Identification de la jauge SU(2)×U(1) de l'électrofaible à un produit de sous-groupes orthogonaux de l'espace-temps

Roger Boudet

Université de Provence, Pl. V. Hugo, 13331 Marseille cedex 13
e-mail: boudet@gyptis.univ-mrs.fr

RÉSUMÉ. Un résumé de notre travail précédent sur la théorie de l'électrofaible, dont l'objet est de souligner les aspects géométrique de cette théorie.

ABSTRACT. An abstract of our previous work about the electroweak theory whose aim is to emphasize the geometrical aspects of the theory.

1 Introduction

Nous nous proposons de faire une description géométrique de la théorie G.S.W. de l'électrofaible. Par géométrie nous entendons celle qui fait intervenir directement les propriétés de l'espace-temps de Minkowski $M = R^{1,3}$. Elles concernent en particulier des rotations sur eux-mêmes de sous-repères locaux de M et les rotations infinitésimales de ces sous-repères, que nous avons associées dans [1], 1997, respectivement aux jauges et aux tenseurs d'impulsion-énergie qui interviennent dans cette théorie. De plus le genre, vecteur-temps ou isotrope, de certains courants de probabilité sera évoqué.

Ces propriétés ne sont accessibles que d'un certain point de vue, presque totalement ignoré dans la présentation standard de la théorie, mais nécessaire à sa complète compréhension.

Ce point de vue est celui de la transcription de la *totalité* de la théorie sous une forme invariante par rapport à tout repère galiléen. Ainsi, faisant disparaître cette théorie de l'univers abstrait, quant à ce qu'il est convenu de nommer "les symétries internes", où elle a été placée, il la fait apparaître sous un aspect nouveau et plus fondamental.

En dehors de certaines constantes physiques, on considérera donc l'espace-temps, *rien que* l'espace-temps M.

Nous n'ajouterons pas *tout* l'espace-temps. Cela nous conduirait à la transformation purement géométrique de l'espace-temps, introduite par D. Hestenes en théorie de l'électron de Dirac, qu'on peut associer à l'angle d'Yvon-Takabayasi β. Elle est connue en électromagnétisme classique sous le nom de rotation de dualité et a la propriété d'affecter les bivecteurs de M en laissant les vecteurs invariants. Bien que cette transformation permet d'éviter l'usage de la transformation renversement du temps T dans le passage d'une particule à son antiparticule, renversement invraisemblable sur le plan expérimental, inacceptable sur le plan théorique, au moins pour l'électron-positron de Dirac (voir [1], 2001, par. **4**-3), nous ne l'évoquerons pas ici.

Le point de vue de la considération de grandeurs et d'équations invariantes dans tout changement de repère est la matière même, appliquée à l'équation de l'électron de Dirac de la thèse d'O. Costa de Beauregard [2], 1943.

Relisons le début de la préface de Louis de Broglie à son ouvrage [2], 1949:

"L'idée centrale qui a guidé M. O. Costa de Beauregard dans ses travaux ... a été de présenter la théorie de la Relativité restreinte sous la forme la plus générale, en se plaçant constamment au point de vue de l'Univers de Minkowski, et en évitant autant que possible de faire intervenir les coupes de cet Univers à temps constant".

Ce point de vue avait été abordé, dès la publication par Dirac de sa théorie de l'électron, par des auteurs comme Tetrode, Gordon, Pauli, puis laissé un peu de côté jusqu'à sa reprise en 1940 par Yvon [3]. Il est ignoré, à peu de chose près, dans la quasi totalité des traités de mécanique quantique. D'ailleurs, dans la suite de sa préface, L. de Broglie mentionnait que le recours à un repère galiléen demeure indispensable.

Bien sûr, l'usage d'un repère, et même parfois d'un repère privilégié comme celui lié au noyau d'un atome, est indispensable pour interpréter des mesures expérimentales. On ne pourra pas se passer du "repère du laboratoire". Mais la relativité restreinte repose sur l'Univers de Minkowski, où les grandeurs ont une signification indépendante de tout repère, et l'inclusion de la mécanique quantique dans l'espace riemannien de la relativité générale passe impérativement par la considération de ces grandeurs. Il m'est pénible, mais il est nécessaire, de rappeler (voir [1], 2001, **Note**), l'erreur d'un des plus grands géomètres, Elie Cartan (le maître de mon maître en géométrie), qui, sur une fausse interprétation [4] des spineurs utilisés en mécanique quantique, juge cette inclusion impossible. Son ouvrage est pourtant encore cité dans presque tous les livres traitant de la théorie des spineurs.

Le point de vue de la thèse de Costa de Beauregard a été repris, jusqu'à être l'objet d'un usage exclusif, une dizaine d'annés plus tard par les membres de ce qui allait constituer "l'Ecole Louis de Broglie", en particulier F. Halbwachs, G. Lochak, T. Takabayasi, J.P. Vigier. Il implique l'assez difficile passage du formalisme spinoriel (celui de la mécanique quantique, pas celui d'E. Cartan!) à l'écriture tensorielle. Il a été grandement facilité par la suite par le remplacement introduit par D. Hestenes [5], 1967, du formalisme spinoriel par l'usage des l'algèbres *réelles* de Clifford, en particulier $Cl(1,3)$ qui apporte aux calculs de l'Ecole L. de Broglie une confirmation indiscutable.

La description géométrique que nous allons faire de la théorie de l'électrofaible procède donc du même point de vue que celui de la thèse de Costa de Beauregard, avec une attention particulière à deux objets spécialement étudiés dans cette thèse, le tenseur d'impulsion-énergie et l'ainsi nommé quadrivecteur spin s, unitaire, du genre espace, orthogonal au quadrivecteur unitaire v du genre temps, colinéaire au courant de Dirac. Nous donnerons une description géométrique du tenseur d'impulsion-énergie associé au doublet gauche et nous seront amenés à introduire des vecteurs isotropes de la forme $v \pm s$ dans les courants associés aux parties droites et gauches de l'électron et du neutrino. L'interprétation des jauges est dans le prolongement de celle donnée par Lochak [6] à la jauge $U(1)$ de la théorie de l'électron. Enfin le travail fait dans nos articles [1], 1997, s'est proposé un même but que celui réalisé par Takabayasi [7] pour l'électron de Dirac: remplacer toutes les grandeurs et équations d'une théorie par un ensemble de grandeurs et d'équations indépendantes de tout repère galiléen, et nous ferons de nombreuses réferences à notre article [1], 2001, consacré aux travaux de l'Ecole L. de Broglie. Nous nous abstiendrons de donner une interprétation physique à ce remplacement. Nous remarquerons cependant que *ce qu'on appelle l'énergie peut y apparaître comme le produit de constantes physiques par la rotation infinitésimale sur eux-mêmes de sous-repères locaux de l'espace-temps.*

Par théorie de l'électrofaible, nous entendons celle qui est présentée dans les ouvrages [8] ou [9] par exemple, limitée ici à sa partie leptonique dans la première génération (électron et neutrino).

Nous avons été facilité dans le travail [1], 1997, de traduction géométrique de la théorie électrofaible, par l'usage des algèbres de Clifford $Cl(3,0)$ et $Cl(1,3)$. Mais nous nous bornons ici à rappeler les résultats de [1], 1997, dans le langage de la géométrie, et la connaissance de ces algèbres n'est pas nécessaire à la lecture de ce qui suit. Nous en ferons cependant occasionnellement mention pour les lecteurs familiarisés avec ces algèbres et qui voudraient lire le présent article comme une introduction succinte à l'étude complète [1], 1997-2. Les lecteurs qui font usage du formalisme spinoriel pouront recourir aux ouvrages [8] ou [9].

Notations. En général un (quadri)vecteur a, élément de M, sera noté par a simplement, et non pas par ses composantes a^μ dans une base orthonormale $\{e_\mu\}$. Si $a, b \in M$ on notera leur produit scalaire par $a.b$ au lieu de $a^\mu b_\mu$, et $a^2 = a.a$, par $a \wedge b$ (de composantes $a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$) leur produit extérieur, élément (décomposable) de $\wedge^2 M$ (ou tenseur antisymétrique de rang 2). Nous noterons par ∂ l'opérateur gradient $e^\mu \partial_\mu$, et par $\underline{i} = e_0 e_1 e_2 e_3$, ce qu'on peut appeler l'opérateur de dualité, expression dans $Cl(1,3)$ de $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Il permet de transformer un scalaire $\alpha \in R$ en pseudo-scalaire $\underline{i}\alpha \in \wedge^4 M$, un vecteur $a \in M$ en pseudo-vecteur, ou *vecteur axial*, $\underline{i}a \in \wedge^3 M$, un bivecteur $\Omega \in \wedge^2 M$ en un bivecteur "dual" $\underline{i}\Omega \in \wedge^2 M$. Il apparaît en particulier dans l'écriture $F = \vec{E} + \underline{i}\vec{H} \in \wedge^2 M$ du champ électromagnétique et, bien qu'il vérifie $\underline{i}^2 = -1$, il est à distinguer du $\sqrt{-1}$ opérant sur les spineurs de Dirac, qui est en fait le générateur $e_2 \wedge e_1$ des rotations dans le plan des (x, y).

Les opérateurs ∂ et $\underline{i}$ correspondent, en algèbre réelle, à l'opérateur $\gamma^\mu \partial_\mu$ représenté par un D barré, et à la matrice $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

2 Les particules leptoniques de l'électrofaible

1. Repère de Takabayasi associé à un spineur de Dirac.

Nous rappelons que le spineur de Dirac Ψ, est la forme complexe et éclatée (en deux spineurs de Pauli) d'une seule entité réelle, le biquaternion d'Hestenes ψ, élément inversible de $Cl^+(1,3)$, sous-algèbre paire de $Cl(1,3)$. Ψ, ou aussi bien ψ, contient une rotation de Lorentz R, qui apparaît dans la forme très explicite donnée respectivement par Lochak à Ψ dans [6], 1956, et, indépendamment, à ψ par Hestenes dans [5], 1967,

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{\underline{i}\beta/2} R \tag{1}$$

où les invariants $\rho > 0$ et $\beta \in R$ sont respectivement la densité de probabilité et l'angle d'Yvon-Takabayasi.

On peut ici représenter R comme élément de $SO^+(M)$ dans le formalisme qu'on voudra, par exemple celui des matrices orthogonales de M.

Soit $\{e_\mu\}$ une base orthonormale de M. Nous dirons que le repère orthonormal local $\{v, n_1, n_2, s\}$ où

$$v = Re_0R^{-1}, \;\; n_k = Re_kR^{-1} \;\; (k = 1, 2), \;\; s = Re_3R^{-1} \tag{2}$$

est le repère de Takabayasi associé au spineur Ψ (ou au biquaternion ψ).

Quand Ψ est la fonction d'onde d'un électron ou d'un neutrino, les vecteurs v et s sont appelés vitesse et vecteur spin unitaires d'univers. Le vecteur $j = \rho v$ est le courant de Dirac. Puisque $v^2 = 1, s^2 = -1, v.s = 0$, on en déduit que les vecteurs $v \pm s$ sont isotropes.

Le plan engendré par les vecteurs n_1, n_2 sera appelé "plan du spin" ([5], 1967). Cette appellation est justifiée parce que le bivecteur spin de l'électron, ou moment cinétique propre, est $(\hbar c/2) n_2 \wedge n_1$ ([5], 1973]) .

2. Les particules leptoniques de l'électrofaible (première génération).

Deux particules leptoniques sont à la base de l'électrofaible, les autres s'en déduisent: l'électron et le neutrino, auxquels sont associés deux fonctions d'onde qui sont deux spineurs Ψ^e et Ψ^ν (ou deux biquarternions *inversibles* ψ^e et ψ^ν) indépendants.

Définissant la matrice $\gamma^5 = \sqrt{-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ (à ne pas confondre avec $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ notée aussi γ^5 dans les publication anciennes), on introduit les deux matrices idempotentes $U^\pm$

$$U^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \;\; \Rightarrow \;\; U^+ + U^- = 1, \; U^+U^- = U^-U^+ = 0, (U^\pm)^2 = U^\pm \tag{3}$$

qui permettent de définir quatre fonctions d'onde

$$\Psi^\nu_L = U^-\Psi^\nu, \;\; \Psi^\nu_R = U^+\Psi^\nu, \;\; \Psi^e_L = U^-\Psi^e, \;\; \Psi^e_R = U^+\Psi^e \tag{4}$$

vérifiant donc

$$\Psi^\alpha = \Psi^\alpha_L + \Psi^\alpha_R, \;\; (\alpha = \nu, e) \tag{5}$$

En fait trois particules leptoniques sont seulement à considérer, les parties droites du neutrino et de l'électron, ou singlets, de fonction d'onde

Ψ_R^ν et Ψ_R^e, et une particule composite le doublet gauche, dont la fonction d'onde Ψ_L est présentée, dans le formalisme spinoriel, comme une colonne de deux éléments, Ψ_L^ν, Ψ_L^e, qui sont les parties gauches du neutrino et de l'électron, sur laquelle peuvent agir les matrices d'isospin.

Ces fonctions d'onde sont exprimées dans le formalisme réel par les biquaternions ψ_R^ν, ψ_R^e *qui ne sont pas inversibles* et un biquarternion *inversible* ψ_L correspondant au doublet gauche (voir [1], 1997-2, par. 3), *qui unifie en une seule entité* les deux objets Ψ_L^ν, Ψ_L^e qui composent Ψ_L.

Il faut souligner la différence qui existe entre les matrices de Pauli et d'isospin, malgré la similarité de leur forme. Les premières agissent sur un doublet de nombres complexes, le spineur de Pauli (forme complexe et éclatée d'une seule entité réelle, le quaternion d'Hamilton (voir [1], 2001, **Note**)). Les secondes agissent sur un doublet d'objets, Ψ_L^ν, Ψ_L^e, qui sont chacun le produit de la matrice U^- par un spineur de Dirac.

3. Densités et repères de Takabayasi associés à l'électron, au neutrino et au doublet gauche.

Parce que leurs fonctions d'onde sont des biquaternions ψ^e, ψ^ν, ψ_L *inversibles* on peut associer à chacune des particules, électron, neutrino, doublet gauche, une densité invariante ρ_e, ρ_ν et ρ_L, et un repère de Takabayasi $\{v_\alpha, n_1^\alpha, n_2^\alpha, s_\alpha\}$, $(\alpha = e, \nu)$ et (pour le doublet gauche) $\{N_0, N_1, N_2, N_3\}$.

On peut définir pour l'électron et pour le neutrino un courant de Dirac $j_\alpha = \rho_\alpha v_\alpha$, mais aussi un autre courant $j'_\alpha = \rho_\alpha s_\alpha$ (avec $\alpha = e, \nu$) qui en théorie de Dirac est appelé courant de densité de spin (étudié dans la thèse de O. Costa de Beauregard).

4. Courants associés aux singlets droits et au doublet gauche.

On peut associer aux parties droites et gauches de l'électron et du neutrino des "courants", j_R^e et j_L^e, j_R^ν et j_L^ν, définis par

$$j_R^\alpha = \frac{1}{2}(j_\alpha + j'_\alpha) = \frac{\rho_\alpha}{2}(v_\alpha + s_\alpha),\ j_L^\alpha = \frac{1}{2}(j_\alpha - j'_\alpha) = \frac{\rho_\alpha}{2}(v_\alpha - s_\alpha),\ (\alpha = e, \nu) \tag{6}$$

qui sont tous des quadrivecteurs isotropes, et qui vérifient

$$j_R^\alpha + j_L^\alpha = j_\alpha, \quad (\alpha = e, \nu) \tag{7}$$

Il est à remarquer que, bien que ces parties droites et gauches soient définies par des biquaternions non inversibles, on peut leur associer une densité qui est ρ_e ou ρ_ν. La non inversibilité affecte la partie rotation de ces biquaternions, qui est remplacée dans chaque cas par une application linéaire L de M dans M, non élément de $SO^+(M)$ et dégénérée, vérifiant $L(e_0) = (v \pm s)/2$, $L(e_k) = 0$, $(k = 1, 2)$, $L(e_3) = (v \mp s)/2$.

Seuls j_R^e etj_R^ν jouent explicitement un rôle dans la théorie, encore que la contribution de j_R^ν dans le lagrangien soit effacée par un facteur nul. Cependant j_L^e et j_L^ν interviennent implicitement dans la définition des courants j_L^0 et j_L^3 définis ci-dessous.

On associe au doublet gauche *quatre* "courants" dits isocourants $j_L^\xi = \rho_L N_\xi$, $(\xi = 0, 1, 2, 3)$. On a ([1],1997-2, éqs (31),(32))

$$j_L^0 = \frac{1}{2}(j_\nu - j'_\nu + j_e - j'_e), \;\; j_L^3 = \frac{1}{2}(j_\nu - j'_\nu - j_e + j'_e) \tag{8}$$

j_L^0 tient pour le doublet gauche le même rôle que celui du courant de Dirac en théorie de l'électron.

Les courants j_L^1 et j_L^2 ont une expression plus compliquée, et une interprétation particulière sur laquelle nous reviendrons.

3 Les jauges U(1) et SU(2). Les tenseurs d'impulsion-énergie de l'électron, du neutrino du doublet gauche et des singlets

On va séparer dans ce qui suit les changements de jauges locales, qui correspondent à des rotations finies sur eux mêmes de sous-repères locaux de M, de leur effet sur les tenseurs d'impulsion-énergie qui, par la construction de ces tenseurs, correspondent à des rotations infinitésimales sur eux mêmes de ces sous-repères. *Tout relève dans ce domaine de la géométrie réelle de l'espace-temps, et non pas de symétries internes faisant intervenir des espaces complexes abstraits.*

Les invariances de jauges sont assurées par des transformations adéquates des champs bosoniques et seront évoquées après que ceux-ci aient été définis.

1. La jauge U(1) en électrofaible.

En théorie de l'électron de Dirac un changement de jauge locale $U(1)$ est réalisé par la multiplication du spineur Ψ par $\exp(-\sqrt{-1}\chi)$, où χ dépend du point x de M. Comme signalé par G. Lochak en 1956, tout à fait indépendamment par D. Hestenes en 1967, mais encore ignoré par la quasi totalité des physiciens, ce changement correspond à une rotation d'un angle $\varphi = 2\chi$ dans le "plan du spin", des vecteurs orthonormaux n_1, n_2, orthogonaux, nous le rappelons, au courant de Dirac $j = \rho v$, et tels que le bivecteur $(\hbar c/2) n_2 \wedge n_1$ est le moment cinétique propre de l'électron. Il est à noter que c'est l'angle φ et non pas $\chi = \varphi/2$ qui a une signification physique.

En électrofaible les changements de jauge $U(1)$ sont réalisés par la mulitiplication de chaque spineur Ψ_L, Ψ_R^e, Ψ_R^ν, par $\exp(Y\sqrt{-1}\chi)$ (voir [9], éqs (15.6), (15.7), avec $\beta = \chi = \varphi/2$ et [8], éqs (7.21), (7.12), (7.45), (7.49), avec $\beta = \varphi = 2\chi$) où, respectivemen, $Y = -1, -2, -0$ sont les ainsi nommées hypercharges associées au doublet gauche et aux singlets. Ce changement correspond pour le doublet gauche à une rotation d'un même angle φ dans les "plans du spin", respectifs de l'électron et du neutrino, des vecteurs n_1^e, n_2^e et n_1^ν, n_2^ν ([1], 1997-2, par. 7). Il est nul pour le singlet neutrino. En ce qui concerne le singlet électron, l'interprétation géométrique du changement sera l'objet d'une autre étude.

2. La jauge SU(2) en électrofaible.

Nous avons montré dans [1], 1997-2 que le changement de jauge $SU(2)$, qui est relatif au doublet gauche, correspond à une rotation locale $U(x)$ sur lui-même de l'espace à trois dimensions orthogonal au point x de M au vecteur N_0, engendré par les vecteurs N_1, N_2, N_3. Cette rotation doit laisser N_0 invariant

Ainsi, si R_L est la rotation de Lorentz qui amène le repère $\{e_\mu\}$ en coincidence avec le repère local $\{N_\mu\}$, cette rotation devient $R'_L = R_L U$, pour donner le nouveau repère $\{N'_\mu\}$.

3. Les tenseurs impulsion-énergie de l'électron et du neutrino, et des singlets.

En théorie de l'électron de Dirac, Le tenseur de Tetrode T^e (i.e. application linéaire $n \in M \to T^e(n) \in M$) d'impulsion-énergie est généralement défini par ses quatre valeurs $T_\mu^e = T^e(e_\mu)$ dans un repère galiléen et apprait dans la la densité lagrangienne par sa trace $Tr(T^e) = e^\mu . T_\mu^e$ (voir [2] 1943). L'école L. de Broglie a trouvé intéressant de l'exprimer en se servant du repère de Takabayasi. Le but était d'en dégager une interprétation mécanique du fluide relativiste associé à la fonction d'onde de l'électron. Nous avons cherché à lui donner plutôt une interprétation purement géométrique et montré dans [1], 1974, d'une manière plus précise dans [1], 1992, que la partie libre (i.e. n'incluant pas le potentiel électromagnétique) T_0^e de ce tenseur est telle que ses trois valeurs $T_0^e(v), T_0^e(n_1), T_0^e(n_2)$ expriment le produit de $\rho_e \hbar c/2$ par la rotation infintésimale sur lui-même de chacun des plans (n_1, n_2), (n_2, v), (v, n_1).

Par exemple

$$T_0^e(v) = \rho_e \frac{\hbar c}{2}\omega, \quad \omega_\mu = \partial_\mu n_1.n_2 = -\partial_\mu n_2.n_1 \tag{9}$$

Le quadrivecteur ω exprime la rotation infinitésimale du "plan du spin" (n_1, n_2) de l'électron sur lui-même, et c'est sa projection orthogonale sur le vecteur temps e_0 du repère $\{e_\mu\}$, multipliée par $\hbar c/2$ qui définit l'énergie E de l'électron dans ce repère. On voit qu'à la multiplication de constantes physiques près, ce qu'on appelle énergie, est dans la théorie de l'électron de Dirac, la rotation infinitésimale d'un plan sur lui-même, en notant que ce qu'on appelle la jauge dans cette théorie est le groupe des rotations finies de ce plan sur lui même.

La présence du facteur 1/2 à la fois dans les expressions de $T_0^e(v)$ et du bivecteur spin est à noter comme déduite de la qualité de particule de spin 1/2 de l'électron.

La valeur $T_0^e(s)$ de T_0^e fait intervenir le gradient de l'angle d'Yvon-Takabayasi β. Nous avons montré dans [1] 1992 que la présence de ce gradient peut s'expliquer en construisant T_0^e comme l'opérateur infintésimal associé à un goupe, que nous avons appelé le groupe d'Hestenes, plus grand que le groupe des rotations orthochrones et dont les éléments sont de la forme $\exp(\underline{i}\beta/2)R$. Cependant $T_0^e(s)$ ne joue aucun rôle dans un changement de jauge $U(1)$.

Nous rappelons qu'un changement de jauge $U(1)$ d'un angle $\chi = \varphi/2$ entraîne l'addition de $(\hbar c/2)j_e.\partial\varphi$ à la trace $L_0^e = Tr(T_0^e)$ de T_0^e, qui figure dans la densité lagrangienne et que l'invariance de jauge est assurée par l'addition simultanée au potentiel A de $(\hbar c/2e)\partial\varphi$ et la présence de $-ej_e.A$ dans cette densité.

Le tenseur d'impulsion-énergie T_0^ν associé au neutrino est de la même forme et apparaît dans la la densité lagrangienne par sa trace $L_0^\nu = Tr(T_0^\nu)$

Les tenseurs d'impulsion-énergie associés aux singlets sont dans chaque cas la demi-différence du tenseur précédent et d'un tenseur qui est du même type que celui que nous allons définir pour le doublet gauche, mais appliqué à la fonction d'onde de l'électron ou du neutrino. Nous ne les détaillerons pas ici. Ils interviennent dans la densité lagrangienne par leurs traces L_{0R}^e et L_{0R}^ν.

4. Le tenseur impulsion-énergie du doublet gauche.

A ma connaissance aucun tenseur d'impulsion-énergie associé au doublet gauche (de même qu'aux singlets) n'a été envisagé, mais nous avons construit la partie libre T_0^L d'un tel tenseur dont la trace L_{0L} (voir [1] 1997-2, éq. (57) en notant que le second membre doit être multiplié par $\hbar c$) figure dans la densité lagrangienne. Le tenseur T_0^L est tel que $T_0^L(N_1), T_1^L(N_2), T_2^L(N_3)$ expriment le produit de $(-\rho_L \hbar c/2)$ par la rotation infintésimale sur lui-même de chacun des plans (N_2, N_3), (N_3, N_1), (N_1, N_2). Nous ne démontrerons pas ici cette propriété dans le détail. Elle se déduit de l'équation située entre les éqs (64) et (65) de [1], 1997-2, et de la marche suivie dans [1], 19974 et [1], 1992.

La valeur $T_0^L(N_0)$ de T_0^L (qui fait intervenir le gradient d'un angle d'Yvon-Takabayasi β_L) ne joue aucun rôle dans les changements de jauge $U(1)$ et $SU(2)$.

Il est à souligner que, par sa forme, ce tenseur est différent du tenseur de Tetrode. Ce dernier permet d'exprimer la rotation infinitésimale du sous repère $\{v, n_1, n_2\}$ d'un repère local $\{v, n_1, n_2, n_3\}$, et la jauge $U(1)$ n'affecte qu'une rotation sur lui-même du plan (n_1, n_2). Le tenseur que nous associons au doublet gauche permet d'exprimer la rotation infintésimale du sous repère $\{n_1, n_2, n_3\}$ d'un tel repère local. Il est apte à exprimer les conséquences dans l'impulsion-énergie d'un changement de jauge de type $SU(2)$.

Une question intéressante est la suivante: en théorie de l'électron, la divergence du tenseur de Tetrode est égale à la densité de la force de Lorentz. Existe-t-il une propriété analogue en électrofaible?

5. La partie de la densité lagrangienne n'incluant pas les champs bosoniques en électrofaible, et l'incidence des changements de jauge sur l'impulsion-énergie.

Elle est de la forme

$$L_0 = L_0^e + L_0^\nu = Tr(T_0^e) + Tr(T_0^\nu) \tag{10}$$

(voir [8], éq. (7.13)), mais est décomposée en une somme

$$L_0 = L_{0L} + L_{0R}^e + L_{0R}^\nu \tag{11}$$

(voir [8], éq. (7.20)), dans laquelle, en particulier $L_{0L} = Tr(T_0^L)$.

a. Incidence d'un changement de jauge $U(1)$.

On peut déduire (voir [1], 1997-2, éqs. (57) à (60)), où tous les seconds membres sont à multiplier par $\hbar c$) qu'un changement de jauge $U(1)$

correspondant à un angle $\chi = \varphi/2$ entraîne, compte tenu des valeurs de l'hypercharge, $Y_L = -1, Y_R^e = -2, Y_R^\nu = 0$, les changements

$$L'_{0L} = L_{0L} + \frac{\hbar c}{2} j_L^0.\partial\varphi, \quad L_{0R}^e{}' = L_{0R}^e + \hbar c j_R^e.\partial\varphi, \quad L_{0L}^\nu{}' = L_{0L}^\nu \qquad (12)$$

et ainsi

$$L'_0 = L_0 + \hbar c(\frac{1}{2} j_L^0 + j_R^e).\partial\varphi \qquad (13)$$

b. Incidence d'un changement de jauge $SU(2)$.

Ce changement n'affecte que ce qui est relatif au doublet gauche.

Si $\Omega_\mu = 2(\partial_\mu R_L)R_L^{-1}$ (on peut utiliser le formalisme des matrices orthogonales réelles pour calculer cette expression) sont les bivecteurs qui définissent la rotation infinitésimale du repère propre $\{N_\mu\}$, le changement $R_L \to R_L U$ transforme Ω_μ en $\Omega_\mu + R_L \hat{\Omega}_\mu R_L^{-1}$ où $\hat{\Omega}_\mu = 2(\partial_\mu U)U^{-1}$.

Les bivecteurs $\hat{\Omega}_\mu$ doivent vérifier la relation suivante (qu'on peut exprimer en matrices réelles), déduite de $\partial^2_{\mu\nu} U = \partial^2_{\nu\mu} U$,

$$\partial_\nu \hat{\Omega}_\mu - \partial_\mu \hat{\Omega}_\nu + \frac{1}{2}(\hat{\Omega}_\mu \hat{\Omega}_\nu - \hat{\Omega}_\nu \hat{\Omega}_\mu) = 0 \qquad (14)$$

Cette relation a une incidence importante sur le champ bivectoriel déduit des bosons vectoriels $W^k \in M$ (voir sect. 4), dans l'invariance de la densité lagrangienne par un changement de jauge $SU(2)$.

4 Les champs bosoniques et les invariances de jauges locales

Le boson $B \in M$ est associé aux courants j_R^e et j_L^0. Chaque boson $W^k \in M$ $(k = 1, 2, 3)$ est associés au courant j_L^k de telle sorte que leur contribution à la densité lagrangienne est

$$L_C = \frac{g}{2}(W^1.j_L^1 + W^2.j_L^2 + W^3.j_L^3) - g' B.(\frac{1}{2} j_L^0 + j_R^e) \qquad (15)$$

(voir [8], éqs (7.20), (7.49) et la ligne en dessous l'éq. (7.57)) où g, g' sont les constantes de couplage de la théorie qui vérifie les relations

$$g \sin\theta = g' \cos\theta = e \qquad (16)$$

Soulignons que les quadrivecteurs B, W^k sont des invariants.

L'angle θ est appelé angle de Weinberg et peut être mesuré expérimentalement.

On peut immédiatement vérifier sur les équations (13) et (15) que l'invariance de jauge $U(1)$, d'un angle $\chi = \varphi/2$ est assurée par l'addition à B de $(\hbar c/g')\partial\varphi$.

Se plaçant par rapport à un repère $\{e_\mu\}$, dotant l'espace $\wedge^2 M$ de l'écriture vectorielle de E^3 en posant $\vec{e}_k = e_k \wedge e_0$, on associe à chaque bivecteur Ω_μ, définissant la rotation infintésimale du repère propre $\{N_\mu\}$ du doublet gauche, le bivecteur

$$\vec{W}_\mu = -(\sum_k W_\mu^k e_k) \wedge e_0 \in \wedge^2 M \tag{17}$$

Le changement de jauge $SU(2)$ défini par la rotation U du repère propre sur lui-même impose alors, pour que l'invariance de jauge soit assuré, le changement

$$\vec{W}'_\mu = U\vec{W}_\mu U^{-1} + \frac{1}{g}\underline{i}\hat{\Omega}_\mu \tag{18}$$

(voir [1], 1997-2, éqs (65)-(67)).

L'équation (14), la nécessité pour le champ $\vec{W}_{\nu\mu} \in \wedge^2 M$, qu'on peut déduire des bosons $W^k \in M$, de vérifier la relation $\vec{W}'_{\nu\mu} = U\vec{W}_{\nu\mu}U^{-1}$, imposent alors aux $\vec{W}_{\nu\mu}$ d'être de la forme

$$\vec{W}_{\nu\mu} = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + \frac{g}{2}\underline{i}(\vec{W}_\nu \vec{W}_\mu - \vec{W}_\mu \vec{W}_\nu) = \partial_\nu \vec{W}_\mu - \partial_\mu \vec{W}_\nu + g(\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu) \tag{19}$$

où le produit vectoriel dans E^3,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\underline{i}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\underline{i}\frac{1}{2}(\vec{A}\vec{B} - \vec{B}\vec{A})$$

(en écriture $Cl(E^3)$) a été utilisé.

Par ailleurs, les bosons W^3 et B sont liés au potentiel électromagétique $A \in M$ et au boson $Z \in M$ par les relations

$$W^3 = \sin\theta\ A + \cos\theta\ Z, \quad B = \cos\theta\ A - \sin\theta\ Z \tag{20}$$

L_C est décomposé en la somme $_C = L_{CC} + L_{CN}$ où

$$L_{CC} = \frac{g}{2}(W^1.j_L^1 + W^2.j_L^2), \quad L_{CN} = W^3.j_L^3 - g'B.(\frac{1}{2}j_L^0 + j_R^e) \tag{21}$$

Il semble que, pour des raisons physiques, on ait été amené à remplacer les deux vecteurs $W^1, W^2 \in M$ par deux entités $W^\pm$ d'un type géométrique nouveau, le Vecteur-Vecteur axial (V-A) de la forme $a + \underline{i}b$, où $a, b \in M$, somme d'un vecteur et d'un pseudo-vecteur de M,

$$W^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \mp \underline{i}W^2) \in \wedge^1 M \bigoplus \wedge^3 M \tag{22}$$

(voir [8], éq. (7.31)).

Les objets W^+ et W^- correspondent à des particules massiques chargées positivement et négativement. Leur introduction conduit à remplacer les courants $j_L^1, j_L^2 \in M$ par deux courants de type V-A

$$j_C^{\pm} = \frac{1}{2}(j_L^1 \pm \underline{i}j_L^2) \in \wedge^1 M \bigoplus \wedge^3 M \tag{23}$$

de telle sorte que

$$L_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}[W^- j_C^- + W^+ j_C^+]_{sc} \tag{24}$$

(voir [8], éq.(7.39)) où dans le calcul à partir des éqs (22), (23) le terme en $\underline{i}$ s'élimine et où si $a, b \in M$, $[ab]_{sc} = a.b$.

5 Conclusion

Nous avons montré dans [1], 1997-2, et dans le résumé présenté ici de cet article, que *tout* dans les grandeurs et équations de la théorie de l'électrofaible, n'est, à l'introduction des constantes physiques $c, e, \hbar$ et l'angle θ de Weinberg près, que géométrie de l'espace-temps. La partie de la théorie relevant des jauges pourrait s'intituler "Le repère de Takabayasi de A à Z" (en passant par B et W): tout n'y dépend que de rotations finies et rotations infintésimales sur eux mêmes de sous-repères de repères locaux de l'espace-temps semblables au repère que Takabayasi, ainsi que les chercheurs de l'Ecole Louis de Broglie, ont introduit en théorie de l'électron de Dirac. L'incidence des transformations de jauge sur les champs bosoniques vectoriels et leurs dérivées bivectorielles n'est qu'une conséquence de ces rotations. La question de la masse des bosons est absente, mais elle est extérieure à la théorie.

Nous avons été guidé dans la définition des tenseurs d'impulsion-énergie par les travaux de O. Costa de Beauregard sur le tenseur de Tetrode (notre article [1], 1985 en est directement inspiré). Et à cette occasion je voudrais lui exprimer toute ma reconnaissance. C'est grâce à sa possibilité d'écoute, à sa gentillesse, denrées rares de nos jours en

particulier chez les physiciens, que le novice en physique que j'étais a pu passer de la géométrie à une discipline, la Mécanique Quantique, qui justement m'a apporté de grands plaisirs géométriques.

Références

[1] L. de Broglie, *La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[2] Curie P., J. de Phys., 3-ième série, **3**, 393-415, (1894)

[3] L. de Broglie, C. R. Ac. Sc. **177**, 517, (1923).

[4] R. Boudet, *Sur une forme intrinsèque de l'équation de Dirac et son interprétation géométrique*, C.R.A.S., **272**, 767 (1971) et *Sur le tenseur de Tetrode et l'angle de Takabayasi. Cas du potentiel central*, **278**, 1063 (1974),

-*Conservation laws in the Dirac theory*, J. Math. Phys., **26**, 718 (1985),

-*Les algèbres de Clifford et les transformations des multivecteurs. L'algèbre de Clifford de R(1,3) et la constante de Planck*, in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, A. Micali, R. Boudet, J. Helmestter, éds, Kluwer Ac. Pub. , Dordrecht (1992),

-*The Takabayasi moving frame, from the A potential to the Z boson*, in *The Present Status of the Quantum Theory of Light*, S. Jeffers, S. Roy, J.P. Vigier, G. Hunter, éds, 471, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht (1997)

-*The Glashow-Salam-Weinberg electroweak theory in the real algebra of spacetime*, in *The Theory of the Electron*, J. Keller and Z. Oziewicz, Uni. Nac. Aut. Méx., Mexico (1997)

-*La théorie intrinsèque de la particule de Dirac et "l'Ecole Louis de Broglie"*, Ann. Fond. L. de Broglie, **26**, 95 (2001)

[5] O. Costa de Beauregard, *Contribution à l'Etude de la Théorie de l'Electron de Dirac*, G.V., Paris (1943),

-*La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris, (1960)

[6] J. Yvon, *Equations de Dirac-Madelung*, J. Phys. et le Radium, **VIII**, 18 (1940)

[7] E. Cartan, *Leçons sur la Théorie des Spineurs*, Hermann, Paris (1938)

[8] D. Hestenes, *Real Spinor Fields*, J. Math. Phys., **8**, 798, (1967),

-*Local observables in the Dirac theory*, J. Math. Phys., **14**, 983 (1973),

-*Space-Time Stucture of Weak and Electromagnetic Intereaction*, Found. Phys. **12**, 153 (1982)

[9] G. Jakobi et G. Lochak, *Introduction des paramètres relativistes de Caley-Klein dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac*, C.R.A.S., **243**, 234, et *Décomposition en paramètres de Clebsch de*

l'impulsion de Dirac et interprétation physique de l'invariance de jauge des équations de la Mécanique ondulatoire, **243**, 357 (1956).

- G. Lochak, *Signification mécanique de l'invariance de jauge de première espèce dans la représentation hydrodynamique des équations de la Mécanique ondulatoire*, **245**, 2035 (1957)

[10] T. Takabayasi, *Relativistic Hydrodynamics of the Dirac Matter*, Supp. of the Prog. Theor. Phys., **4**, 1 (1957)

[11] E. Elbaz, *De l'électromagnétisme à l'électrofaible*, Ed. Marketing, Paris (1989)

[12] F. Halzen et D. Martin, *Quarks and Leptons*, J. Wiley and Sons, USA (1987)

(Manuscrit reçu le 6 janvier 2003)