Operateurs de création et d'annihilation et algèbres de Clifford

PIERRE ANGLES ET RENE-LOUIS CLERC

Université Paul Sabatier Toulouse
pangles@cict.fr
clerc@cict.fr

RESUME. Dans cet article, on se propose d'utiliser le formalisme des opérateurs de création et d'annihilation, bien connu par ailleurs soit en « statistiques de Bose-Einstein » par les relations de commutation, soit par les relations d'anti-commutation dans les « statistiques de Fermi-Dirac ». On rappelle tout d'abord les définitions et propriétés des algèbres de Clifford d'espaces quadratiques. Dans une première partie, on étudie la construction des algèbres de Clifford $\mathbf{C}_{\mathbf{r,s}}$ et $\mathbf{C}^{+}_{\mathbf{r,s}}$ des espaces quadratiques pseudo-euclidiens standards et la périodicité modulo 8 afférente, puis celle des algèbres de Clifford des espaces quadratiques réguliers sur $\mathbf{C}$ et la périodicité modulo 2 associée. Dans une seconde partie, le formalisme algébrique des opérateurs de création et d'annihilation est utilisé pour l'étude de la simplicité des algèbres de Clifford des espaces quadratiques réguliers réels ou complexes. Enfin, on indique comment ces propriétés sont récemment utilisées pour discuter les super-symétries permises dans diverses dimensions (super-groupes de Poincaré) pour l'étude des champs quantiques et des cordes.

ABSTRACT. This paper, self-contained, deals with Clifford algebras in terms of annihilation and creation operators. Before all, we recall the classical definitions and properties concerning Clifford algebras. Then, in a first part, we study the construction of the Clifford algebras $\mathbf{C}_{\mathbf{r,s}}$ and even Clifford algebras $\mathbf{C}^{+}_{\mathbf{r,s}}$ of quadratic standard regular spaces $E_{r,s} = \mathbf{R}^{r+s}$ endowed with a quadratic form of signature (r, s), according to the classical modulo 8 periodicity and that of Clifford algebras for standard regular spaces over $\mathbf{C}$ according to the classical modulo 2 periodicity. Then, in a second part, we use the algebraic well-known formalism of creation and annihilation operators to study the simplicity of Clifford algebras for standard regular quadratic spaces over $\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$. Then, it is shown how such properties are recently used to discuss the possible super symmetries in various dimensions (super Poincaré groups) in the study of quantum fields and strings.

1 Préambule

Nous faisons partie de ceux qui ont abordé puis commencé à aimer le couple infernal Relativité-Quanta à la lecture de la « Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac » [1, a], la passionnante thèse de O.Costa de Beauregard. L'un de nous y a largement puisé dans son chapitre « Théorie des milieux continus doués d'une densité de moment cinétique propre en Relativité Restreinte », et surtout dans le rôle fondamental qu'il fait jouer au tenseur de Tétrode, l'idée de départ de sa propre thèse [2]. Nous y avons aussi fait nos premiers pas avec les spineurs de Dirac, ce qui nous a conduit un peu plus tard aux algèbres de Clifford et autres opérateurs de création et d'annihilation. Comment aussi ne pas y relever une petite phrase prophétique (voir les travaux récents de N.Gisin du groupe de physique appliquée de l'Université de Genève et de A.Suarez du centre de philosophie quantique de Zurich) « ..il faudrait en conclure que l'électron de Dirac pris en lui-même ignore le temps » ([1, a] chap.I, p.89)?

2 Introduction

Le développement de la mécanique quantique [1, c, d] a mis l'accent sur l'importance des représentations de groupes de Lie en physique théorique et de groupes finis en chimie théorique. Dans l'élaboration d'une théorie covariante, la recherche d'un groupe de Lie adéquat G pour tenter d'édifier des théories unitaires englobant gravitation et champ électromagnétique reste l'un des objectifs des physiciens. La théorie classique de l'électromagnétisme montre, d'ailleurs, comment l'intervention du groupe conforme $SO^+(2, 4)$ [3, a, b, c], groupe maximal d'invariance des équations de Maxwell, plus petit groupe semi-simple contenant le groupe de Poincaré (ou inhomogène de Lorentz), apparaît toute naturelle. De plus $SO^+(2, 4)$, de façon indépendante, a été utilisé comme groupe dynamique des interactions fortes.

On connaît le succès de la théorie des twisteurs de R. Penrose [5] pour fonder une nouvelle cosmologie. La structure de $SO^+(2, 4)$ avait déjà été étudiée par E. Cartan [4] qui avait montré l'identité des algèbres de Lie de $SO^+(2, 4)$ et de $SU(2, 2)$. La clé de voûte de la théorie de R.Penrose est la reconnaissance que $SU(2, 2)$ est un revêtement d'ordre 4 de la composante connexe de l'élément neutre de $SO^+(2, 4)$. Un twisteur apparaît, alors, comme un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ doté de la forme pseudo-hermitienne standard de signature (2, 2), et la sous-variété de la grassmannienne des plans complexes de $\mathbf{C}^4$ que forment les plans totalement isotropes s'identifie au compactifié conforme de l'espace de Minkowski. Comme R. Penrose [5] le reconnaît lui-même « les twisteurs sont des spineurs dont on est encore bien loin d'avoir entrevu la signification complète dans la compréhension des lois physiques qui régissent notre univers ».

A chaque espace quadratique E, de dimension n, correspond, de façon canonique son algèbre de Clifford : algèbre associative C(E) avec unité, de dimension 2^n.

Historiquement [6], la notion d'algèbre de Clifford est apparue de façon naturelle par des voies diverses. Mais son introduction la plus frappante est la solution donnée par P.A.M. Dirac [7] au problème de l'équation relativiste de l'électron.

La notion de spineur a été découverte par E. Cartan en 1913 dans ses recherches sur la détermination des représentations linéaires irréductibles du groupe orthogonal propre ou de l'algèbre de Lie correspondante. Les spineurs furent ensuite étudiés par B. L. Van der Waerden, R. Brauer, H. Weyl [8] et E. Cartan [9] lui-même. Voulant bâtir sa théorie de l'électron et passer de l'équation relativiste de Schrödinger aux équations du premier ordre qui portent son nom, P. A. M. Dirac [10] a été conduit à retrouver indépendamment, la même notion, relative cette fois au groupe de Lorentz. La représentation algébrique de la théorie des spineurs a été développée en premier lieu par C. Chevalley [11], puis par divers auteurs dont A. Crumeyrolle [12] et R. Deheuvels [13]. Suivant cette direction, l'un d'entre nous a fourni une méthode naturelle de construction des algèbres de Clifford associées aux groupes unitaires de formes pseudo-euclidiennes, pseudo-unitaires ou pseudo-hermitiennes [3, e, f, h, i].

Par ailleurs, la théorie algébrique des formes quadratiques et des algèbres de Clifford des modules projectifs de type fini où intervient le groupe de Grothendieck a été faite par A. Micali et O. E. Villamayor [14]. Les rapports entre algèbres de Clifford et K–théorie ont été approfondis par M. Karoubi [15]. I. Satake s'est largement servi du langage algébrique proposé par ces structures dans un livre important [16].

Le travail qui suit a pour objet d'étudier la simplicité des algèbres de Clifford des espaces quadratiques standards réguliers réels ou complexes par le biais des opérateurs de création et d'annihilation.

3 Algèbres de Clifford d'un espace quadratique([12], [13], [17], [18], [19], [20])

3 . 1 La méthode de P. A. M. Dirac.

P. A. M. Dirac introduit les spineurs dans l'espace–temps de Minkowski en cherchant à linéariser l'opérateur de Klein–Gordon qui est la forme relativiste restreinte [1, b] de l'opérateur de Schrödinger:

$$(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial y^2-\partial^2/\partial z^2-m^2)\ \Psi=0$$

où Ψ désigne une fonction d'onde et m un nombre réel positif.

L'interprétation physique de Ψ en désaccord avec la présence de la dérivée seconde temporelle conduit Dirac à remplacer l'opérateur précédent par ($g^{\alpha\beta}$, α, β=1, 2, 3, représentant la « métrique » de l'espace–temps) un produit d'opérateurs du premier degré :

$$g^{\alpha\beta}\partial^2/\partial x^\alpha\ \partial x^\beta-m^2 = (\gamma^\alpha\partial/\partial x^\alpha-m)(\gamma^\beta\partial/\partial x^\beta+m) \tag{1}$$

On obtiendrait alors $2g^{\alpha\beta} = \gamma^\alpha\gamma^\beta+ \gamma^\beta\gamma^\alpha$ ce qui est contradictoire, car le tenseur du premier membre est de rang 4 et celui du second membre de rang 1 quel que soit le vecteur γ^α. Par contre si les γ^α au lieu d'être des nombres sont des éléments d'une algèbre $\mathcal{A}$ non commutative (s'ils commutaient on devrait avoir $\gamma^\alpha\gamma^\beta = 0$, $\alpha\neq\beta$), on peut obtenir les égalités

$\gamma^\alpha\gamma^\beta+ \gamma^\beta\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta}e$ où e est l'élément unité de $\mathcal{A}$.

On choisit habituellement pour $\mathcal{A}$ une algèbre d'opérateurs sur un espace vectoriel S sur le corps des complexes. L'inconnue u de l'équation de Dirac

$$\gamma^\alpha\ \partial\ u/\partial x^\alpha - m\ e\ u = 0 \tag{2}$$

est une application de l'espace–temps de Minkowski E_4 (de signature (1 , 3) ici) dans S, appelée champ de spineurs. L'équation (2) a été écrite dans une base orthonormale de E_4. Si l'on utilise une transformation de Lorentz L $\in$ O(1, 3) et si l'on pose $x'^{\lambda'}= L^{\lambda'}{}_\alpha x^\alpha$, (2) s'écrit

$\gamma^\alpha\ \partial\ u/\partial x'^{\lambda'}\ L^{\lambda'}{}_\alpha - m\ e\ u = 0$, que l'on peut encore écrire en posant u' = Λu, u' étant le champ de spineurs correspondant à u dans les nouvelles coordonnées : $\gamma^\alpha\partial\ u'/\partial x'^\alpha - m\ e\ u' = 0$, sous la condition que la matrice régulière Λ vérifie les équations matricielles : $\Lambda^{-1}\ \gamma^\alpha\ \Lambda = \gamma^\lambda\ L^\alpha{}_\lambda$.

Remarque: l'idée fondamentale de Dirac revient à exprimer la forme quadratique de Lorentz définie sur $\mathbf{R}^4$, $q(m) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (avec $m = (t, x, y, z)$) comme le carré d'une forme linéaire : $q(m) = (\alpha t + \beta x + \gamma y + \delta z)^2$. L'identification conduit à des équations dont une solution ne peut être attendue que si les coefficients α, β, γ, δ sont des éléments d'une algèbre non commutative , ce qui peut être réalisé en choisissant pour ces derniers des matrices complexes d'ordre 4 : les matrices de Dirac qui en a décrit l'interprétation mathématique et physique. Ces matrices sont attachées à un degré de liberté interne : le spin qui devient une nécessité mathématique en mécanique relativiste pour les particules élémentaires, pour lesquelles il devient une « caractérisation géométrique »[2]. Toute cette nécessaire introduction de ces matrices est décrite dans la thèse [1, a] de O.Costa de Beauregard.

Cette idée d'obtenir une *racine carrée* d'une forme quadratique va justifier la construction qui suit d'une algèbre de Clifford et d'une application de Clifford.

3 . 2 Algèbre de Clifford.[12],[13], [16], [18], [21]

1 - Définitions .

Soit (E, q) noté E un espace quadratique sur le corps K, A une algèbre associative sur K possédant une unité 1_A.

1-1-On appelle application de Clifford de E dans A toute application linéaire φ de E dans A telle que, pour tout $x \in E$, $(\varphi(x))^2 = q(x).1_A$.

1-2-On appelle algèbre de Clifford, notée C(E, q) = C, de l'espace quadratique E, toute solution du problème universel posé par les applications de Clifford de la catégorie des espaces quadratiques sur K dans la catégorie des algèbres associées avec unité sur K.

1-2- est équivalent à 1-3-

1-3-1-Il existe une application de Clifford φ_c de E dans C.

1-3-2-L'unité 1_c de C et l'image $\varphi_c(E)$ engendrent l'algèbre C.

1-3-3-Pour toute application de Clifford φ de E dans A, il existe un homomorphisme d'algèbres avec unité ϕ de C dans A tel que $\varphi = \phi \circ \varphi_c$.

Cet homomorphisme est unique d'après 1-3-2

2 – Propriétés immédiates.

2-1-Si A est une algèbre de matrices de type (m, m) et si $X = \varphi(x)$ est la matrice image de $x \in E$, la propriété de Clifford $X^2 = q(x).I$ implique que $(\det X)^2 = (q(x))^m$.

2-2-Par polarisation, l'égalité $(\varphi(x))^2 = q(x).1_A$ entraîne que (remplacer x par x + y) $\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x) = 2\, g(x, y).1_A$ où g est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q.

L'orthogonalité de x et de y (g(x, y) = 0) est ainsi équivalente à l'anti-commutativité de leurs images φ(x) et φ(y) et impose à l'algèbre A de ne pas être commutative dès que dim E ≥ 2.

De plus, φ(x) = 0 entraîne g (x, y) = 0 pour tout y∈E. Si g est non dégénérée, φ est donc nécessairement injective.

3 . 3 Exemples d'applications de Clifford.[13, b, e]

1-Envisageons le corps **C** des nombres complexes considéré comme algèbre réelle et définissons l'application de Clifford φ de **R**, muni de la forme quadratique (anti-euclidienne) définie par $q(x) = - x^2$, dans **C** telle que pour tout x∈**R**, φ (x) = i x.

2-Plus généralement, considérons la droite vectorielle K munie de la forme quadratique q définie par $q (\lambda.\ 1) = \lambda^2 a$ où a∈K. Introduisons l'application φ de K dans l'algèbre sur K des matrices d'ordre 2 sur K déterminé par φ (1) = $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$. φ est une application de Clifford de K dans m (2, **C**) car $T^2 = (\varphi(1))^2 = a\,I = q(1).I$.

3- Choisissons pour espace quadratique E_3 l'espace euclidien réel standard et considérons m (2, **C**) l'algèbre *réelle* des matrices complexes d'ordre 2. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E_3, pour $m = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$ posons $\varphi(m) = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$. On vérifie immédiatement que $(\varphi(m))^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\, I = q(m).I$.

3 . 4 Méthode standard de construction d'une application de Clifford.

Cette méthode a été mise au point pour le cas neutre par C.Chevalley [11], structurée par N.Bourbaki [21] et remaniée par R.Deheuvels [13].

Soit E un espace quadratique standard, g désigne la forme bilinéaire symétrique associée. Selon un résultat classique d'algèbre extérieure (voir par exemple [13, b] p.177) toute forme $\alpha \in E^*$ détermine une antidérivation d_α de degré (-1) de l'algèbre ΛE, de carré nul ($d_\alpha^2 = 0$).

A chaque vecteur x de E correspond naturellement la forme linéaire notée ρx qui lui est associée par g : pour tous x, y∈E : g(x, y) = < ρx, y >, et par suite une dérivation notée d_x de Λ∧E définie pour un p-vecteur décomposable par :

$d_x (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_p) = \Sigma_i (-1)^{i-1} g(x, y_i)\, y_1 \wedge ... \wedge \hat{y}_i \wedge ... \wedge y_p$

(où le ^ indique classiquement un terme manquant). Si x est orthogonal à chaque y_i, on a $d_x (y_1 \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_p) = 0$.

Introduisons L_x, opérateur linéaire de ΛE tel que $L_x (t) = x \wedge t$. L_x est de carré nul. On va montrer que l'application φ suivante est une application de Clifford des opérateurs linéaires de ΛE:

$$\varphi : x \in E \rightarrow \varphi (x) = d_x + L_x \in \mathcal{L} (\Lambda E).$$

Si $u \in \Lambda E$, $\varphi (x) u = d_x u + x \wedge u$, et donc $(\varphi (x))^2 u = d_x^2 u + g(x, x) u - x \wedge d_x u + x \wedge d_x u + x \wedge x \wedge u = q(x) u$ et ainsi $(\varphi (x))^2 = q(x).I$.

3 . 5 Proposition ([13, b] p.235 et p.243)

Soit φ une application de Clifford de E dans l'algèbre associative unitaire A. La sous-algèbre engendrée par 1_A et φ(E) est de dimension finie, inférieure ou égale à 2^n où n = dim E.

L'idée de la démonstration consiste en partant d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ orthogonale de E et d'un élément u de A de la forme $u = \varphi (e_{i1}), \varphi (e_{i2}), \varphi (e_{in})$ à chercher à *retrouver l'ordre naturel* pour les indices et à utiliser l'anticommutativité de $\varphi (e_i)$ et de $\varphi (e_j)$ pour $i \neq j$, en distinguant les deux cas, soit $i_k > i_{k+1}$ soit $i_k = i_{k+1}$. On vérifie immédiatement ainsi que tout élément de la sous-algèbre de A engendrée par l'unité 1_A et φ (E) est une combinaison linéaire de 2^n éléments $\{1_A, \varphi (e_J)\}$ où $J=\{1 \leq j_1 < j_2 <\ldots< j_p \leq k\}\}$ est une suite *strictement* croissante qui peut être vide.

3 . 6 Théorème ([13, b] p.236, [21], [11] p. 44)

Tout espace quadratique (E, q) (noté E) possède une algèbre de Clifford C(E, q) qui peut être définie comme le quotient de l'algèbre tensorielle ⊗E par l'idéal bilatère Q engendré par les tenseurs symétriques de la forme $x \otimes x - q(x).1$, $x \in E$.

L'application φ_C de E dans C(E, q) est alors la composée de l'injection de E dans ⊗E et de la projection de ⊗E sur son quotient. Si E est de dimension n, C(E, q) est de dimension 2^n. Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale de E, les 2^n éléments 1_C, $e_I = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p}$ avec $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n)$ forment une base de C(E, q). φ_C est injective ce qui permet de plonger E dans C(E, q) et de l'identifier à son image φ_C (E).

Si L est un surcorps commutatif de K et $\tilde{q}$ l'extension de q à $E \otimes L$ alors l'algèbre de Clifford $C(E \otimes_K L, \tilde{q})$ est évidemment $C(E, q) \otimes_K L$.

Cas particulier : K = **R**, L = C, $C(E \otimes_{\mathbf{R}} C, \tilde{q}) \approx C(E, q) \otimes_{\mathbf{R}} C$. On peut écrire en abrégé C(E',q') ≈ (C(E,q))' où le ' est relatif à la « complexification ».

La démonstration de ce théorème est classique ; nous renvoyons aux références indiquées.

Conséquence : détermination pratique de nombreuses algèbres de Clifford.

Soit (E, q) un espace quadratique dont $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale et soit φ une application de Clifford de E dans l'algèbre associative unitaire A. Si la sous-algèbre C_1 de A engendrée par 1_A et φ (E) est de dimension 2^n, C_1 est une algèbre de Clifford de C(E, q) isomorphe à C.

3 . 7 Exemples [13, b, e]

A) Si la forme quadratique est nulle toute application de Clifford est alternée et l'algèbre de Clifford s'identifie à l'algèbre extérieure ΛE.

B) Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 3 . 3 précédent concernant la droite vectorielle K munie de la forme quadratique q avec $q(1) = a \in K$ et $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} = \varphi(1)$. La sous-algèbre C de m(2, K) que forment les combinaisons linéaires $\lambda I + \mu T$ où $\lambda, \mu \in K$ est une algèbre de Clifford commutative.

a)Si $a = q(1)$ n'est pas un carré dans K, comme $(\lambda I + \mu T)(\lambda I - \mu T) = (\lambda^2 - \mu^2 a) I$ n'est jamais nul sauf pour $\lambda = \mu = 0$, tout élément non nul de C est inversible : C est un corps. En particulier, $C(\mathbf{R}, q(x) = - x^2) = \mathbf{C}$.

b)Si $a = q(1)$ est un carré dans K et $a \neq 0$, soit $\sqrt{a}$ une racine carrée de a et soient $e_1 = 1/2(I + 1/\sqrt{a}\, T)$, $e_2 = 1/2(I - 1/\sqrt{a}\, T)$. e_1 et e_2 forment une base de C : $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$. C est somme directe de deux algèbres isomorphes à K, l'une d'unité e_1, l'autre d'unité e_2 : $C = K \oplus K$.

c) $a = q(1) = 0$, C est l'algèbre dite des nombres duaux sur K. On vérifie que $(\lambda I + \mu T)(\lambda' I + \mu' T) = \lambda\lambda' I + (\lambda\mu' + \lambda'\mu) T$, car $T^2 = 0$.

C) On appelle algèbre de quaternions toute algèbre de Clifford d'un espace quadratique régulier de dimension 2. Une telle algèbre est de dimension 4 sur K et ses éléments sont appelés des quaternions. Si l'on considère (E, q) = $\langle a, b \rangle$ où $q(e_1) = a$, $q(e_2) = b$, e_1 et e_2 étant une base de E, on note usuellement $(\frac{a,b}{K})$ l'algèbre de Clifford C(E, q). $(\frac{-1,-1}{R})$ est ainsi l'algèbre usuelle **H** des quaternions de Hamilton ; on renvoie ici à ([13, b] p.298-313) pour une étude détaillée. La représentation habituelle de **H** au moyen de matrices de m(2, **C**) est la suivante : on note e = (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et on désigne par E_1, respectivement E_2, les matrices images de e_1, respectivement e_2 ; on note E_3 le produit $E_1 E_2$.(On a $e_1^2 = e_2^2 = -1$, $e_1 e_2 = - e_2 e_1$, $(e_1 e_2)^2 = -1$, $(e_1 e_2) e_1 = - e_1 (e_1 e_2) = e_2$, $(e_1 e_2) e_2 = - e_1$). Dès lors on définit la représentation matricielle d'un élément de **H** par :

$h = \alpha I + \beta E_1 + \gamma E_2 + \delta E_3 = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix}$ et **H** s'identifie à la sous-algèbre réelle de dimension 4 de m(2, **C**) formée par les matrices $h = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix}$ où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z et l'application de Clifford de $\mathbf{R}^2$ (muni de la forme quadratique $q(u) = q(\beta e_1 + \gamma e_2) = -\beta^2 - \gamma^2$) dans $\mathbf{H} \subset m(2, \mathbf{C})$ s'écrit alors :

$$u = \beta e_1 + \gamma e_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & 0 \end{bmatrix} = \varphi(u)$$

tel que $$(\varphi(u))^2 = (-\beta^2 - \gamma^2).\, I = q(u)\,.\, I.$$

Remarque: cette application définit aussi une application de Clifford du plan complexe $\mathbf{C}^2$ muni de la forme quadratique $q(x\, e_1 + y\, e_2) = -x^2 - y^2$ (complexifié du plan antieuclidien $\mathbf{R}^2$ précédent) dans m(2, **C**). On peut montrer alors que l'algèbre des quaternions complexes est isomorphe à m(2, **C**).

D) Algèbre de Clifford de l'espace euclidien standard E_3 : considérons m(2, **C**) comme *algèbre réelle* de matrices complexes d'ordre 2 et comme ci-dessus au paragraphe précédent 3.3 posons $\varphi(m) = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$ pour $m = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$, ($e_1$, e_2, e_3) = e étant une base orthonormale de E_3. $\varphi(E_3)$ est l'espace réel des matrices hermitiennes de trace nulle (et telles que ${}^t\varphi(m) = \overline{\varphi}(m)$) de m(2, **C**). Les matrices $\sigma_1 = \varphi(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \varphi(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \varphi(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sont avec $\sigma_0 = I$ les *matrices de Pauli.*

Plus généralement on peut appeler matrices de Pauli tout ensemble de trois matrices σ_1, σ_2, σ_3 complexes de type (2, 2) vérifiant les relations $\sigma_j^2 = I$, σ_k

$\sigma_j + \sigma_j\, \sigma_k = 0$ pour tout $k \neq j$; $k, j \in \{1, 2, 3\}$ et $\sigma_1\sigma_2\, \sigma_3 = i\, I$. Il en résulte $\sigma_1\sigma_2 = i\, \sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\, \sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = i\, \sigma_2$. Les huit matrices σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ sont linéairement indépendantes sur **R**. En vertu de la conséquence du paragraphe 3-6 précédent, l'algèbre réelle m(2, **C**) est donc une algèbre de Clifford de l'espace euclidien de dimension 3.

E) Algèbre de Clifford de l'espace antieuclidien $E_{0,\,3}$: $\mathbf{R}^3$ muni de q définie par $q(e_1\, x^1 + e_2\, x^2 + e_3\, x^3) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Cette algèbre $C(E_{0,\,3})$ est de dimension 8 sur **R**. Introduisons l'algèbre réelle des matrices quaternioniennes m(2, **H**) d'ordre 2 à coefficients dans **H**. Soit X l'application définie par $X(u) = X(e_1\, x^1 + e_2\, x^2 + e_3\, x^3) = E_1\, x^1 + E_2\, x^2 + E_3\, x^3$ où les E_i sont les matrices du paragraphe C) précédent.

On note donc $X(u) = X(E_1\, x^1 + E_2\, x^2 + E_3\, x^3) = \begin{bmatrix} ix^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & -ix^3 \end{bmatrix}$.

Il est immédiat que $(X(u))^2 = [-(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]\, I = q(u).I$. X est une application de Clifford de $E_{0,\,3}$ dans **H,** mais la considération des dimensions nécessite l'introduction de l'application $\psi : x \in E_{0,\,3} \rightarrow \psi(x) = \begin{bmatrix} 0 & X(x) \\ X(x) & 0 \end{bmatrix} \in$ m(2, **H**) de dimension 4 sur **H** et donc de dimension réelle 16 (théorème de Wedderburn, cf. 5-3). On montre que la matrice unité I et $\psi(E_{0,\,3})$ engendrent une sous-algèbre de dimension 8 de m(2, **H**) isomorphe à $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$.

F) Algèbre de Clifford de l'espace de Minkowski $E_{1,\,3}$ [13, b, e].
L'espace de Minkowski est l'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^4$ muni de la forme quadratique $q(u) = q(e_0\, x^0 + e_1\, x^1 + e_2\, x^2 + e_3\, x^3) = (x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2$, avec pour algèbre de Clifford $C(E_{1,\,3})$ une algèbre réelle de dimension $2^4 = 16$. On écrit $u = e_0\, x^0 + x$ avec $x \in E_{0,\,3}$ et donc, naturellement, on introduit l'extension de l'application de Clifford précédente :

$$\psi_1(u) = \psi_1(e_0\, x^0 + x) = \begin{bmatrix} x^0 1_H & 0 \\ 0 & -x^0 1_H \end{bmatrix} + \psi(x) = \begin{bmatrix} x^0 1_H & X(x) \\ X(x) & -x^0 1_H \end{bmatrix}$$

et l'on vérifie alors que $C(E_{1,\,3})$ est isomorphe à l'algèbre réelle m(2, **H**). On peut vérifier que l'algèbre réelle m(2, **H**) est une forme réelle de l'algèbre complexe m(4, **C**), m(4, **C**) = m(2, **H**) $\oplus$i m(2, **H**), et on peut l'y plonger ce qui conduit à la recherche des applications de Clifford de $E_{1,\,3}$ dans m(4, **C**). Une telle application est déterminée par les images γ^0, γ^1, γ^2,

γ^3 des vecteurs de la base canonique de $E_{1,\,3}$ ce qui conduit à la définition suivante.

Définition :

On appelle matrices de Dirac tout ensemble de matrices complexes 4 x 4 notées γ^0, γ^1, γ^2, γ^3 qui anticommutent deux à deux et satisfont aux relations $(\gamma^0)^2 = I$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -I$. On prend habituellement pour γ^0 soit

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{bmatrix}$$

où σ_j , j=1, 2, 3 sont les matrices de Pauli.

On voit déjà dans ces exemples l'intérêt de la représentation des éléments d'une algèbre de Clifford C par des matrices. Ce point de vue sera systématiquement exploité dans la partie 4 qui suit.

3 . 8 La construction de Brauer-Weyl [8][13, e]

Il s'agit d'une généralisation de la construction de l'algèbre de Clifford $C(E_3)$ de l'espace euclidien standard avec les matrices de Pauli. Introduisons l'espace quadratique complexe standard de dimension n, de base orthonormale $e = (e_1, \dots, e_n)$ avec $q(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2$. Si n = 2r ou 2r+1, soit A $= m(2, \mathbf{C}) \otimes m(2, \mathbf{C}) \otimes \dots \otimes m(2, \mathbf{C})$, le produit tensoriel de r algèbres complexes; A s'identifie à $m(2^r, \mathbf{C})$. On définit $p : E \rightarrow A$. Pour $1 \leq j \leq r$, il vient :

$$e_j \rightarrow p_j = \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{j-1} \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{r-1},$$

$$e_{r+j} \rightarrow p_{r+j} = \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{j-1} \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{r-1},$$

et pour n = 2r + 1, $e_n = e_{2r+1} \rightarrow p_{2r+1} = \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{r}$.

On montre qu'il s'agit d'une application de Clifford ($p_k^2 = 1$ et pour $k \neq j$, $p_k\, p_j = -\, p_j\, p_k$) et que les p_j engendrent toute l'algèbre A. Si n est pair, n = 2r, $C(E_{2r}) = m(2^r, \mathbf{C})$; si n est impair, n = 2r+1, $C(E_{2r+1}) = m(2^r, \mathbf{C}) \oplus m(2^r, \mathbf{C})$.

4 Les algèbres de Clifford des espaces quadratiques réguliers standards réels ou complexes

4.1 Les algèbres de *Clifford* $C_{r,s}$ et $C^{+}_{r,s}$ *[13, a, b, e], [3, e, f], [18], [22].*

Soit $V = E_{r,s}$ l'espace pseudo-euclidien standard de dimension $m = r + s$ de type (r, s) rapporté à une base orthonormale $e = (e_1, e_2, \dots, e_m)$.

Posons $$x = \sum_{i=1}^{m} x^i\, e_i\,,\ y = \sum_{j=1}^{m} y^j\, e_j\,,$$

et notons $(x \mid y) = x^1 y^1 + \dots\dots + x^r y^r - x^{r+1} y^{r+1} - \dots - x^{r+s} y^{r+s}$

son produit scalaire. $C(V) = C_{r,s}$ désigne l'algèbre de Clifford, quotient de $\otimes E_{r,s}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $\{x \otimes x - (x \mid x).1, x \in V\}$. On utilise ici les notations de [13, b, e]. C(V) est une algèbre associative unitaire de dimension 2^m sur R. Π désigne l'involution naturelle de C(V), τ l'anti-automorphisme principal de C(V), unique anti-automorphisme de C(V) laissant invariants les éléments de V (τ est encore une anti-involution de l'algèbre C(V)), $\nu = \Pi \circ \tau = \tau \circ \Pi$ est la conjugaison de C(V). $C^{+}_{r,s} = C^{+}(V)$ est la sous-algèbre des éléments pairs de C(V), de dimension 2^{m-1} sur R. Comme dans [13], on convient d'appeler groupe de Clifford de V, ou encore selon [13], groupe de Clifford régulier de V, le groupe noté G, que forment avec l'unité $1_{C(V)}$ de l'algèbre C(V), pour la multiplication, les produits de vecteurs non isotropes de V. C'est aussi le groupe que forment pour la multiplication, les éléments inversibles g de l'algèbre de Clifford C(V) qui satisfont à la condition : pour tout $x \in V$, $\Pi(g)\, x\, g^{-1} = y \in V$. N, respectivement N', désigne la norme spinorielle ordinaire, respectivement norme spinorielle graduée, définies respectivement pour tout élément g du groupe de Clifford G (régulier) par : $\tau(g) . g = g^{\tau} . g = N(g) . 1_{C(V)}$ et par $\nu(g) . g = g^{\nu} . g = N'(g) . 1_{C(V)}$. N et N' sont des homomorphismes du groupe de Clifford (régulier) dans le groupe multiplicatif R^* qui appliquent sur $(R^*)^2$ le centre $R^* . 1_{C(V)}$ du groupe de Clifford régulier. Pour $g = x_1 x_2 \dots x_p$, produit de vecteurs réguliers de V,

$$N'(g) = (-1)^p N(g) \text{ et } g^{-1} = \frac{g^{\tau}}{N(g)} = \frac{g^{\nu}}{N'(g)}\,.$$

On désigne par Spin V, le noyau de la restriction de N à $G^+ = C^+(V) \cap G$, formé par les $g \in G$ qui sont produits d'un nombre pair de vecteurs réguliers de V. Pour m > 2, ce groupe Spin V, le groupe spinoriel de V, est connexe et contenu dans G^{++}, groupe que forment les $g \in G$ qui sont produits d'un nombre pair de « vecteurs positifs » et d'un nombre pair de « vecteurs négatifs ». Le groupe Spin V engendre linéairement $C^+(V) = C^+_{r,s}$, sous-algèbre des éléments pairs, dans laquelle il est plongé. Nous allons, maintenant, étudier de façon précise la structure des algèbres $C_{r,s}$ et celle des $C^+_{r,s}$.

4 . 2 Classification des algèbres de Clifford $C^+_{r,s} = C^+(V)$ [3, d, e].

Comme il est noté dans [13, b, e], si u est un vecteur de V tel que $(u|u) = \varepsilon = \pm 1$, l'application φ de $u^\perp$ dans $C^+(V)$: $y \in u^\perp \rightarrow u\,y = \varphi(y)$ est telle que $\varphi(y)^2 = -(u|u)(y|y) = -\varepsilon (y|y)$ et représente $C^+(V)$ comme l'algèbre de Clifford de l'espace vectoriel $u^\perp$ muni de la forme quadratique induite de celle de V multipliée par (-ε), donc de signature (r, s-1) si ε = -1 ou (s, r-1) si ε = 1. Toutes ces structures d'algèbres de Clifford sur $C^+(V)$ correspondant aux différents choix de u, définissent la même anti-involution de conjugaison qui coïncide avec la restriction de τ à $C^+(V)$.

On peut établir la table fondamentale suivante (la première colonne donne *m* = r+s modulo 2, la seconde colonne donne d = r-s modulo 8) qui donne explicitement la classification des algèbres de Clifford $C_{r,s}$ et $C^+_{r,s}$, suivant la congruence modulo 8 de r – s. Ce résultat est lié à la nature du groupe de Brauer-Wall de **R** : BW(**R**) = **Z**/8**Z** , comme l'a montré C.T.C.Wall ([23], [26] chap. 5, § 4, p. 126). On note m(n, F) l'algèbre réelle des matrices n x n sur le corps F = **R**, **C** ou **H** (corps usuel des quaternions).

Preuve. Rappelons d'abord les résultats classiques suivants.

$C_{r,s} \otimes C_{11} \approx C_{r+1,s+1}$ (on peut même considérer un produit tensoriel d'algèbres $\mathbf{Z}_2$ – graduées).

$C_{r,s} \otimes C_{2,0} \approx C_{s+2,r}$; $C_{1,0} \approx \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$; $C_{0,1} \approx \mathbf{C}$

$C_{r,s} \otimes C_{0,2} \approx C_{s,r+2}$; $C_{2,0} \approx C_{1,1} \approx m(2, \mathbf{R})$; $C_{0,2} \approx \mathbf{H}$

$m(n, \mathbf{R}) \otimes m(m, \mathbf{R}) \approx m(nm, \mathbf{R})$; $\mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \approx \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$

$m(n, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{R} \approx m(n, \mathbf{R})$

$m(n, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \approx m(n, \mathbf{C})$ ([24], 1°exposé p.603 et chap. VIII)

$m(n, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{H} \approx m(n, \mathbf{H})$; $\mathbf{H} \otimes \mathbf{C} \approx m(2, \mathbf{C})$; $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \approx m(4, \mathbf{R})$

$C_{0,n+8} \approx C_{0,n} \otimes C_{0,8}$; $C_{0,8} \approx m(16, \mathbf{R})$, dont il résulte que si

$C_{0,n} \approx m(k, F)$ où F est le corps **R**, **C** ou **H**, on obtient

$C_{0,n+8} \approx m(16k, F)$, ce qui permet d'établir la table suivante (table 2) , donnée d'abord dans [25] (p. 12) puis dans [32] (p. 148).

Table fondamentale ([k] désigne la partie entière de k).

m	d	$C^{+}_{r,\ s}$	C r, s
0	0	m($2^{[\ m-1/2\ ]}$, **R**) ⊕ m($2^{[\ m-1/2\ ]}$, **R**)	m($2^{m/2}$, **R**)
1	1	m($2^{m-1/2}$, **R**)	m($2^{[\ m/2\ ]}$, **R**) ⊕ m($2^{[\ m/2\ ]}$, **R**)
0	2	m($2^{[\ m-1/2\ ]}$, **C**)	m($2^{m/2}$, **R**)
1	3	m($2^{\frac{m-1}{2}-1}$, **H**)	m($2^{[\frac{m}{2}]}$, **C**)
0	4	m($2^{[\frac{m-1}{2}]-1}$, **H**) ⊕ m($2^{[\frac{m-1}{2}]-1}$, **H**)	m($2^{\frac{m}{2}-1}$, **H**)
1	5	m($2^{\frac{m-1}{2}-1}$, **H**)	m($2^{[\frac{m}{2}]-1}$, **H**) ⊕ m($2^{[\frac{m}{2}]-1}$, **H**)
0	6	m($2^{[\ m-1/2\ ]}$, **C**)	m($2^{\frac{m}{2}-1}$, **H**)
1	7	m($2^{m-1/2}$, **R**)	m($2^{[\frac{m}{2}]}$, **C**)

Ainsi $C_{14,\ 0} \approx$ m(64, **H**) car 14 ≡ 6, modulo 8 et $C_{6,\ 0} \approx$ m(4, **H**).
Comme $C_{r,\ s} \otimes C_{11} \approx C_{r+1,\ s+1}$, en supposant r > s, on obtient:
$C_{r\text{-}s,\ 0} \otimes \underbrace{C_{1,1} \otimes \cdots \otimes C_{1,1}}_{s} \approx C_{r,\ s}$, et de plus $C_{1,\ 1} \approx$ m(2, **R**) d'où

$C_{r,\,s} \approx C_{r-s,\,0} \otimes m(2^{s}, \mathbf{R})$ et si $C_{r-s,\,0}$ est isomorphe à m(m, F) on trouve que $C_{r,\,s} \approx m(m, F) \otimes m(2^{s}, F) \approx m(2^{s} n, F)$, ce qui nous conduit à un cas précédemment étudié.
Si r < s, on ramène l'étude de $C_{r,\,s}$ à celle de $C_{0,\,s-r}$ et la classification se fait de même.

Table 2

n	$C_{n,\,0}$	$C_{0,\,n}$	$C_n^C = C_{n,\,0} \otimes \mathbf{C} \approx C_{0,\,n} \otimes \mathbf{C}$
1	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$
2	$m(2, \mathbf{R})$	$\mathbf{H}$	$m(2, \mathbf{C})$
3	$m(2, \mathbf{C})$	$\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$	$m(2, \mathbf{C}) \oplus m(2, \mathbf{C})$
4	$m(2, \mathbf{H})$	$m(2, \mathbf{H})$	$m(4, \mathbf{C})$
5	$m(2,\mathbf{H}) \oplus m(2,\mathbf{H})$	$m(4, \mathbf{C})$	$m(4, \mathbf{C}) \oplus m(4, \mathbf{C})$
6	$m(4, \mathbf{H})$	$m(8, \mathbf{R})$	$m(8, \mathbf{C})$
7	$m(8, \mathbf{C})$	$m(8,\mathbf{R}) \oplus m(8,\mathbf{R})$	$m(8, \mathbf{C}) \oplus m(8, \mathbf{C})$
8	$m(16, \mathbf{R})$	$m(16, \mathbf{R})$	$m(16, \mathbf{C})$

Pour obtenir la nature des $C^{+}_{r,\,s}$, il suffit de noter que ce sont des algèbres de Clifford de l'espace quadratique $u^{\perp}$, muni de la forme quadratique de type (r, s-1) si $\varepsilon = -1$ ou (s, r-1) si $\varepsilon = 1$, pour $\varepsilon = (u|u) = \pm\ 1$.
Par exemple, la structure de $C^{+}_{4,\,7}$ est celle de $m(2^{4}, \mathbf{H})$ car $4 - 7 \equiv -3 \equiv 5$ (modulo 8) et celle de $C_{4,\,7}$ est $m(2^{4}, \mathbf{H}) \oplus m(2^{4}, \mathbf{H})$.

Remarques : On retrouve ainsi, simplement, le résultat général faisant l'objet de la proposition 3.20 de [26] (chap. 5, p. 123) et celui de [16] (p. 280). La table fondamentale donnée ici généralise celle donnée pour le cas euclidien dans [22] (Leçon 13, p. 238-239). Pour éviter la manipulation d'algèbres de matrices à coefficients dans **H**, on complexifie les espaces quadratiques réels, ce qui justifie aussi l'étude pour elle-même des algèbres de Clifford des espaces quadratiques réguliers complexes.

4.3 Les algèbres de Clifford des espaces quadratiques réguliers standards complexes.

Soit E_n l'espace quadratique complexe standard de dimension n. On sait déjà (3.8) que $C(E_{2r}) \approx m(2^r, C)$ et que $C(E_{2r+1}) \approx m(2^r, C) \oplus m(2^r, C)$. Si l'on convient, suivant une idée de C.Chevalley [11] de noter par des ' la complexification, on a vu (3.6) que C(q') = C'(q). On peut retrouver ici rapidement ce résultat. Notons $C(E'_n) = C'(n)$ et observons par examen direct que $C'(1) = C \oplus C$ (on a déjà vu que $C'_{1,0} = R \oplus R$) ; de plus $C'(2r) = C(r, r) \otimes C \approx m(2^r, R) \otimes_R C \approx m(2^r, C)$ suivant la table fondamentale du 4.2. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme : $C'(p+1) \approx C'(1) \otimes C'(p)$.

Il suffit d'introduire un espace complexe E'_{p+1} de dimension p+1 sur C, somme directe orthogonale de E'_p et d'une droite vectorielle complexe E'_1, muni de la forme quadratique standard et d'envisager l'application de Clifford suivante. Comme tout vecteur x_{p+1} de E'_{p+1} s'écrit $x_{p+1} = x_p + x_1$ où $x_p \in E'_p$ et $x_1 \in E'_1$, l'application φ de E'_{p+1} dans $C'(1) \otimes C'(p)$ définie par $x = x_p + x_1 \rightarrow \varphi(x) = x_p \otimes 1 + 1 \otimes x_1$ est bien une application de Clifford car $(\varphi(x))^2 = (x_p \otimes 1 + 1 \otimes x_1)(x_p \otimes 1 + 1 \otimes x_1) = x_p^2 \otimes 1 + x_p \otimes x_1 - x_1 \otimes x_p + 1 \otimes x_1^2 = (q'(x_p) + q'(x_1))(1 \otimes 1) = q'(x).1$. Elle se prolonge en un homomorphisme d'algèbre Φ de C'(p+1) dans $C'(1) \otimes C'(p)$ qui en raison des dimensions est un isomorphisme. Dès lors : $C'(2r+1) \approx C'(2r) \oplus C'(2r) = m(2^r, C) \oplus m(2^r, C)$. Ce résultat est lié à la nature du groupe de Brauer-Wall de C: BW(C) = Z / 2Z [23].

5 Etude de la simplicité des algèbres de Clifford

L'étude de la simplicité des algèbres de Clifford est faite dans [21], [13], [20]. Rappelons simplement dans le cadre de ce travail quelque résultats généraux valables pour une classe d'algèbres avec unité de dimension finie qui contient les algèbres de Clifford des espaces quadratiques réguliers.

5 . 1 Définitions.

Une algèbre *simple* est une algèbre A avec unité de dimension finie qui n'admet d'autre idéal bilatère que $\{0\}$ et A. On appelle algèbre *semi-simple* toute algèbre composée directe d'un nombre fini d'algèbres simples A_i, ce qui traduit le fait que chaque A_i est un idéal bilatère de A et que A est la somme directe des espaces vectoriels A_i. Une représentation linéaire de A dans un espace vectoriel M sur le même corps K que A est un homomorphisme ρ, d'algèbres avec unité, de A dans l'algèbre $\mathrm{L}_{\mathrm{K}}(M)$ des endomorphismes de M. La représentation est dite *fidèle* si ρ est injectif. On note simplement $a\, m$ l'élément $\rho(a)\, m$ où $a \in A$ et $m \in M$. Muni des opérateurs $\rho(a)$, M est appelé un *M-module.* L'algèbre $\mathrm{L}_{A}(M)$ des endomorphismes du A-module M est la sous-algèbre de $\mathrm{L}_{\mathrm{K}}(M)$ que forment les endomorphismes linéaires f tels que $f(a\, m) = a\, f(m)$, $\forall a \in A, \forall m \in M$ (soit $f \circ \rho(a) = \rho(a) \circ f$). $\mathrm{L}_{A}(M)$ contient les multiples scalaires de l'automorphisme identique de M. Ainsi $\mathrm{L}_{A}(M)$ est une K-algèbre unité (qui s'identifie au centralisateur ou commutant de $\rho(a)$ dans $\mathrm{L}_{\mathrm{K}}(M)$) et on l'appelle le commutant du module M. On montre [13, b, e] :

5.2 *Proposition: si le A-module est simple, l'algèbre $\mathrm{L}_{A}(M)$ est un corps (qui peut être non commutatif) extension de K. On obtient alors le théorème de structure de Wedderburn :*

5.3 *Théorème : toute algèbre simple A est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite M sur un corps Γ , non nécessairement commutatif, extension du corps K de A, autrement dit A est isomorphe à l'algèbre des matrices p x p ($p = \dim_{\Gamma} M$) sur le corps Γ. Il en résulte que $\dim_K A = p^2 \dim_K \Gamma$.Rappelons aussi le théorème classique suivant :*

5.4 *Théorème [22], [13], [16], [11], [20] : si la dimension de E est paire, l'algèbre de Clifford C d'un espace quadratique régulier est centrale simple ; si la dimension de E est impaire, et si $u^2 = (e_1 \ldots e_n)^2$ (où $(e_1 \ldots e_n)$ est une base orthogonale de E) n'est pas le carré d'un scalaire, C est alors une algèbre sur le corps $\widetilde{K}$ que forme son centre et considérée comme algèbre sur $\widetilde{K}$, C est centrale simple ; si la dimension de E est impaire, et si $u^2 = (e_1 \ldots e_n)^2$ est le carré d'un scalaire C est composée directe de deux sous-algèbres isomorphes à sa sous-algèbre paire C^+ et* *donc composée directe de deux algèbres centrales simples isomorphes. On peut montrer [13, a, e] que l'algèbre de Clifford d'un espace quadratique possède un module fidèle minimal unique S(E, q) qui est simple ou somme directe de deux modules simples suivant que C(E, q) est simple ou non. Lorsque S(E, q) est somme directe de deux sous-modules simples non isomorphes ces sous-modules sont appelés espaces de semi-spineurs.*

5.5 Les opérateurs de création et d'annihilation et les algèbres de Clifford [27].

A) Etude du cas pair n = 2r

On va utiliser le formalisme bien connu des opérateurs de création et d'annihilation pour construire dans le cas pair une représentation fidèle irréductible de C(E, q) et conclure.

Rappels ([13, b, e], [21]) : soit E un K-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie comme dans les exemples), K étant un corps de caractéristique nulle dans les applications(K = R ou C), avec E^* son dual. Introduisons l'algèbre extérieure ΛE ; soit $v \in E$ et $\alpha^+(v) : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$ l'application définie pour un j-vecteur décomposable par $\alpha^+(v)\ (v_1 \wedge \dots \wedge v_j) = \sqrt{j+1}\ v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_j$, étendue par linéarité pour tous $v_1, \dots, v_j \in E$, $j \in N$. $\alpha^+(v)$ est un élément de L (ΛE) qui vérifie pour tout $j \in N$, $\alpha^+(v)\ (\overset{j}{\Lambda} E) \subset \overset{j+1}{\Lambda} E$, appelé *opérateur de création* associé au vecteur *v*. De même soit $\theta \in E^*$ et considérons $\alpha^-(\theta) : \Lambda E \rightarrow \Lambda E$ telle que $\alpha^-(\theta)\ (\overset{\circ}{\Lambda} E) = 0$ et $\alpha^-(\theta)\ (\overset{j}{\Lambda} E) \subset \overset{j-1}{\Lambda} E$, pour tout $j \in N$, avec $\alpha^-(\theta)\ (v_1 \wedge \dots \wedge v_j) = 1/\sqrt{j} \sum_k (-1)^{k-1}\, \theta(v_k)\, v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_k \wedge \dots \wedge v_j)$ et en étendant cette définition par linéarité. $\alpha^-(\theta)$ application linéaire de ΛE dans ΛE est l'*opérateur d'annihilation* défini par θ.

Remarque fondamentale : reprenons l'espace quadratique (E, q) et notons, comme au 3.4, g la forme bilinéaire symétrique associée à q et φ l'application définie pour $x \in E$ par $\varphi(x) = d_x + L_x$. L_x est clairement l'opérateur de création $\alpha^+(x)$ et d_x est $\alpha^-(\theta)$ où θ est la forme linéaire notée précédemment ρx associée à la forme bilinéaire g: pour tous $x, y \in E$ $g(x, y) = \langle \rho x, y \rangle = \rho x\,(y)$. La démonstration donnée au 3.4 nous assure déjà que $\varphi(x)$ est une application de Clifford de E dans l'algèbre des opérateurs linéaires de ΛE. Nous allons ici procéder de manière différente.

Construction effective d'une représentation fidèle irréductible de C (n=2r): donnons d'abord deux lemmes.

Lemme 1: Soient (E_1, q_1) et (E_2, q_2) deux espaces quadratiques réguliers complexes de même dimension. Soient g_1 et g_2 les formes bilinéaires symétriques complexes associées respectivement à q_1 et q_2. Alors (E_1, q_1) et (E_2, q_2) sont "isométriques", c'est-à-dire qu'il existe un C-isomorphisme h de E_1 dans E_2 tel que pour tous $x, y \in E_1$: $g_2(h(x), h(y)) = g_1(x, y)$.

La démonstration est immédiate en choisissant deux bases orthogonales (e_j) et (e'_j), avec $1 \leq j \leq n$, respectivement pour g_1 et pour g_2, en posant $h(e_j) = e'_j$ puis en étendant par linéarité.

Lemme 2: soit A une algèbre réelle associative avec unité telle que $A_C = A \underset{R}{\otimes} C$ soit simple comme algèbre complexe. Alors A est simple.

Il suffit d'appliquer la définition en raisonnant par l'absurde.

Proposition: soit (E, q) et soit $E \oplus E^* = F$ (E est supposé de dimension finie n=2r). Définissons une forme bilinéaire symétrique f sur F en posant pour $x, y \in E$, $\theta, \chi \in E^*$, $f(x \oplus \theta, y \oplus \chi) = \theta(y) + \chi(x)$ et en l'étendant par linéarité. Soit Q la forme quadratique associée à f.

Alors ρ: $F \dashrightarrow \mathcal{L}(\Lambda E)$ définie par $\rho(x \oplus \theta) = \alpha^+(x) + \alpha^-(\theta)$, pour $x \in E$, $\theta \in E^*$, est une représentation linéaire irréductible de l'algèbre de Clifford C(F, Q) dans $\mathcal{L}(\Lambda E)$.

Preuve: on note tout d'abord que pour tout $z = x + \theta \in F$, $z_1 = x_1 + \theta_1 \in F$, $\rho(z)\, \rho(z_1) + \rho(z_1)\, \rho(z) = 2 f(z, z_1)$. Ainsi ρ permet de définir une représentation linéaire de C(F, Q) dans $\mathcal{L}(\Lambda E)$. Montrons que cette représentation est fidèle irréductible par un argument indirect dimensionnel. On observe d'abord que dim F = 2n, dim C(F, Q) $= 2^{2n} = (2^n)^2$, dim $\Lambda E = 2^n$, dim $\mathcal{L}(\Lambda E) = (2^n)^2$; donc dim C(F, Q) = dim $\mathcal{L}(\Lambda E)$. Il suffit alors de montrer que ρ est injectif ou que son noyau ker ρ est réduit à 0.

Soit alors $\mu \in C(F, Q)$ tel que $\rho(\mu) = 0$; il est immédiat (considérer une base de C(F, Q)) que $\rho(\mu)$ peut s'écrire comme un polynôme en opérateurs de création et d'annihilation définis ci-dessus. Ainsi $\rho(\mu).1 = 0$, ce qui implique que soit $\rho(\mu)$ doit contenir des opérateurs d'annihilation, soit $\mu = 0$. Comme de plus $\rho(\mu).\ E = \{0\}$, si $\mu \neq 0$, chaque terme de $\rho(\mu)$ doit contenir deux ou plus opérateurs d'annihilation. En continuant de cette façon, on exprime que :

$\rho(\mu)\,.\,(\overset{j}{\Lambda} E) = \{0\}$ pour tout j, et on conclue enfin que $\mu = 0$.

On peut donc énoncer:

Théorème: *soit (E, q) un espace quadratique standard régulier de dimension paire n = 2r sur R ou C. L'algèbre de Clifford C(E, q) est simple.*

Démonstration: supposons d'abord que le corps K = C. E est donc un C-espace vectoriel de dimension paire n = 2r. Soit alors E_1 un espace vectoriel complexe de dimension r ; soit aussi $F_1 = E_1 \oplus E_1^*$ comme dans la proposition précédente, et soit f_1 et Q_1 respectivement la forme bilinéaire symétrique complexe et la forme quadratique associées, comme ci-dessus. En vertu du lemme 1, E et F_1 sont deux espaces quadratiques réguliers complexes de même dimension « isométriques » et donc $C(E, q) \approx C(F_1, Q_1)$. Mais $C(F_1, Q_1)$ est une algèbre associative avec unité qui admet une représentation linéaire fidèle irréductible minimale, et elle est donc simple. Par suite C(E, q) qui lui est isomorphe est aussi simple. Supposons maintenant que K = R : en complexifiant (produit tensoriel par C), comme on vient de le voir l'algèbre de Clifford complexifiée, compte tenu du cas particulier du 3.6 est simple et d'après le lemme 2, C(E, q) est simple.

Remarque : « 1 » comme élément de ΛE est souvent noté |0> dans la littérature et appelé l'état de base. Les éléments de E s'appellent les états des particules simples.

B) Etude du cas impair n = 2r + 1

Supposons d'abord K = R. Soit C(E, q) l'algèbre de Clifford de l'espace quadratique standard régulier réel (E, q). Introduisons alors la sous-algèbre paire $C^+(E, q)$ réalisée (cf. 4.2) comme l'algèbre de Clifford de $u^\perp$ où $u \in E$, $g(u|u) = \varepsilon = \pm 1$ munie de la forme quadratique standard de signature (p, q-1) si $\varepsilon = -1$ ou (q, p-1) si $\varepsilon = 1$,algèbre de Clifford d'un espace de dimension paire pour lequel le résultat précédent s'applique, $C^+(E, q)$ est donc simple. Comme l'on sait (cf. 5.4) que C(E, q) est composée directe de deux sous-algèbres isomorphes à une sous-algèbre paire qui est simple comme on vient de le voir, il en résulte que C(E, q) est semi-simple.

Supposons maintenant K = C. On peut toujours réaliser $C^+(E, q)$ comme l'algèbre de Clifford de (E_1, q_1), où E_1 est l'orthogonal de e_1 tel que $q(e_1) \neq 0$ et où q_1 est définie pour $y \in E_1$ par $q_1(y) = -q(e_1)\, q(y)$, et reprendre le raisonnement précédent pour conclure à la semi-simplicité de C(E, q).

6 Conclusion : quelques applications

6.1 L'opérateur de Dirac de l'espace de Minkowski.

Comme le note R.Deheuvels ([13, e] p.284), « de la même façon que l'application de Clifford permet d'obtenir une *racine carrée* de la forme quadratique q, elle permet dans le cas d'un espace pseudo-euclidien d'obtenir un opérateur différentiel $D\!\!\!\!/$, *racine carrée* du laplacien Δ ». Soit e = (e_1, …, e_m) une base othogonale de $E_{r,\,s}$ = V (m = r + s). Identifions les e_k à leurs images dans C(V). Il en résulte que $(e_1\, x^1 + e_2\, x^2 + \ldots + e_m\, x^m)^2 = q(x).1_{C(V)}$. On peut alors définir l'opérateur de Dirac $D\!\!\!\!/$ comme l'opérateur différentiel linéaire $D\!\!\!\!/ = e_1\ \partial/\partial x^1 + e_2\ \partial/\partial x^2 + \ldots + e_m\ \partial/\partial x^m$, à coefficients dans C(V). On vérifie alors que $D\!\!\!\!/$ est indépendant du choix de la base orthogonale. Il opère sur les champs différentiels de spineurs définis (cf. 5.4, fonctions différentiables de $E_{r,\,s}$ à valeurs dans un espace de spineurs S de $E_{r,\,s}$ par dérivation et produit par des éléments de C(V)) ou sur les fonctions différentiables de $E_{r,\,s}$ à valeurs dans $C(E_{r,\,s})$ = C(V).

Le carré $D\!\!\!\!/^{\,2} = \Delta$ est un opérateur scalaire ou diagonal : le laplacien de $E_{r,\,s}$. Si l'on choisit une représentation naturelle de $C(E_{r,\,s})$ (cf. 4) on obtient aussi une représentation naturelle de $D\!\!\!\!/$. Dans le cas de $C(E_{1,\,3})$ = m(2, H) pour lequel $C(E_{1,\,3}) \otimes C$ = m(4, C) (cf. 5) on utilise partiellement l'opérateur de Dirac complexe, ce qui conduit à choisir pour S l'espace vectoriel C^4. La sous-algèbre paire $C^+(E_{1,\,3})$ s'identifie à m(2, C) (cf. 4) et est constituée des matrices $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{bmatrix} \in$ m(4, C) (cf. [13, b] p. 252 et 270) où $a \in$ m(2, C) et $a \rightarrow \tilde{a} = ({}^t\ a)^{\vee}$ est l'automorphisme Π de $C(E_{1,\,3})$ associé à la symétrie d'espace $E_{1,\,3}$.

6.2 Le groupe conforme de l'espace de Minkowski[3, a, b, c], [13, a], [28] .

Soit V = $E_{r,\,s}$ l'espace pseudo-euclidien standard de type (r, s) et de dimension m = r + s. Le cône isotrope Q de V épointé est une sous-variété différentiable singulière de V. Si P désigne la projection de V – {0} sur son espace projectif P(V), $\hat{Q} = \hat{Q}(E_{r,\,s})$ = P(Q – {0}) est naturellement muni d'une structure pseudo-riemannienne conforme de type (r-1, s-1). On introduit F = V⊕H où H est le plan hyperbolique réel rapporté à une base isotrope. F est ainsi un espace pseudo-euclidien standard régulier de type (r+1, s+1). Q(F) de dimension m+1 désigne son cône isotrope. M = P(Q(F) – {0}) image dans P(F) du cône isotrope épointé de F est de dimension m et est appelé le compactifié conforme de V = $E_{r,\,s}$ et s'identifie à l'espace homogène PO(F)/S(V) quotient du groupe conforme PO(F) = O(r+1, s+1)/Z_2 par le groupe des similitudes S(V) de V. M est homéomorphe à $S^r \times S^s / Z_2$. Liouville a considéré le plan euclidien R^2 [29] et étudié les applications continûment différentiables d'un ouvert θ de R^2 dans R^2. Haantjes [30] a étendu les résultats de Liouville aux espaces pseudo-euclidiens et montré que pour r+s>3 les seules transformations conformes de $E_{r,\ s}$ sont les produits de similitudes affines et d'inversions. PO(F) opère dans l'espace projectif $P^{n+1}(R)$ de dimension m+1. C'est un sous-groupe de PGL(m+1) qui opère sur M, compactifié conforme de V, quadrique projective. PO(F) a (m+1)(m+2)/2 paramètres et son algèbre de Lie est isomorphe à L SO(r+1, s+1). Dans le cas usuel r = 1, s = 3, on retrouve bien l'algèbre de Lie conforme L SO(2, 4) exploitée par E.Cartan, P.A.M.Dirac, W.A.Hepner, Y.Muraï, I.Segal et d'autres.

6.3 Les super-groupes .

Dans un livre récent [31] les résultats classiques précédents sont étendus à l'étude des super-groupes et des super-symétries. On y considère notamment les groupes Spin(1, n-1) dits Lorentziens dont les représentations réelles conduisent aux super-groupes de Poincaré. On y montre qu'on trouve pour n = 3, 4, 6 que le groupe spinoriel Lorentzien est SL(2, F) où F = R, C, H et que l'algèbre O des octaves de Cayley Dickson intervient pour n = 10, le groupe spinoriel étant alors SL(2, O). On y met aussi l'accent sur l'importance de ce formalisme pour la présentation mathématique des champs quantiques, des cordes et des super-cordes.

Références

[1] Costa de Beauregard O.,
- a- Contribution à l'étude de la théorie de l'électron de Dirac, Thèse, Paris (1943).
- b- La relativité restreinte et la première mécanique broglienne, Gauthier-Villars, Paris (1943).
- c- Précis de mécanique quantique, Dunod, Paris (1967).
- d- CPT invariance and interpretation of quantum mechanics, Found. Phys. Vol. 10, Nos. 7/8, 513-530 (1980).

[2] Clerc R. L.,
- a- Sur un schéma géométrique à tenseur impulsion-énergie asymétrique. Application à l'étude relativiste des fluides à spin, Thèse, Toulouse (1972).
- b- Ann. I.H.P., Vol. XVII, n° 3, 227-257 et Vol. XVII, n° 3, 259-290 (1972).

[3] Anglès P.,
- a- Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une métrique de type (p,q), Annales de l'I.H.P., Section A. vol. XXXIII n°1, 33-51 (1980).

b- Géométrie spinorielle conforme orthogonale triviale et groupes de spinorialité conforme, Report HTKK Mat A 195, Helsinky University of Technology, 1-36 (1982).
c- Real conformal spin structures, Scientiarum Mathematicarum Hungarica, vol. 23, Budapest, 115-139 (1988).
d- Construction de revêtements du groupe symplectique réel CSp(2r, R). Géométrie conforme symplectique réelle. Définition des structures spinorielles conformes symplectiques réelles. Simon Stevin, Gand (Belgique), vol. 60, n° 1, 57-82 (1986).
e- Algèbres de Clifford $C^{+}_{r,s}$ des espaces quadratiques pseudo-euclidiens standards $E_{r,s}$ et structures correspondantes sur les espaces de spineurs associés. Plongement naturel des quadratiques projectives $\widetilde{Q}(E_{r,s})$ associées aux espaces $E_{r,s}$. Nato ASI Séries vol. 183, 79-81, Clifford Algebras édité par J.S.R. Chisholm et A.K. Common, D. Reidel Publishing Company (1986).
f- Groupes spinoriels des espaces pseudo-euclidiens standards et quadratiques projectives réelles associées, vol. 63 n° 1, 3-44, Simon Stevin : a quaterly Journal of pure and applied mathematics, Gand (Belgique) (1989).
g- Etude de la trialité en signature (r, s) quelconque pour les espaces vectoriels réels standards de dimension m=r+s=2k, vol. 14, 1-42, Journal of Natural Geometry, The Mathematical Research Unit, London (1998).
h- Pseudo-unitary conformal groups and Clifford algebras for standard pseudo-hermitian spaces, preprint 1-29, Actes du 6° Congrès Int. sur les Algèbres de Clifford, Cookeville (USA) (2002).
i- Spin structures over n-dimensional skew-hermitian H-spaces, preprint 1-22, Actes du 6° Congrès Int. sur les Algèbres de Clifford, Cookeville (USA) (2002).

[4] Cartan E., Annales de l' E.N.S. (31), p. 263-355 (1914).
[5] Penrose R., Twistor algebra, J. of Math. Physcis, vol. 8 n° 2 (1967); Spinors and twistors in general relativity, Found of Physics, 13 , 325-331 (1983).
[6] Clifford W. K., Mathematical papers, edité par Mac Millan (1876).
[7] Dirac P. A. M. , Proceedings of the Royal Society, vol. 117, p. 610 (1927) et vol. 118, p.351 (1928).
[8] Brauer R. et Weyl H., American J. of Math., 57, 425 (1935).
[9] Cartan E., Leçons sur la théorie des spineurs, Hermann, Paris (1938).
[10] Dirac P. A. M. , Annals Mathematics, 37-429 (1936).
[11] Chevalley C., The algebraic theory of spinors, Columbia University Press, New York (1954).
[12] Crumeyrolle A.,
[13] Structures spinorielles, Ann. I. H.P., Sect. A (N.S.) 11, 19-55 (1964).
a- Groupes de spinorialité, Ann. I.H.P., Sect. A (N.S.) 14, 309-323 (1971).

b- Cours et séminaires du départ. de Math. de l'université Toulouse III, Algèbres de Clifford et spineurs (1974).

[14] Deheuvels R.

a- Groupes conformes et algèbres de Clifford , Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino, vol. 43, 2, 205-226 (1985).

b- Formes quadratiques et groupes classiques, P.U.F., Paris (1981).

c- Les structures exceptionnelles en algèbre et géométrie, preprint Paris, 1-24 (1980).

d- Cours de 3° cycle à l'école polytechnique, Paris (1966-1967).

e- Tenseurs et spineurs, P.U.F., Paris (1993).

[15] Micali A. et Villamayor O. E., Sur les algèbres de Clifford, Annales Scientifiques de l'E.N.S., 4° série, tome 1, p ; 271-304 (1968).

[16] Karoubi M., Algèbres de Clifford et K–théorie, Annales Scientifiques de l'E.N.S., 4° série, tome 1, p.14-270 (1968).

[17] Satake I., Algebraic structures of symmetric domains, Iwanomi Shoten publishers and Princeton University Press (1981).

[18] Lichnerowicz A.,

a- Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale, Bull. Soc. Math. France 92, 11-100 (1964).

b- Champ de Dirac, champ du neutrino et transformation C.P.T. sur un espace-temps courbe, Ann. I.H.P. Sect. A (N.S.) 1, 233-290 (1964).

[19] Lounesto P., Clifford algebras and spinors, Cambridge University Press (2000).

[20] Choquet-Bruhat Y., Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Dunod (1968).

[21] Hermann R., Spinors, Clifford and Cayley algebras, Interdisciplinary Mathematics, vol VII, Math. Sci. Trees Brookline (1974).

[22] Bourbaki N., Algèbre chapitre 9, Formes sesquilinéaires et quadratiques, Hermann, Paris (1959).

[23] Postnikov M., Leçons de géométries- Groupes et algèbres de Lie, Trad. Française, Ed. Mir, Moscou (1985).

[24] Wall C.T.C., Graded algebras anti-involutions, simple groups and symmetric spaces, Bull. Am. Math. Soc. 74, 198-202 (1968).

[25] Serre J.P., Applications algébriques de la cohomologie des groupes, II. Théorie des algèbres simples, Séminaire H.Cartan, E.N.S., 2 exposés 6.01, 6.09, 7.01, 7.11 (1950-1951).

[26] Atiyah M.F., Bott R., Shapiro A., Clifford modules Topology, vol. 3 suppl. 1, 3-38 (1964).

[27] Lam T.Y., The algebraic theory of quadratic forms, W.A. Benjamin. Inc. (1973).

[28] Kastler D., Introduction à l'électrodynamique quantique, Dunod, Paris (1964).

[29] Lounesto P., Latvamaa E., Conformal transformations and Clifford algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 79, 533-538 (1980).

[30] Liouville J., Extension au cas de 3 dimensions de la question du traçé géographique.. Application de l'analyse à la géométrie, C. Monge, Paris, 609-616 (1850).

[31] Haantjes, Conformal representations, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 40, 700-705 (1937).

[32] Deligne P., Kazhdan D., Etingof P., Morgan J.W., Freed D.S., Morrison D.R., Jeffrey L.C., Witten E., Quantum fields and strings: a course for mathematicians, vol. 1 et vol.2, Ed. American Math. Soc., Institute for advanced study, (2000).

[33] Husemoller D., Fiber bundles, Mc. Graw Inc. (1966).

Manuscrit reçu le 6 janvier 2003