeurs qui forment le scalaire σ, le vecteur courant J^μ, le tenseur antisymétrique (bivecteur) $S^{\mu\nu}$, le vecteur spin K^μ et le pseudo-scalaire ω ([2]). Le vecteur $\mathbf{J}$ est de genre temps ($\mathbf{J^2} > \mathbf{0}$) et sa première composante J^0 représente la densité de probabilité de présence de l'électron dans une région donnée de l'espace-temps. Lorsque $\mathbf{J^2} \neq \mathbf{0}$, le vecteur unitaire $\mathbf{u}$ porté par $\mathbf{J}$ représente le vecteur vitesse probable de l'électron. Le bivecteur $\mathbf{S}$ est la densité du moment électromagnétique. Le vecteur $\mathbf{K}$ est de genre espace et définit le vecteur spin de l'électron $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\hbar\mathbf{K}/\sqrt{-\mathbf{K^2}}, \quad \mathbf{K^2} \neq \mathbf{0}$.

Ces observables sont liées par les identités de Fierz qui sont données par ([3]):

$$J_\mu J^\mu = \sigma^2 + \omega^2 = -K_\mu K^\mu, \quad J_\mu K^\mu = 0$$

$$J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu = \omega S_{\mu\nu} + \sigma(*S)_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad (*S)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}S^{\alpha\beta}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ désignant le tenseur de Levi-Civita.

La question de savoir si on peut déterminer le spineur Ψ, connaissant les observables $\sigma, \omega, \mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{K}$, a été étudiée par plusieurs auteurs ([3], [4]).

Il a été montré notamment qu'étant donné $\sigma, J_\mu, S_{\mu\nu}, K_\mu$ et ω, vérifiant les identités de Fierz on a

$$\Psi = C(\sigma + J^\mu\gamma_\mu + \frac{i}{4}S^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] - i\gamma_5 K^\mu\gamma_\mu + \gamma_5\omega)e^{i\alpha}\,(1,0,0,0)^T$$

où α est une constante arbitraire, $C = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma + J_0 - S_{21} - K_3}$. et $(1,0,0,0)^T$ désigne le transposé du vecteur unicollone correspondant. Nous donnons ici une méthode algébrique, basée sur la représentation du spineur comme élément de $\mathbb{C}^2$ dans le cas des spineurs de Pauli, ou comme élément de $\mathbb{C}^4$ dans le cas des spineurs de Dirac. Cette méthode a l'avantage de ramener le problème à celui de la résolution d'un système d'équations d'inconnues $z_i \in \mathbb{C}$. Elle met en evidence entre autres que la détermination du spineur ψ est faite non pas un facteur de phase près, mais plutôt à un élément de $SU(2)$ près. En particulier on obtient que se donner des observables telles que $\sigma = 1$ ou $\omega = 1$, c'est se donner un G-fibré principal avec $G = U(1)$ dans le cas de l'algèbre de Clifford Cl_3 et $G = SU(2)$ dans le cas de $Cl_{1,3}$.

2 Inversion des spineurs de Pauli

Nous considérons l'algèbre de Clifford Cl_3 de $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique euclidienne et d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3).

Soit ψ un spineur de Pauli. On sait lui associer de façon unique l'élément $\phi = x^1 + x^2e_1e_2 + x^3e_2e_3 + x^4e_1e_3 \in Cl_3^+$ permettant de définir la représentation de ψ sous la forme d'un élément de $\mathbb{C}^2$. Nous dirons que le spineur ψ a pour composantes $\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$

Les observables qui sont associées au spineur sont données par

$$\sigma = \psi\tilde{\psi}, \quad \mathbf{J} = \psi e_3\tilde{\psi}, \quad \mathbf{S} = \psi e_1e_2\tilde{\psi}, \quad \omega = \psi e_1e_2e_3\tilde{\psi}$$

Elles s'expriment, en fonction des composantes de ϕ par:

$$\sigma = \left((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\right) \tag{2}$$

$$\omega = \sigma e_1e_2e_3 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= 2\left(x^1x^4 + x^2x^3\right)e_1 + 2\left(x^1x^3 - x^2x^4\right)e_2 + \\ &\quad + \left((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2\right)e_3 \\ &= J_1e_1 + J_2e_2 + J_3e_3 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2\left(x^1x^4 + x^2x^3\right)e_2e_3 + 2\left(-x^1x^3 + x^2x^4\right)e_1e_3 + \\ &+ \left((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2\right)e_1e_2 \end{aligned} \tag{5}$$

et sont reliées entre elles par les relations (Identités de Fierz)

$$\omega^2 = -\sigma^2; \quad \mathbf{J}^2 = \sigma^2; \quad e_1e_2e_3\mathbf{J} = \mathbf{S} \tag{6}$$

La donnée de $\mathbf{J}$ par ses composantes (J^1, J^2, J^3) permet alors de déterminer les observables ω, σ et $\mathbf{S}$.

La recherche du spineur $\psi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ associé aux observables se ramène alors à la résolution d'un système d'équations dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} &=& J^1 \\ i\bar{z_2}z_1 - iz_2\bar{z_1} &=& J^2 \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 &=& J^3 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 &=& \sigma \end{array} \right. \tag{7}$$

dont les solutions sont données par

$$z_1 = ke^{i\alpha}, \quad z_2 = \frac{J^1 + iJ^2}{2k}e^{i\alpha}, \quad 2k^2 = \sigma + J^3$$

On a donc la conclusion

La donnée des observables σ et $\mathbf{J}(J^1, J^2, J^3)$, détermine à un facteur de phase $e^{i\alpha}$ près, le spineur $\psi = \frac{1}{2k}\begin{pmatrix} \sigma + J^3 \\ J^1 + iJ^2 \end{pmatrix} e^{i\alpha}$, qui a la représentation matricielle

$$\frac{1}{2k}\begin{pmatrix} \sigma + J^3 & -J^1 + iJ^2 \\ J^1 + iJ^2 & \sigma + J^3 \end{pmatrix} e^{i\alpha}$$

avec $2k^2 = \sigma + J^3$.

Il faut noter ici que si $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est une solution de (7), il en de même de $e^{i\beta}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, conduisant ainsi à la construction d'un fibré principal de groupe structural $U(1)$ au-dessus de l'algèbre des observables.

Lien avec la fibration de Hopf

En considérant les équations (7), à un spineur ψ de composantes (x^1, x^2, x^3, x^4), on a associé $\mathbf{J}$ de composantes (J^1, J^2, J^3) qui sont telles que

$$\sigma^2 = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{J}^2 = 1$$

L'application $\pi : \psi \mapsto \mathbf{J} = \psi e_3 \tilde{\psi}$ est donc une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$\pi(z_1, z_2) = \big(z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1}, i\bar{z_2}z_1 - iz_2\bar{z_1}, |z_1|^2 - |z_2|^2\big) \tag{8}$$

et on vérifie sans peine que sa restriction (notée encore π) à la sphère unité S^3 de $\mathbb{C}^2$ est à valeurs dans la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$ et qui vérifie

$$\pi(\psi) = \pi(\psi') \quad \Longrightarrow \quad \psi' = e^{i\alpha}\psi$$

La restriction de (8) à la sphère unité de $\mathbb{R}^4$ est connue sous le nom d'application de Hopf ([6]) et $\big(S^3, S^2, \pi, U(1)\big)$ est un $U(1)$-fibré principal.

La 1-forme de connexion associée à ce $U(1)$-fibré principal est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}(\psi^\dagger d\psi - (d\psi^\dagger \psi) \\ &= \frac{1}{2}\frac{J^1 dJ^2 - J^2 dJ^1}{1 + J^3} \\ &= -\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta d\beta \end{aligned}$$

(θ, β) étant le système de coordonnées sphériques sur S^2.

La 2-forme de connexion est

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\sin\theta d\theta \wedge d\beta$$

En posant $\Theta^1 = d\theta$ et $\Theta^2 = \sin\theta d\beta$, on a

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\Theta^1 \wedge \Theta^2$$

c'est le champ d'un monopôle d'intensité $g = 1$ ([9])

3 Inversion d'un spineur de Cl_4

Dans le cas de l'algèbre de Clifford Cl_4, on a les représentations du spineur de Dirac ([8]) soit comme un élément de $\mathbb{C}^4$ soit comme un élément de $\mathbb{H}^2$, l'espace des couples de quaternions,

$$\Psi = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ y_1 + iy_2 \\ u_1 + iu_2 \\ v_1 + iv_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - y_2 i + y_1 j - x_2 k \\ u_1 - v_2 i + v_1 j - u_2 k \end{pmatrix} = \Phi$$

avec

$$\Phi = x_1 - v_2 e_0 e_1 + v_1 e_0 e_2 - u_2 e_0 e_3 - x_2 e_1 e_2 - y_1 e_1 e_3 - y_2 e_2 e_3 + u_1 e_0 e_1 e_2 e_3$$

Les observables associés au spineur Ψ sont données par

$$\sigma =< \Phi\tilde{\Phi} >_0; \quad \omega =< \Phi e_5 \tilde{\Phi} >_0; \quad \mathbf{J} = \Phi e_0 \tilde{\Phi}; \quad \mathbf{S} = \Phi e_1 e_2 \tilde{\Phi}; \quad \mathbf{K} = \Phi e_3 \tilde{\Phi}$$

où le symbole $< \quad >_0$ signifie la composante 0 de l'argument considéré.

Les identités de Fierz s'écrivent

$$\mathbf{J}^2 = \sigma^2 - \omega^2; \quad \mathbf{K}^2 = \mathbf{J}^2; \quad \mathbf{J}.\mathbf{K} = 0; \quad \mathbf{J} \wedge \mathbf{K} = (\omega - e_{0123}\sigma)\mathbf{S}$$

En utilisant la représentation complexe du spineur, ces observables se traduisent en fonction des composantes complexes par:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2\right) e_0 + 2\left(Im(z_1 z_4) - Im(z_3 \bar{z_2})\right) e_1 + \\ &\quad +2\left(Re(z_1 \bar{z_4}) - Re(z_2 \bar{z_3})\right) e_2 + 2\left(Im(z_1 z_3) + Im(z_4 \bar{z_2})\right) e_3 \\ &= J^0 e_0 + J^1 e_1 + J^2 e_2 + J^3 e_3 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\sigma = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 \tag{10}$$

$$\omega = 2\left[Re(z_1 z_3 - Re(z_2 \bar{z_4})\right] \tag{11}$$

On en déduit le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |z_1|^2 + |z_2|^2 &=& \frac{1}{2}(\sigma + J^0) \\ \bar{z_2} z_3 - z_1 \bar{z_4} &=& \frac{1}{2}(J^2 + iJ^1) \\ \bar{z_1} z_3 + z_2 \bar{z_4} &=& \frac{1}{2}(\omega + iJ^3) \end{array} \right. \tag{12}$$

dont la résolution en fonction de z_1 et de z_2 donne

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma + J^0} \begin{pmatrix} \omega + iJ^3 & J^2 + iJ^1 \\ -(J^2 - iJ^1) & \omega - iJ^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

avec $\sigma + J^0 \neq 0$ c'est-à-dire $(z_1, z_2) \neq (0,0)$. Les complexes z_1 et z_2 sont liés par la relation

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(\sigma + J^0) \tag{14}$$

Cette solution se présente sous une forme plus familière, lorsqu'on introduit les coordonnées stéréographiques

$$X^0 = \frac{\omega}{\sigma + J^0}, \quad X^l = \frac{J^l}{\sigma + J^0}, \ \ l = 1, 2, 3$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 + iX^3 & X^2 + iX^1 \\ -X^2 + iX^1 & X^0 - iX^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Notons que si

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$, alors z_1' et z_2' vérifient la relation (14). traduisant ainsi que le système (12) permet de déterminer à un élément de $SU(2)$ près les quatre composantes complexes z_1, z_2, z_3, z_4. On a le théorème :

La donnée des observables $\omega, \sigma, \mathbf{J}(J^0, J^1, J^2, J^3)$ vérifiant les identités de Fierz, détermine le spineur $\Phi = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ à un élément de $SU(2)$ près, avec

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0 + iX^3 & X^2 + iX^1 \\ -X^2 + iX^1 & X^0 - iX^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

et $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \dfrac{1}{2}\left(\sigma + J^0\right)$

Lien avec une fibration de Hopf

En utilisant la relation (10), nous avons

$$\sigma^2 = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{J}^2 + \omega^2 = 1$$

On obtient comme pécédemment une application $\pi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ définie par

$$\pi(x_1, x_2, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2) = (J^0, J^1, J^2, J^3, \omega)$$

dont la restriction à la sphère unité S^7 est à images dans S^4 et telle que si $\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ avec $U \in SU(2)$, alors

$$\pi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \pi(z_1', z_2', z_3, z_4)$$

.

$SU(2)$ ayant la topologie de S^3, on a la fibration de Hopf $S^3 \to S^7 \to S^4$

4 Inversion d'un spineur de $Cl_{1,3}$

Les observables ont, dans la représentation du spineur comme élément de $\mathbb{C}^4$ et avec les notations de (1), les expressions suivantes :

$$J^\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi, \quad J^0 = \Psi^\dagger \Psi$$

$$\sigma = \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi, \quad \omega = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_{0123} \Psi, \quad S_{\mu\nu} = \Psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{\mu\nu} \Psi$$

Pour un spineur $\Psi \in \mathbb{C}^4$ de composantes $(z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, on a :

$$\sigma = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2, \quad \omega = -2Im(z_1\bar{z_2}) - 2Im(z_2\bar{z_4})$$

et les composantes de $\mathbf{J}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
J^0 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 && (15)\\
J^1 &= -2R(z_1\bar{z_4}) - 2R(z_2\bar{z_3}) && (16)\\
J^2 &= 2Im(z_1\bar{z_4}) - 2Im(z_2\bar{z_3}) && (17)\\
J^3 &= -2R(z_1\bar{z_3}) + 2R(z_2\bar{z_4}) && (18)
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\left(J^1\right)^2 + \left(J^2\right)^2 + \left(J^3\right)^2 + \omega^2 + \sigma^2 = \left(J^0\right)^2 \qquad (19)$$

égalité que l'on peut traduire sous la forme

$$\mathbf{J}^2 + \omega^2 = -\sigma^2. \tag{20}$$

C'est l'une des identités de Fierz.

La recherche d'un spineur Ψ lorsque sont données les observables $\mathbf{J}(J^0, J^1, J^2, J^3)$, ω et σ se ramène comme dans les cas précédents, à la recherche des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z_1|^2 + |z_2|^2 & = & \frac{1}{2}(\sigma + J^0) \\ z_1\bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_4 & = & -\frac{1}{2}(J^3 + i\omega) \\ z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_4 & = & -\frac{1}{2}(J^1 + iJ^2) \end{array}\right. \tag{21}$$

On peut résoudre ce système en fonction des complexes z_1 et z_2 et on a

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma + J^0} \begin{pmatrix} -J^3 + i\omega & -J^1 + iJ^2 \\ -J^1 - iJ^2 & J^3 + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Les complexes z_1 et z_2 étant liés par la relation

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(\sigma + J^0) \tag{23}$$

On obtient des conclusions équivalentes à celles obtenues dans le cas précédent: on détermine le spineur à un élément de $SU(2)$ près.

En remarquant que

$$\left(J^0\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow \left(J^1\right)^2 + \left(J^2\right)^2 + \left(J^3\right)^2 + \omega^2 + \sigma^2 = 1,$$

on peut construire ici aussi une fibration de Hopf.

5 Conclusions et remarques

La formulation en termes de nombres complexes permet de résoudre de façon plus élégante et simple, le problème d'inversion des spineurs de Dirac. Elle met en evidence que le spineur obtenu n'est pas connu a un facteur de phase $e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ près, mais plutôt à un élément du groupe $U(1)$ près dans le cas des spineurs de Pauli, et à un élément du groupe $SU(2)$ près dans le cas des spineurs de Dirac. Cette construction fait apparaître l'espace des spineurs de Pauli ou de Dirac, comme un G-fibré au dessus de l'algèbre des observables, constituée par les 9 identités de Fierz.

On peut alors rechercher des monopôles (cas d'un spineur de Pauli) ou des instantons (cas de la dimension 4) liés aux structures de G-fibrés que la méthode permet de mettre en évidence.

Références

[1] C. Daviau : Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli Ann. Fond. Louis de Broglie, 22, n^{0}1, 1997, p87-103

[2] C. Daviau : Sur les tenseurs de la theorie de Dirac en Algebre d'espace, Ann. Fond. Louis de Broglie, 23, n^{0}1, 1998, p27-37.

[3] J.P. Crawford : On the algebra of Dirac bispinor densities : Factorization and inversion theorems. J. Math. Phys. **28**(7)(1985), 1439-1441

[4] P. Lounesto: Clifford Algebras and Spinor Operators, In Clifford (Geometric)Algebras With Applications in Physics, Mathematics,and Engineering. Birkhäuser, 1996 p. 5-35

[5] P. Lounesto : Clifford Algebras and Spinors. London Mathematical Society Lecture Note Series. Nø239, Cambridge University Press, 1997

[6] M. Göckeler, T. Schücker : Differential Geometry, Gauge theories, and Gravity. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] Jayme Vaz,Jr. Construction of Monopoles and Instantons by using spinors ans the inversion theorem. In Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, V. Dietrich et al, (eds). Kluwer Academic Publishers, 1998

[8] Coquereaux R. Spinors, reflections and Clifford Algebras : a review; in A. Trautman, G. Furlan (eds) : spinors in physics and Geometry (Trieste, 1986). World Scientific, Singapore, 1988.

[9] Choquet-Bruhat Y., de Witt-Morette C., Dillard-Bleick M. Analysis, Manifolds and Physics (1982) rev. ed. North-Holland

(Manuscrit reçu le 25 août 2000)