Probabilités et grandeurs aléatoires en mécanique quantique

ALBERT TORTRAT

85, rue de Paris 92190 Meudon

RESUME. Nous soulignons ce qu'apporteraient des définitions rigoureuses des grandeurs aléatoires : toujours rechercher et préciser l'espace Ω sur lequel, avec P, chacune doit être définie. Ainsi les fausses inégalités de Bell et de C.H.S.H. sont contradictoires dans leur formulation même. Un même vecteur d'état $\psi(t)$ gouverne des sous-espaces Ω , ou des logiques sensées, incompatibles, non simultanées. Le langage et les interprétations doivent s'y adapter.

ABSTRACT. We underline what rigorous definitions of aleatory values would bring : always to search and to specify the space Ω upon which, with P, each one must be defined. Thus the wrongs Bell's and C.H.S.H. inequalities are contradictory in their formulation itself. A same value of state $\psi(t)$ governs under- states Ω , where logics are normally incompatible or non simultaneous. The language and the interpretations must fit with it.

Les principes que nous voulons rappeler et confronter à une certaine confusion et des difficultés multidécennales (parfois nommées «puzzle E.P.R.») sont sous-jacents dans les §1 et 2 de [1], § de visée identique, mais mieux explicités ici.

1.1 Il est indispensable pour la rigueur et la clarté, de ne parler de

probabilité (Pr. = aussi probabiliste, ou P) et de grandeurs aléatoires (: a., seule la langue russe, des Pr. a gardé ce terme «velitchii »), ou variables a. (:v.a.), *que* comme fonctions de parties A (ou événements) d'un espace Ω , dit espace des épreuves, au sens de tous les résultats possibles ω d'une

épreuve, au cours des réalisations – expérimentales ou abstraites – de l'épreuve *potentielle* Ω , et pour les v.a., de fonctions $X(\omega)$ de ce $\omega \in \Omega$.

Le symbole E, pour «espérance mathématique », appliqué à X, désigne sa «moyenne » $\int_{\Omega} XdP$ ou intégrale sur ce Ω . Ce symbole n'a de sens, comme fonction additive (et linéaire), que strictement limité à un Ω bien défini, i.e.

relatif aux v.a. sur cet Ω , dûment identifiées. P est en conséquence additive sur les f.i. (: indicatrices) 1_A des événements A: f=1 si $\omega \in A$, 0 sinon. Le grand Buffon savait tout jeune en tirer les conséquences dans «Le jeu de franc-carreau », dont on a retenu le « problème de l'aiguille de Buffon » et sa mesure statistique de π .

Connaître l'existence universelle de $\int_{\Omega} XdP$, dite intégrale abstraite, est d'une grande utilité pratique, mais pas seulement (cf. 3.1 ci-après).

A quoi sert Ω ? à *lier* les diverses v.a., X, Y, ... Etant donné deux d'entre elles, ou bien elles sont indépendantes, ou bien elles ne le sont pas. Ce seul mot, au sens rigoureux, nous servira dans tout ce texte (avec celui de simultanéité, cf. 2.2, 3.1 et 3, 8.3) à l'exclusion *de tous autres*, inutiles et sources de confusions par leur ambiguïté et leur profusion.

Nous associerons le mot « simultanéité » à des grandeurs aléatoires définies sur un même Ω , vrai, ou supposé tel.

1.2 Premier principe.

Toute réalisation partielle de l'épreuve potentielle (Ω, P) , p.ex. la mesure d'une grandeur a.X, discrète, prenant donc au moins deux valeurs, c, d, (avec P>0) bouleverse *globalement* le système représenté : le réduit à la partie de Ω où $X(\omega)=c$ (ou d, ...). On désigne cette partie par $\left\{\Omega \mid X=c\right\}$ qui devient la nouvelle épreuve potentielle, dite Ω conditionnée par $\left\{X=c\right\}$. C'est la représentation générale de tout conditionnement.

Supposons que Ω puisse s'écrire $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = \omega_1 \times \omega_2\}$.

Ou Ω_1 et Ω_2 sont indépendants, i.e., par définition,

$$P(A_1 \times A_2) = PA_1.PA_2, \qquad (1)$$

pour toutes parties A_i respectives de Ω_i , ou ce n'est pas le cas, c.a.d. qu'il existe X_1 et X_2 à valeur \pm 1 (choix arbitraire) telles que

$$P\{X_1 = X_2 = 1\} \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$$
, avec $X_i(\omega) = X_i(\omega_i)$

Si ω désigne un couple de particules I et II, ω_1 et ω_2 peuvent désigner respectivement tout ce qui concerne la 1° et la 2° de ces particules (c'est le $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ de Bell dans [2]).

Si X_1 concerne seulement I, on écrira $X_1(\omega) = X_1(\omega_1)$ et la dira cylindrique, de même pour X_2 . Si (1) a lieu on dit que (Ω,P) est le produit de (Ω_1,P_1) par (Ω_2,P_2) , P_i étant limitée aux $A_i \subset \Omega_1$, i.e. dans Ω aux cylindres de bases A_i , qu'on peut sans confusion, identifier à leurs bases. Alors $EX_1X_2=EX_1EX_2$

1.3 Sinon, il est clair qu'il existe des couples X(ω)

tels que la mesure de X_1 affecte X_2 . Le Pr. le constate. On ne peut donc parler (il y a alors une « interaction abstraite » entre X_1 et X_2 qui s'identifie à leur dépendance au sens Pr.) de localité au sens de 2.1 ci-après : comment peut-on dire que parce que les particules I et II sont très éloignées, la mesure de X_1 n'affecte pas une $X_2(\omega)=X_2(\omega_2)$ qui ne serait pas, dans Ω , indépendante de X_1 ? On dit que « I n'interagit pas avec II » et l'on pousse l'analyse dite « réaliste » jusqu'à imaginer (cf. [3] p.13) qu'un message envoyé par I à II, lors d'une mesure concernant I, serait nécessaire pour expliquer que l'état de II ait été modifié (ce que la simultanéité X_1 et de X_2 interdit).

Pourtant, cela est automatiquement le cas si $EX_1X_2 \neq 0$, pour des composantes de spin (notées \pm 1) symétriques : P(X = 1) = P(X = -1) = 1/2.

On complète alors une mesure de X_1 (vu la « localisation » des particules, leur « non-interaction ») par des « éléments de réalité » (e. de r.) pour II, visant ce que la M.Q. (mécanique quantique) « n'explique pas ».

Ces déductions nient notre premier (et seul) principe, qui est lui aussi un e.de r. (non occulte) qui caractérise, à la base, le fait même de l'existence de grandeurs a. Dans [7] Kracklauer ne le fait pas: « the existence of such correlation is not a deep and mysterious ontological matter, just the consequence of a common cause », ni Roger Nataf dans une note de deux pages sur ce même point: la réponse quantique est que « l'information se trouve dans la fonction d'onde spinorielle complètement délocalisée ». On trouvera ci-après, au § 5.4, un exemple théorique très simple de coefficient de corrélation égal à ½, pour un couple de photons, illustrant ainsi la phrase ci-dessus de Kracklauer et l'absence de message de I à II.

Nous sommes obligés en ce point 1.3, de récuser cette volonté trop poussée, ce désir « d'expliquer » (n'est-ce pas aussi le point de vue de Bohr et... celui de Newton ?) au détriment d'une réflexion sur l'irruption de l'aléatoire

en physique (:Φ.), qui est l'événement le plus fondamental (au plan des principes) depuis la naissance de cette dernière, qui était déterministe, rationnelle à l'image de la mécanique (:M.) rationnelle (cf. [8], p. 366, ligne 2 du 2e §, exprimant une motivation E.P.R.).

Ne devons-nous pas entendre le sage Newton qui écrivait (cf. [4] p. 356-357) : « A cette gravité je n'ai pas encore assigné de cause... (cela doit exister) mais jusqu'ici je n'ai pu tirer des phénomènes la raison des propriétés de la gravité, et je ne *feins* point d'hypothèse », puis « expliquer chaque propriété des choses en les douant d'une qualité spécifique occulte par laquelle seraient engendrés les effets qui se manifestent à nous, c'est ne rien expliquer du tout »?

Pages 296-297 de ce [4], l'auteur critique d'ailleurs « l'élévation au rang de principes philosophiques des notions de "localité", "séparabilité", "causalité", etc., comme l'adoration abusive et l'hypostase illégitime de nos habitudes de pensée et de nos tics de langage. » Il appelle à ne plus se référer au sens commun, produit de la Φ. classique. Mais nous n'irons pas jusqu'à appeler « réalisme » (dont se serait écarté Newton) l'effort pour sonder « le soubassement des principes » des représentations mathématiques, « l'intimité de la réalité » (pp. 356-357), au cœur de ce volume de philosophie, tellement au-delà de notre problème limité (ainsi ces pages 356-358 parfaitement nuancées, au total). En effet, cet effort peut s'égarer, en tendant (à son insu, ainsi la non-interaction, qualité occulte) à retomber, inévitablement, sur les modes de pensée liés aux connaissances antérieures.

2.1 A notre premier principe s'oppose donc radicalement le point ii)

du « E.P.R. argument » ([3] p. 9, [8] p. 364) exprimant l'hypothèse de « localité » au sens de « non-interaction entre I et II », de l'indépendance – en termes de mesures de X_2 par rapport à X_1 , notons la (H). Nous n'entrons pas dans l'analyse philosophique des pp. 314-315 de [4], et en exprimerons autrement certains éléments, cf. 5.2 et notre conclusion en 8.3.

De cette (H) on déduit ([2] p. 195, [3] p. 10 et (3.1) p. 11) l'existence de ω_1 et ω_2 (e. de r. cachés) fixant chacun toutes les valeurs X_a et Y_b (pour tous les vecteurs \vec{a} de dimension 2, notations de [2]) des composantes de spin de I et II, avec $X_a = Y_a$ pour les corrélations $\cos 2(b-a)$ qui concerne les photons, ou $X_a = -Y_a$ pour la corrélation $-\cos(b-a)$ qui est celle des fermions de spin 1/2 (cas de [2]).

Localité implique que les X_i (i=1 ou 2) dépendent seulement de ω_i , comme en 1.2. La « non-interaction » (H) concerne à la fois l'indépendance de $X_a(\omega_1)$ et $Y_b(\omega_2)$ (qui a un sens Pr. au sein d'un Ω_{ab}), et le fait que

 $X_a(\omega)=X_a(\omega_1)$ est *unique* lorsque b varie. On considère donc comme « prouvée » l'existence d'un (Ω,P) comme en 1.2, cela matérialisant les e. de r. sous-jacents (du point de vue E.P.R.) et respectant les corrélations susdites, soit $EX_aY_b=EX_aX_b$ ou $-EX_aX_b$ suivant le cas de [13] ou celui de [2]. L'indépendance implique au contraire $EX_aY_b=EX_a$. $EY_b=0$

Cette logique n'est-elle pas étrange (si nous avons bien compris)?

- a) On part du « mystère » des EXY ≠ 0, qui sont des e. de r. Φ. dûment mesurés, ou « vérifiés » (par l'équipe d'Aspect, p. ex., pour « justifier » (H)) ce qui assure la simultanéité des deux v.a. et leur non-dépendance des appareils de mesure. Par (H) on nie (logiquement) ces corrélations pour mieux les cerner avec réalisme, les expliquer.
- b) On en déduit, croit « prouver » un mystère beaucoup plus vaste, le (Ω,P) susdit, appelé le fruit d'un « réalisme local ». Ce résultat implique à la fois la simultanéité de *toutes* les v.a. (en fait celles auxquelles on s'intéressera) et la fusion de toutes les X_a (a fixé, b variant), qui peuvent être, séparément (cf. 5.3) corrélées à des Y.

Cependant cette existence d'un $\omega=(\omega_1\times\omega_2)$ « total » n'est pas de prime abord absurde, puisque I et II sortent, couplées, en un γ (notons le ainsi) d'un appareil de production en série (identiques, laissons au Φ . le soin de définir ce mot, ce γ serait identifiable au vecteur d'état $\psi(t)$?) de ces couples γ . Les γ portent « potentiellement » toutes les valeurs X_a , Y_b (a et b variant), *avant* un couple de mesures suivant un choix (a, b). Le (Ω, P) ainsi fourni paraît très « réaliste » : les γ successifs offriraient des répétitions du même Ω *potentiel*.

2.2 Mais

i) Considérons les états successifs *d'un* photon linéairement polarisé, analysé suivant diverses orientations a de l'analyseur. Suivant la loi de Malus, admise semble-t-il pour un seul photon, et qui rejoint la M. quantique (:Q), on identifie le résultat à une composante de spin (de loi ici non symétrique), valant 1 si le photon est transmis, -1 s'il est absorbé. Nous attachant à l'événement de n transmissions successives, de Pr. de plus en plus petites, ne peut-on dire que ce photon oublie à chaque stade tout son passé, ce qui plaiderait contre la simultanéité susdite? En fait c'est la réalité: intervention d'appareils de mesure, décohérences (cf. 6.1), évolution dans le temps de w(t) qui s'en éloigne.

ii) La M.Q. aussi. Elle interdit les opérations algébriques telles que X(Y+Z) si un des trois couples, tel $(\widetilde{Y},\widetilde{Z})$ d'opérateurs correspondants est illicite : ne commute pas. Dans [1] nous avons voulu suivre en détail la preuve mathématique de Bell dans [2], notant les opérations illicites utilisées, et distinguant (cela est indispensable) un $X(\omega)$ éventuel (v.a. strictement limitée à un Ω) de sa mesure qui, en un certain sens, se réduit à une distribution de valeurs réelles possibles, notée \overline{X} , et de l'opérateur \widetilde{X} (sur un certain espace de Hilbert \mathcal{H}). La distinction de X et \overline{X} n'est jamais faite, comme le plus souvent celle de \overline{X} et \widetilde{X} (ainsi dans [5]). Dans «General quantum mechanics» de Peierls, p. 27, nos trois notations sont confondues.

Tous ces interdits peuvent aussi sembler avoir quelque réalité (celle de Bohr)? Charles Hubert dans [5] a clairement et en toute rigueur mis les points sur les i, en explicitant la non additivité de $\overline{X+Y}$, i.e. des valeurs propres de \widetilde{X} et \widetilde{Y} si $\widetilde{X}\widetilde{Y}\neq\widetilde{Y}\widetilde{X}$. Cela plaide pour la *non-simultanéité* de X et Y, bien que $E\overline{X+Y}=E\overline{X}+E\overline{Y}$, mais perde son sens Φ .?

iii) Certes, il y a plus subtil : X_a et Y_b étant simultanément mesurés, et $\{X_a = Y_a\}$ par exemple étant de P = 1, soit presque sûr, Y_a et Y_b sont simultanément connus, bien que leur couple soit en général illicite. On est donc obligé d'admettre que les interdits ci-dessus concernent la simultanéité des mesures *réalisées* (ici celle de Y_a ne l'est pas), cf. [3] pp. 9-10, et pp. 8-9 pour un premier exemple « who cannot be realized in practice ». Ce fut la réponse de Bohr dès le début des contestations.

3.1 De longs développements existent, autour du «puzzle E.P.R.»

concernant l'existence ou la recherche de «grandeurs cachées» (hidden variables dans [3], [6]). Nous nous bornons à une acception de ce terme remontant à Von Neumann (:V.N.) et Louis de Broglie, acception qui ne l'oppose pas aux e. de r. de 1.3. Ces v. cachées sont censées déterminer (de façon sous-jacente, inconnue) les v.a. mesurées. Elles sont symbolisées, pour nous, par le λ de Bell (dans [2], [3]), qui n'est autre, exactement, que le ω du Pr. Mais leur nature importe peu (pour Bell, comme «e. de r. », λ is anathing over which a notion of Pr. applies, est-il dit p. 10 de [3]), seule importe leur simulténéité, que résume ω , nécessairement aléatoire. ω est l'état élémentaire de De Broglie, l'état sans dispersion de V.N. ([6], [11] p. 448). Y voir un élément de déterminisme sous-jacent (comme en mécanique statisti-

que par exemple) n'apporte rien. On retrouve donc exactement (par une voie non « explicative ») le (Ω,P) de 2.1 $(\lambda \text{ est }\omega)$.

3.2 L'analyse, dans [7], de l'erreur de Bell, nous est incompréhensible.

7La corrélation $\mathrm{EX_aY_b}$ est notée par Bell $P(a,b) = \int A(a,\lambda)B(b,\lambda)\rho(\lambda)d\lambda$. Ce n'est pas une Pr. L'auteur l'écrit

$$\int P(a,\lambda)P(b,\lambda)P(\lambda)d\lambda.$$

et, traitant les valeurs a, b, et λ comme des événements, juge qu'il fallait l'écrire

$$\int P(\lambda)P(a/\lambda)P(b/a,\lambda)d\lambda.$$

en conditionnant a par λ , et b par a et λ . Cela n'a pour nous aucun sens, tout en voulant exprimer que $B(b,\lambda)$ doit dépendre de a (mais non pas $A(a,\lambda)$ de b, cf. 4.2 ci-après).

Remarquons seulement que même si ω est un atome, i.e. si $\{\omega\}$ est un événement de P>0 ($p(\lambda)$ concerne en général $P(\lambda)\equiv 0$), il est insécable par définition, car ω sépare toutes les valeurs des v.a. concernées. Nous pensons que c'est bien mal traduire la rigueur mathématique de Bell, et n'éclaire rien. Charles Hubert dans une courte note sur le point de vue E.P.R. illustre ce cas λ discret : il considère E $A(\alpha,\lambda)$ pour λ fixé, la notant $a(\alpha,\lambda)$, c'est $a(\alpha,\lambda)$ elle-même. Cela est sans conséquence mais complique les écritures.

3.3 Il faut savoir que le Ω du Pr., abstraction commode,

est aussi une réalité bien palpable. Car on peut toujours le réduire à une partie (de P=1) d'un produit de droites réelles de représentation des valeurs $X(\omega)$ de toutes les v.a. auxquelles on s'intéresse, ou qui définissent toutes celles qu'on prend en considération.

Jusque-là, rien ne le distingue du vœu susdit. Mais la P. et les intégrales $\int XdP$ associées (dites abstraites parce que Ω l'est et n'a pas de topologie),

ont la remarquable propriété *d'invariance*, lorsqu'on réduit Ω , i.e. passe à un Ω ' plus petit, par une application qui se borne à supprimer (ne plus séparer les valeurs de) certaines des v.a. constitutives. Le Φ . sait d'ailleurs faire des réductions analogues en M.Q., de façon remarquable (matrices, expressions de ψ).

En conséquence, pour un couple licite (X,Y), quelles que soient les v. cachées qui les détermineraient secrètement, un calcul les concernant, tel EXY, se réduit à l'espace le plus petit séparant les valeurs $(\pm 1,\pm 1)$ de ce couple,

soit $(1,-1) \times (1,-1)$. Il se représente, avec sa P. par le tableau à quatre cases, défini dans le cas symétrique par

$$p = P(XY = 1) = 2P(X = Y = 1)$$
 et $q = 1 - p$

Tableau 1.

	Y=1	Y=-1	
X=1	p/2	q/2	1/2
X=-1	q/2	p/2	1/2
	1/2	1/2	

Pour un triplet non licite (X,Y,Z), i.e. un Ω postulé ou « construit », comme dans [2], le §1 de [1] explicite toutes les P pour des P(YZ=1) = p, P(ZX=1) = q, P(XY=1) = r données. Les p, q, r, doivent satisfaire à quatre inégalités (i.) dont trois (par permutations circulaires, $p+q-r \le 1, ...$) entraînent celles de Bell, définissant une unique P symétrique (aux ordres 1, 2, 3).

On peut montrer (c'est assez long) qu'il en est de même pour un quadruplet (X,Y,Z,U) dont tous les triplets vérifient les inégalités susdites (mais la solution symétrique dépend d'un degré de liberté, ce qui nous empêche de pousser l'extension à plus de 4 v.a.). Cela implique que l'i. de C.H.S.H. (ciaprès en 4.2) se déduit de celles susdites, en fait celles de Bell, on le voit de suite directement.

3.4 Il nous paraît significatif de retenir des dernières lignes de [12],

exprimant ce qui serait une exigence non raisonnable, que celle retenue contienne le seul vœu de la *simultanéité des e. de r.*, en fait (suivant le contexte), celle des grandeurs séparément mesurables. Ainsi toute expression plus ou moins difficile des e. de r. a disparu au profit du *seul mot* de simultanéité. C'est peut-être ce qui explique la phrase « a comprehensive definition of the e. of r. is not necessary » du début de [12].

Ainsi nous ne distinguons pas «the clear question of the e. of r.» (qu'ils ne sont pas pour nous) et «the purity of E.P.R. thinking» de «the fuzzy problem of hidden v.» (réduit par nous, cf [3] p. 13). Seul nous importe que leur identique expression mathématique comme vœu, fasse disparaître l'ambiguïté des mots, et pour nous soit plus réaliste.

3.5 Bell lui-même,

dès 1966 (cf. [11]) a montré (avec d'autres éléments remarquables) la contradiction logique que comporterait un Ω définissant, pour une seule particule, des composantes $X_a=\pm 1$, pour tout vecteur unité a, en dimension 3 : le seul respect des cohérences licites en M.Q. ([10], §II) implique que $X_a=1$, $X_b=-1$ nécessite que Arctg (b-a) soit ≥ 1/2, ce qui est impossible au voisinage de la frontière des domaines $\{X=1\}$ et $\{X=-1\}$. La preuve, qui dût être révisée est très clairement exposée dans [10]. Depuis, des exemples de l'impossibilité d'un seul ω de simultanéité, pour 2, 3, 4 particules ont été donnés (cf. réf. [8] et [9] de [3], [7] p. 201.), recensés en 1993 dans [10]. La M.Q. confirme de façon éclatante notre rejet de (H) et des déductions conduisant aux « ω totaux » de 2.1 et cela aurait dû susciter la révision puis la clôture de bien des débats antérieurs.

4.1 Résumons.

Deux éléments trop souvent mal séparés sont au soubassement invoqué des fausses i.

- 1) devant les corrélations $EXY \neq 0$, p. ex. de $|\cdot| = 1$, le recours à une « non-interaction » (H), injustifiable car contredisant notre premier principe et la notion même d'aléatoire.
- 2) la construction, partant de (H), d'une notion de «réalisme local ». Celui-ci implique le « $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ total » de 2.1, et les simultanéités et – fausses – identifications de X_a distinctes (cf. 2.1) qui prouvent les i. ([2] pour 3 couples, ci-après pour 4 couples). C'est (3.1) p. 11 de [3], comme le (Ω ,P) de 2.1 et 3.1 ci-dessus.

N'ayant aucune capacité à nous plonger dans les réflexions philosophiques de [9] et [4], et n'ayant en vue, en ces §2 à 4, que les faux théorèmes, si longtemps admis comme vrais ([10], p. 804), nous sommes étonnés de ne voir jamais perçue, semble-t-il, dans tous les textes concernant ce même sujet, la contradiction interne de leur *seule* formulation. Elle suffit à les réfuter sans autre examen.

4.2 L'i. de C.H.S.H., ou B.C.H.S.H. pour rendre hommage à John Bell

a l'avantage ([1] p. 74) de réunir quatre couples licites (a,b), (a,b'), (a',b), (a',b') d'orientations des « analyseurs » ou appareils de mesure de composantes de spin (X_a,Y_b) D'emblée se basant sur le (Ω,P) déduit du « réalisme local » de 2) ci-dessus, elle réduit (cela correspond aux opérations illicites, mieux masquées ici, dites en 2.2ii)) les huit v.a. réunies en quatre couples

distincts $(\omega_1 \grave{a} \omega_4)$, \grave{a} quatre, en identifiant $X_{ab}(\omega_1)$, $\omega_1 \in \Omega_{ab}$ et $X_{ab'}(\omega_2)$ sur $\Omega_{ab'}$, etc. On viole ainsi la notion de base dite en 1.1.

Posant $X = X_a$, $X' = X_a$, Y et Y' pour b et b', on considère

$$S = XY - XY' + X'Y + X'Y' \tag{2}$$

toujours égale à ± 2 , pour des valeurs de ces v.a. égales à ± 1 .

On met un E devant ce S (ce qui nécessite le (Ω,P) susdit), d'où la trivialité

$$|ES| \le 2 \tag{3}$$

On écrit ensuite
$$ES = EXY - EXY' + EX'Y + EX'Y'$$
 (4)

Tous les Φ . s'accordent (cf. [10] §II et 2.1 ci-dessus), pour imposer à (Ω,P) la conformité de ses EXY à la M.Q., aux valeurs statistiquement vérifiables par des expériences Φ . distinctes (dans le temps et l'espace si on le désire) répondant aux quatre épreuves Pr. Ω_{ab} , ... susdites. « La démonstration » se réduit alors à la lecture (4) de (3) pour donner (5) ci-dessous. Mais (4) est fausse dès que les v.a. du second membre ne sont plus simultanées, les E devenant incompatibles. Et, au membre de droite de (4) est détruite la réduction (illicite) dite ci-dessus, détruite la contrainte qu'on impose à ES lue sur Ω , mettant en évidence la contradiction qu'il y a lire (3) sous la forme

$$|\cos 2(b-a) - \cos 2(b'-a) + \cos 2(b'-a) + \cos 2(b'-a')| \le 2.$$
 (5)

Il reste pour matérialiser cette contradiction à constater que le maximum de (5), purement algébrique, égale $2\sqrt{2}$ pour un bon choix de a, a', b, b'.

La seule conséquence des « expériences » dites unanimement réfuter (3) lue (5), ne peut être, avec la « vérification » des E $X_a Y_b$ (la conformité à la M.Q.), que la « justification » de (H), dans le cas des subtiles et remarquables expériences d'Aspect :

- [3] le laisse entendre (§4, p. 13) en écrivant, visant le message de I à II dit en 1.3 ci-dessus, « so vicious is the mind of the people in this field of "disputation" »,

 la note susdite en 1.3 de C. Hubert, mentionne les variantes d'expériences d'Aspect qui interdisent une interaction de I sur II, [5] p. 431 dit que chaque moyenne :

$$EX_a Y_b = \cos 2(b - a) \tag{6}$$

est prouvée par la M.Q., puis que l'existence de |ES| > 2 est confirmée par l'expérience. Cf. 4.3 ci-dessous pour son explication.

Ce qui précède vaut à l'identique pour l'i. de Bell, avec S=XZ+YZ-XY pour la particule I, toujours ≤ 1 et $EX_aY_b=-EXY$. La contradiction réside toujours dans la réduction illicte de trois couples de v.a. à trois v.a.

4.3 Cette lecture de la fausse i.,

cette élémentaire réfutation repose sur la seule conception des v.a. dites en 1.1. Elle n'est jamais perçue (pour nous [7] ne justifie pas son titre). Au contraire, on « déduit » de la dite « réfutation par l'expérience » de l'i., la dissociation des X_a , X_a , Y_b , Y_b , dissociation souvent nommée « contextualité de ces v.a. ».

Ainsi p. 431 de [5], celle-ci est dite « l'hypothèse supplémentaire » introduite dans la thèse d'Aspect; Franck Laloë fait de même dans « La Recherche » de nov. 1986.

Insistons. La réfutation de l'i. ne peut être, (6) étant admis, que celle « des raisonnements qui l'ont prouvée », pour la satisfaction de l'esprit. Au-delà de ce qui précède (et qui suffit) il est bien peu satisfaisant, pour nous, de conclure ([13]) qu'il faut abandonner un certain « réalisme local » et non la fausse hypothèse (H), ce qui est notre deuxième réfutation (2.1 ci-dessus). Dans [3], R. Omnès conclut que cette longue histoire d'interprétation de la M.Q. a montré « undoubtedly » l'existence (pour nous évidente, consubstantielle des grandeurs a.) et l'intérêt des états « entangled ».

C. Hubert conclut [5] par « toute grandeur Φ. doit être traitée comme un opérateur », en rappelant la non-commutativité de la M.Q. Sa réfutation, repose alors sur toute la technique de cette dernière,qu'il maîtrise parfaitement : il entend S comme l'*opérateur* associé

$$R = AB - AB' + A'B + A'B'$$
(7)

qui fait disparaître toute contradiction (*due aux \Omega disparates*). Il n'y a plus en effet qu'un « ω aléatoire unique », celui dit à la fin de 2.1, i.e. le couple γ

« gouverné par le vecteur d'état $\psi(t)$ », et *un seul* opérateur E, additif mais qui perd son sens Φ . (alors C.H. peut nier que $B' = \pm B$), en cas de noncommutativité.

En 5.3 nous dirons la question que soulève ce contraste entre les Ω_{ab} partiels ci-dessus, et le $\psi(t)$ qui « gouverne à l'état potentiel » tout le couple γ : il y a un seul \widetilde{X}_a noté A par C.H., et de nombreux X_{ab} .

La non-distinction dite en 2.2ii) est ainsi une source possible de cette *énorme* erreur récurrente, énorme lorsqu'on veut bien « penser aléatoire » et non suivre Einstein qui s'y refusait ?

Rappelons enfin

- que c'est la défiance (explicite mais mal précisée, dans [9] p.47) vis-àvis de la M.Q. qui est à la base de tous les développements des points 1) et 2) de 4.1. Notre réponse les évite, aussi bien que la M.Q. hormis (6) (pourtant inessentiel, la contradiction dénoncée ne concerne pas, en son principe, la valeur algébrique précise de E X_a Y_b),
- que dans [8], Unnikrishnan retrouve un « réalisme strictement local » en prenant en compte une « cohérence de phases » plus fine que celle des valeurs propres qui est seule en jeu dans les couples des i. ici concernées.

5.1 La M.Q. offre une situation intéressante, dont les Pr. n'ont rienà dire

sauf à demander aux Φ . d'expliciter clairement dans chaque cas, le champ des diverses grandeurs a.

Commençons par l'indépendance, au sens de la M.Q. («not entangled » p.3 de [3]), de deux sous-systèmes composant un S unique par leur réunion. Bornons-nous à supposer que S_1 et S_2 sont distingués par toutes les coordonnées spatiales les concernant, qui définissent les «espaces de configuration » de la M. classique, Ω_1 et Ω_2 , munis des mesures dv_1 et dv_2 , éléments de volume.

Le vecteur d'état $\psi(t)$ est une fonction de $\omega_1 \times \omega_2$, fonction appartenant à l'espace hilbertien \mathcal{H} de (V.N.) et définissant (Ω,P) par $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et $P(d\omega) = |\psi(t)|^2 dv$. En M.Q. l'indépendance de S_1 et S_2 est identifiée à

$$\psi(t) = \psi_{1t}(\omega_1) \psi_{2t}(\omega_2). \tag{8}$$

Les opérateurs \widetilde{A} et \widetilde{B} concernant S_1 et S_2 respectent les f. cylindriques (cf. 1.2) $\varphi(\omega) = \varphi(\omega_1)$, $\chi(\omega) = \chi(\omega_2)$. Alors $dP(\omega_1 \times \omega_2) = dP(\omega_1)dP(\omega_2)$ et vu

$$\widetilde{A}\widetilde{B}\varphi\chi = \sum c_i c_j' a_i b_j \varphi_i \chi_j \tag{9}$$

si $\{\varphi_i, a_i\}$ sont les f. propres et valeurs propres de \widetilde{A} , $\{\chi_j, b_j\}$ celles de \widetilde{B} , on a

$$EAB = \sum c_i c_j' a_i b_j = EA.EB$$
 (ou $E\widetilde{A}\widetilde{B}$...).

Ces E ne sont pas des \int sur Ω , ou Ω_1 , Ω_2 .

C'est dire que (8) exprime aussi l'indépendance Pr. de S_1 et S_2 . Vu (9), \widetilde{A} et \widetilde{B} commutent toujours.

5.2 Dans le cas général, ψ(t) ne définit que des «sous-espaces de Pr.»

([1] § 2.1), qu'il faut indexer si on en considère deux ou plus, liés à des groupes $\{A_i\}$ de « grandeurs commutantes ». Le lien entre deux d'entre eux ou plus, est fait par les opérateurs (4.3 ci-dessus). Entre $\{A_i\}$ et $\{B_j\}$, un couple (A,B) peut fort bien être licite : \widetilde{A} \widetilde{B} = \widetilde{B} \widetilde{A} .

Les histoires cohérentes de Griffiths ([4] pp. 270-274, 309, 312) ne relèvent-elles pas de processus a. (se déroulant durant un Δt) bien définis sur des Ω (ω définit alors des fonctions de t ou trajectoires)? « L'intérêt véritablement dramatique des conditions d'additivité de P– de Griffiths » se révèlerait lorsqu'on introduit de tels couples (A,B), p. ex. des v. de localisation?

5.3 Revenons sur l'exemple de 4.3 ci-dessus.

 $\psi(t)$ exprimerait, nous l'avons dit en 2.1, le γ unique tenant lieu d'ensemble d'épreuves potentielles partielles.

Seul un appareillage \mathcal{A} définit la répétition d'une $m\hat{e}me$ épreuve a., Ω , partielle, sous la forme des couples γ successifs dits en 2.1. C'est le cas de chaque vérification de (6). Mais pour deux séries distinctes d'expériences, telles celles portant sur Ω_{ab} et Ω_{ab} , si ψ est le même, les couples γ ne le sont plus, les répétitions d'épreuves sont distinctes. Ne pouvant apparier les γ (les confondre deux à deux), le lien par les opérateurs, dit en 4.3, n'existe plus entre les couples (X,Y) sur Ω_{ab} et sur Ω_{ab} .

Pour a'-a, b'-b multiples de $\pi/2$, A et A', B et B' commutant (p. 434 de [5]), il y a un Ω commun pour un unique γ répétable (avec A' = \pm A, B' = \pm B et (5) vérifiée), mais l'argument demeure. Nous pouvons, nous

semble-t-il, considérer les quatre Ω_{ab} comme indépendants au sens Pr., i.e. comme ne pouvant être rattachés à un Ω commun, qu'à leur produit. Le Φ . peut-il nous suivre, en définissant cette indépendance, cette absence de *toute* interaction ?

Notre réfutation de l'i. (3) lue (5) n'a pas utilisée une telle affirmation (nous n'avons rien préjugé quant à un lien possible, ou son absence, entre les Ω_{ab}). Celle-ci est la matérialisation de faits imposés par la M.Q. (la multiplicité des Ω partiels) mais que nous demandons au Φ . de reconnaître, s'il le peut. *Ce faisant*, il réfuterait d'emblée, sans M.Q., les raisonnements douteux menant de (H) au « réalisme local ». Ce serait une troisième réfutation, la moins « technique », indépendante de tout ce qui a été dit de si peu crédible pour nous, comme des expressions algébriques précises (telle (6)) des E $X_a Y_b$.

5.4 Précisons que, dans le cas des merveilleuses expériences d'Aspect,

l'épreuve Ω_{ab} transforme l'état potentiel ψ de (I, II) suivant les polariseurs à deux voies \mathcal{A}_a pour I et \mathcal{A}_b pour II qui donnent aux photons des états de polarisation rectiligne (a // ou a \bot) et (b // ou \bot). Notons encore que si I et II étaient supposés polarisés rectilignement suivant la $m\hat{e}me$ direction θ (aléatoire équirépartie) avant d'aller vers \mathcal{A}_a et \mathcal{A}_b de sorte que les variable aléatoire ($X_a \mid \theta$), ($Y_b \mid \theta$) soient indépendantes dans l'épreuve { $\Omega_{ab} \mid \theta$ }, on obtiendrait $EX_aY_b = \frac{1}{2}cos2(b-a)$ sans nécessiter de « message d'interaction » entre I et II.

6.1 R. Omnès considère que la «décohérence» promet une méthode

plus féconde que la méthode de pensée qu'il vise en cette p.296 de [4]. Il nous semble que cela ne peut en rien balayer nos remarques.

Nous raisonnons avec la théorie de V.N., à la base de toute la M.Q. Elle concerne d'abord une analyse ponctuelle dans le temps, à l'instant t, impliquant la simultanéité absolue. C'est donc un aspect idéal, comme toute représentation mathématique d'une réalité Φ. « légèrement plus complexe » !

La découverte par la théorie puis par l'observation du phénomène de décohérence, à l'échelle macroscopique « réévalue l'ancienne pensée Q., qui a cessé de s'étendre à l'universalité du monde » (cette même p. 296). Elle appelle des mises au point (p. 317).

Les mesures séparées de X et Y commutantes, induisent deux décohérences séparées quoique à peu près simultanées, dans un même Δt commun. Mais le résultat est toujours a. Notre premier principe demeure donc, inchangé. Il concerne les mesures. Une réalisation (partielle ou totale) de

l'épreuve d'un sous-espace (Ω,P) nécessite la mise en oeuvre d'un appareillage \mathcal{A} , au sein duquel se produisent les décohérences, pp. 307-308. $\psi(t)$ définit potentiellement le système S, et non la mise en oeuvre d'appareils qui, par leurs mesures, le bouleversent. Cela comme pour un (Ω,P) du §1.

En pratique \mathcal{A} introduit donc de nouveaux systèmes macroscopiques, dont les Φ ., entre autres ceux qui suivent Bohr, tiennent le plus grand compte. C'est \mathcal{A} qui assure le passage de $\psi(t)$ à une fonction propre de l'opérateur \widetilde{A} correspondant, en un temps extrêmement court.

Notons que pour tout ensemble $\{A_i\}$ licite, la réalisation simultanée de leurs valeurs (a.) peut être théoriquement obtenue par la mesure d'une seule grandeur R dont les A_i (i=1,...I) sont des fonctions certaines, ce qui réduit les I décohérences séparées à une seule, et fournit la répartition a. simultanée de toutes ces A_i , le Ω qui les rassemble.

6.2 Qu'on nous permette de rendre hommage au magnifique «calcul des probabilités » de M. Robert Fortet (Ed. du C.N.R.S.), 1950.

Frédéric Joliot-Curie y louait dans sa préface l'accent mis sur les termes d'épreuve et de catégorie d'épreuves, que nous avons nommées «réalisation de l'épreuve », de résultat ω , et «épreuve potentielle » (on dit aussi espace des épreuves) $\Omega = \{\omega\}$. Il notait en même temps la prééminence de l'aspect logique sur les notions plus habituelles des Φ ., en cette matière. La conception de ce livre fut une oeuvre collective, discutée par une dizaine d'utilisateurs potentiels, sous sa direction.

7. Toute la théorie élémentaire des Pr. repose sur la notion de suite

de v.a. indépendantes, et d'abord dans le cas où les X_i sont de même loi (de distribution) : équidistribuées. C'est dire qu'elles sont obtenues par répétition (indéfinie) de la réalisation d'une première épreuve. C'est cela qui permet de dire que

$$\frac{1}{N} \sum_{1}^{N} X_{n} = Z_{N} \text{ converge vers } EX = \int_{\Omega} X dP.$$
 (9)

Nous l'avons vu, Ω se réduit, pour chaque couple (trois ou quatre) des i. envisagées, à $\Omega_1 = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$, muni d'une P_1 suivant le tableau T de 3.2.

Mais la convergence (9) ne prend son sens que sur $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ où la Pr.

produit est bien définie, et cette convergence doit être entendue au sens de la « CV. en probabilité » :

$$P\{|Z_N - EX| > \varepsilon\} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \text{ pour tout } \varepsilon,$$

ou au sens de la CV. presque sûre, i.e. pour tout ω sauf sur une partie P-nulle de ce Ω .

Le premier sens a une réalité plus concrète, car une « partie nulle » de Ω l'est moins. Z_N est la quantité calculée dans chaque série statistique de mesures pour évaluer EX, ou vérifier (6), tel Aspect. C'est la M.Q. qui définit le (Ω_l, P) . C'est la théorie des Pr, avec ses éléments « abstraits » qui simplifie bien des écritures de calcul de moyennes EX, qui ne sont pas ici des moyen-

nes
$$Z_N$$
 sur échantillon, Z_N est une v.a. sur $\prod_{n=1}^N \Omega_n$ ou Ω (cf. [2], [3], [4]

p.307-308). Ainsi dans [9] p. 28, [1] p. 86) le passage d'un Ω fini (une population) à l'i. de Bell, n'est pas, rigoureusement, élémentaire. L'exemple des couples de jumeaux, de [9], respecte l'existence d'un Ω , fini. Il ne peut en rien faire comprendre celle d'un Ω (postulé) pour les couples (de protons) de [2], donc justifier l'i. de Bell.

8.1 Le langage qui désigne comme supersposition de fonctions d'onde,

la décomposition d'un vecteur d'état $\psi(t)$ (nommé aussi, malencontreusement, fonction d'onde), en une combinaison linéaire de fonctions propres φ_i (orthogonales dans \mathcal{H}) relatives à un opérateur \widetilde{A} et un appareil \mathcal{A} de mesure, associé, nous paraît poser problème.

Le terme de fonction d'onde a trop de sens divers en Φ ., sans rapport général avec les $\psi(t)$ et ϕ_i , et aussi en M.Q. (vu l'aspect ondulatoire associé à tout corpuscule), pour que le mot superposition ne soit pas ambigu (cf. la note 1 p. 303 de [4]). Le glossaire, p. 402, le rattache en effet – comme « principe de superposition » – aux interférences en optique, d'où le glissement au « lancinant problème d'interférences entre deux états quantiques » auquel « notre imagination se refuse car la réalité ne nous a jamais mis en face d'une telle situation », mais « au niveau conceptuel elles restent possibles en M.Q. », p. 305.

Il est clair qu'avant un choix de A, l'état du système S est potentiel, c'est $\psi(t)$, qui est l'état réel, la vérité (parce que a.). Et les logiques sensées (p.

313) sont les histoires cohérentes dites en 5.2. Nous ne voyons pas là de « piège diabolique » (p. 313), seulement la formulation précise d'une réalité. Il faut ensuite distinguer.

8.2 On extrapole au cas d'un événement B

aléatoire dans le temps, comme la désintégration d'un atome (ou d'un paquet d'entre eux), ou le retour d'un électron d'un état excité d'un atome, à un état de moindre énergie. L'instant τ auquel se produit B n'est pas formalisé par la théorie. On se borne, partant d'un état initial A (à l'instant 0) où B n'est pas réalisé, à envisager $\psi(t)$ en un temps T où P(B) est, suivant le temps propre ou période de la loi de Poisson qui régit B, > 0 et < 1. $\psi(t)$ est alors (incluant un \mathcal{A} , p. 299) somme de deux termes représentant l'état initial A, et l'état B réalisé ou non au temps T. Est-il raisonnable en ce cas de donner un sens à une telle « superposition » (de deux états qui se succèdent dans le temps !), embellie par une métaphore (inavouée) sous le nom de « chat de Schrödinger », et indéfiniment répétée, parfois comme « état » où le chat est à la fois mort et vivant ?

En fait (p. 304-306) la décohérence (cf. 6.1) annule de telles interférences à grande échelle, ainsi presque impossibles à surprendre.

8.3 Mais on a vu de telles interférences, avec des particules élémentaires

(p. 306). « au delà, le meilleur exemple est celui des interférences de Young et Fresnel ».

Bornons-nous au cas de deux trous dans un écran, tel que l'expose Schrödinger dans « Science et humanisme » (en 1951, trad. Desclée de Brouwer, 1954, p. 82):

Ou bien on occulte un des trous, obtenant l'appareillage $\mathcal A$ et l'état ψ du photon émis de la source ponctuelle S. Sur une plaque photographique on observe la dispersion, autour de l'alignement avec S et le trou T_1 , des taches, formées de grains de B_rA_g développés, pour une succession dans le temps de photons qui répètent l'épreuve Ω_1 ,

ou bien les deux trous demeurent. Soit \mathcal{A}' le nouvel appareillage et ψ' le nouveau vecteur d'état. Le résultat «étonnant» est que (pour une même durée d'exposition), la loi de répartition des taches (leur densité) n'est pas la superposition de celles (symétriques) obtenues avec T_1 ou T_2 seuls, mais celle qui répond à la loi, d'optique classique, d'interférences, suivant les différences de chemin des trajectoires. Cette image, non instantanée, illustre

une répétition de l'épreuve Ω ' définie par ψ ', elle donne un échantillon de cette deuxième épreuve.

Il n'y a nulle superposition d'états propres d'un opérateur représentant la répartition spatiale, de dimension 2, aléatoire, des «impacts » de photons, seulement un échantillon d'une loi qui, \mathcal{A}' ayant remplacé \mathcal{A}_1 ou \mathcal{A}_2 , ne peut correspondre à celle d'une superposition irréalisable, de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 séparés, qui ne porteraient pas sur le même photon, comme en 5.3 avec les γ .

Cela a-t-il un sens de dire ψ ' combinaison de ψ_1 et ψ_2 , ou de parler d'interférence de ces deux « états » ? N'est-on pas encore dans la confusion (ou les jeux de mots) due à un langage trop général et imprécis ?

Nous remercions vivement M. Bernard d'Espagnat, M. Franck Laloë, et M. Roland Omnès de tous les éléments qu'ils nous ont fournis, ou fait connaître, nous permettant ce complément à [1], ainsi que la direction de ces annales pour l'avoir examiné, comme le premier texte.

Références.

- [1] A. TORTRAT Variables aléatoires à valeurs ±1, paramètres cachés et séparabilité en physique quantique. Ann. Fond. Louis de Broglie, Vol. 20, n°1, 1995.
- [2] John S. BELL On the Einstein Podlsky Rosen Paradosc. Originally published in Physics, I, 195.200 (1964).
- [3] Roland OMNÈS, An introduction to entangled states. Labor. de physique théorique, B.P. 210 unv. Paris-Sud 91405 (ORSAY)
- [4] —, Philosophie de la science contemporaine, Gallimard, 1994.
- [5] C. HUBERT, Critique de l'inégalité BCHSH, Ann. Fond. Louis de Broglie, Vol. 15, n°4, 1990.
- [6] Von NEUMANN, Les fondements mathématiques de la mécanique quantique. Presses Universitaires de France, 1947.
- [7] A.F. KRACKLAUER, « La "théorie" de Bell est-elle la plus grande méprise de l'histoire de la physique ? » Ann. Fond. Louis de Broglie, Vol. 25, n°2, 2000.
- [8] C.S. UNNIKRISHNAN, Quantum correlations from wave-particle unity and locality: Resolution of the E.P.R. puzzle. Ann. Fond. Louis de Broglie, Vol. 25, n°3, 2000.
- [9] B. d'ESPAGNAT, A la recherche du réel. Gauthier-Villars, 2e éd. 1981 (Bordas).
- [10] N. David MERMIN, Hidden variables and the two theorems of John Bell. Review of modern Physics, Vol 65, n°3, July 1993.

- [11] John S. BELL, On the problem of hidden variables in quantum mechanics. Review of modern Physics, Vol 18, n°447-452.
- [12] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY, N. ROSEN, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [13] A. ASPECT, Les corrélation quantiques à l'épreuve de l'expérience : au-delà du réalisme local. Société française de philosophie, 17 mars 2001.

(Manuscrit reçu le 13 décembre 2001)