Quelques questions à propos de la formule de Dirac pour la charge d'un monopole magnétique

GEORGES LOCHAK

Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, F-75012 Paris

ABSTRACT. After a brief survey of Dirac's formula, some questions are asked, tending to show that the conclusions concerning the magnetic charge are not general. The monopole charge is not so rigidly fixed as it is believed and it can take a more extended range of values, some can be even very small..

RESUME. Après avoir rappelé la démonstration de la formule de Dirac, on pose quelques questions qui tendent à montrer que les conclusions qu'on en tire quant à la charge du monopôle magnétique, ne sont pas générales. La charge du monopôle n'est pas aussi rigidement fixée qu'on le croit, elle peut prendre une gamme beaucoup plus étendue de valeurs, dont certaines très petites.

1 La formule de Dirac

Dirac a montré que, si une charge électrique interagit avec un monopôle magnétique, les deux charges e et g doivent être liées par la formule (voir [1] à [4]) :

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \tag{1}$$

où n est un nombre entier. La démonstration de Dirac est basée sur un raisonnement de jauge. Il considère une charge électrique en mouvement autour d'un monopôle fixe ; nous supposerons, au contraire, que c'est le monopôle qui est mobile et la charge électrique qui est un centre coulombien fixe, mais la démonstration est la même.

Rappelons que le champ électrique créé par le centre coulombien est vu par le monopôle, à travers un potentiel pseudo-vectoriel $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} = rot\,\mathbf{B} = e\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2}$$

Alors, le flux de $\mathbf{E}$ à travers un élément de surface fini Σ bordé par une courbe fermée Λ s'écrira :

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{E}.\mathbf{dS} = \iint_{\Sigma} rot\,\mathbf{B}.\mathbf{dS} = \oint_{\Lambda}\mathbf{B}.\mathbf{dl} = e\iint_{\Sigma}\frac{\mathbf{r}}{r^3}.\mathbf{dS} = e\iint_{\Sigma} d\Omega \tag{3}$$

On voit que le flux du champ à travers Σ, ou encore la circulation du pseudo-potentiel $\mathbf{B}$ le long du bord Λ de Σ, n'est autre que le produit par e de l'angle sous lequel cette surface est vue du centre coulombien. C'est le théorème de Gauss. Si nous écrasons la courbe Λ sur elle-même en refermant la surface Σ en une bulle qui *contient* la charge e, nous aurons :

$$\oint_{\Lambda\to 0}\mathbf{B}.\mathbf{dl} = e\oiint_{\Sigma} d\Omega = 4\pi e \tag{4}$$

On voit déjà un point capital mis en évidence par Dirac, à savoir que, le potentiel $\mathbf{B}$ étant solution de l'équation (2), $\mathbf{B}$ doit avoir une *ligne singulière passant par l'origine*, sinon la première intégrale dans (4) serait nulle. Supposons maintenant que, quelle que soit l'équation d'onde, le couplage minimal soit donné par la dérivée covariante :

$$\nabla - i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{B} \tag{5}$$

Dirac introduit une phase « non intégrable » γ dans la fonction d'onde :

$$\Psi = e^{i\gamma}\psi \tag{6}$$

Si on applique l'opérateur (5), l'introduction de la phase γ revient à introduire un nouveau potentiel par un changement de jauge :

$$\left(\nabla - i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{B}\right)\Psi = e^{i\gamma}\left(\nabla + i\nabla\gamma - i\frac{g}{\hbar c}\mathbf{B}\right)\psi \tag{7}$$

Dirac identifie alors le nouveau potentiel au gradient de γ mais le facteur de phase $e^{i\gamma}$ n'est admissible dans la fonction d'onde que s'il est égal à un multiple de 2π. On doit donc avoir :

$$\frac{g}{\hbar c}\oint_{\Lambda\to 0}\mathbf{B.dl} = \oint_{\Lambda\to 0}\nabla\gamma.\mathbf{dl} = 2n\pi \tag{8}$$

En comparant (4) et (8) on obtient la formule (1).

2 Démonstration de la formule à partir des équations du monopôle.

La démonstration vient de plus loin que celle de Dirac, mais elle est logiquement plus simple. On part de l'équation du monopôle dans un champ coulombien. La formule découlera de la continuité des fonctions d'onde sur le groupe des rotations.

Les équations s'écrivent, en représentation de Weyl, avec des spineurs ξ,η à deux composantes ([5] à [8]) :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{s}.\nabla - i\frac{g}{\hbar c}\left(W + \mathbf{s}.\mathbf{B}\right)\right)\xi = 0\\&\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{s}.\nabla + i\frac{g}{\hbar c}\left(W - \mathbf{s}.\mathbf{B}\right)\right)\eta = 0\end{aligned} \tag{9}$$

Respectivement gauche et droite, nord et sud , elle représentent un monopôle et un anti-monopôle. D'autre part, l'équation (2) nous donne :

$$B_x = \frac{e}{r}\frac{yz}{x^2+y^2}\,,\quad B_y = \frac{e}{r}\frac{-xz}{x^2+y^2}\,,\quad B_z = W = 0 \tag{10}$$

Ces potentiels diffèrent d'une jauge, de ceux utilisés par Dirac, mais contrairement aux siens, ils satisfont aux lois de symétrie de Curie pour le monopôle magnétique, point important non seulement pour la physique, mais aussi pour les calculs qui sont radicalement simplifiés.

Avec ces valeurs, les équations (9) admettent pour intégrales premières les *moments cinétiques* (gauche et droit) :

$$\begin{gathered}\mathbf{J}_\xi = \hbar\left[\Lambda^+ + \frac{1}{2}\mathbf{s}\right], \quad \mathbf{J}_\eta = \hbar\left[\Lambda^- + \frac{1}{2}\mathbf{s}\right] \\ \Lambda^\pm = \mathbf{r}\times\left(-i\nabla \pm D\,\mathbf{B}\right) \pm D\,\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \left(D = \frac{eg}{\hbar c}, \quad \mathbf{B} = e\,B\right)\end{gathered} \tag{11}$$

On voit apparaître le rapport D qui figurait dans (1) et on montre que $\Lambda^\pm$ sont les opérateurs infinitésimaux du groupe des rotations de R^3. **Sous la seule hypothèse que les fonctions d'onde des équations (9) soient continues sur le groupe des rotations, il en sera de même pour les états propres des opérateurs $\Lambda^\pm$, qui ne sont autres les éléments de matrices $\mathrm{D}_j^{m',m}\left(\theta,\varphi,0\right)$ des représentations du groupe des rotations**. On a annulé l'angle de rotation propre car il reste indéfini, du fait que les charges magnétique et électrique sont ponctuelles et constituent un objet d'épaisseur nulle bie'n que *chiral* car l'une des charge est scalaire et l'autre pseudo-scalaire. Et l'on a :

$$m,\, m' = -\,j, -j+1, \ldots, j-1, j\;; \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{2}, \ldots \tag{12}$$

Si on explicite les moments cinétiques $\Lambda^\pm$ en termes d'angles de rotation, on trouve que :

$$D = \frac{eg}{\hbar c} = m' \tag{13}$$

On a donc retrouvé la formule de Dirac, mais elle ne provient plus d'un arbitraire sur la phase, mais de la continuité sur les rotations, bien que les pseudo-potentiels (10) aient une ligne singulière. Contrairement à la démonstration de Dirac, qui met en avant la ligne singulière et en fait un objet mathématique central, la démonstration obtenue à partir des équations d'onde (9) gomme la discontinuité du potentiel en imposant la continuité de l'onde, et c'est de là que découle la condition (12) et la formule (13).

A vrai dire, la théorie basée sur les équations (9) est très différente de celle de Dirac et c'est la seule véritable théorie du monopôle magnétique car c'est la seule équation quantique qui retrouve automatiquement les lois de symétries de Curie qui ne sont même pas mentionnées chez les autres auteurs.

On voit que d'après (9), le rapport $\frac{eg}{\hbar c}$ est *borné par le moment cinétique* car on a, d'après (12) :

$$-j \le m' \le j \tag{14}$$

La raison est géométrique car on montre que l'ensemble des deux charges, électrique et magnétique, est animé du mouvement à la Poinsot d'une *toupie quantique symétrique* dont l'axe passe par les deux charges [7].

La projection du moment cinétique de la toupie sur son axe est égale à $m'\hbar$ et c'est cette projection qui, d'après (13), définit la charge du monopôle. Telle est donc la signification de la formule de Dirac.

3 Quelques questions sur les formules (1) et (13).

On est tenté de conclure, de la formule (1), que la charge du monopôle magnétique prend toujours l'une des valeurs de la suite :

$$g = \frac{\hbar c}{e}\frac{n}{2} = e\frac{1}{2\alpha}n = e\frac{137}{2}n \quad \left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}\right) \tag{15}$$

Avec (13) on aurait :

$$g = \frac{\hbar c}{e}m' = e\frac{1}{\alpha}m' = e137m' \tag{16}$$

Dans les deux cas, on admet généralement que e est la charge de l'électron et *on dit que la charge du monopôle magnétique est égale à un multiple (élevé) de cette charge*, puisque la charge magnétique élémentaire devrait être égale à :

$$g_0 = 137\, e \quad \left(j = n \right) \; ; \; g_0 = 68,5\ e \quad \left(j = n + \frac{1}{2} \right) \tag{17}$$

A-t-on raison de raisonner ainsi ?

1)Tout d'abord le monopôle peut interagir, par exemple, avec *un noyau de numéro atomique N quelconque*. Alors, d'après (13), on aura :

$$g = \frac{\hbar c}{Ne} m' = \frac{e}{N} \frac{1}{\alpha} m' = \frac{e}{N} 137 m' \tag{18}$$

et la charge du monopôle sera ici un sous-multiple de la charge précédente (16).

La charge magnétique élémentaire sera :

$$g_0 = \frac{137}{N} e \quad \left(j = n \right) \quad ; \quad g_0 = \frac{68,5}{N}\ e \quad \left(j = n + \frac{1}{2} \right) \tag{19}$$

Comme N est borné par le tableau de Mendeleïev, on a encore $\max |g| \geq |e|$, mais le rapport des deux charges est beaucoup plus petit qu'avant. Pour un noyau donné N, la *charge magnétique maximale* ne sera plus celle de Dirac, mais :

$$g_{\max} = 137 \frac{e}{N} j \tag{20}$$

et elle ne sera de l'ordre de (17) que pour des moments cinétiques d'ordre $j \geq N$ qui pourront être très grands et peu probables.

2) Si le monopôle se trouve au voisinage d'un essaim de charges électriques $\left\{ e_p \right\}$, un *cluster,* en restant extérieur, le raisonnement précédent restera valable et nous aurons une formule du type :

$$\frac{g \sum_p e_p}{\hbar c} = m' \tag{21}$$

Si la somme $\sum_p e_p$ est grande, la charge magnétique g pourra être très petite.

Ces exemples suggèrent que les très petites charges magnétiques, environ α^2 fois moindres que la charge de Dirac, observées par Mikhailov sur des aérosols ferromagnétiques sous éclairage intense ([12] à [17]) et, avant lui, par Ehrenhaft [9], Felber [10] et Schedling [11], *ne violent pas forcément la relation de Dirac* - contrairement à ce qu'on a cru - a condition de la considérer sous la forme générale proposée ici.

Dirac avait écrit, à propos des expériences d'Ehrenhaft : « This is not a confirmation of the present theory » [2], estimant que les expériences sur les aérosols mettaient en jeu des énergies trop faibles pour créer des monopôles du type de ceux qu'il envisageait, car il pensait que des énergies énormes étaient nécessaires pour créer des charges aussi grandes que celles qu'il prévoyait à partir de sa formule (1). Beaucoup plus tard, Mikhailov et moi avons cru, de même, que ses propres expériences sur les aérosols, de la même nature que celles d'Ehrenhaft, violaient la formule de Dirac, en raison des charges très faibles qu'il trouvait, ce qui nous laissait très perplexes, étant persuadés que cette formule était une conséquence nécessaire des lois de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique.

Bien que les formules (1) et (13) soient exactes, je pense maintenant que les conclusions qu'on en tire sont exagérées. Tout d'abord, mes équations (9) du monopôle montrent qu'on peut concevoir, à l'aide de conditions de jauge, des monopôles de masse nulle qui ne nécessitent probablement pas de grandes énergies pour être créés. Certes, on peut ne pas croire à leur existence, mais même alors, mon point de vue est à égalité avec celui de Dirac : un point de vue théorique non encore confirmé par l'expérience. Cependant, les expériences d'Urutskoiev et de ses collaborateurs ne prouvent peut-être pas absolument, mais donnent une forte présomption en faveur de ces monopôles [20].

Il faut noter, cependant, qu'intrigué à juste titre par la symétrie de sa formule par rapport à l'électricité et au magnétisme, Dirac cherchait une raison à l'abondance d'électrons dans la nature et à l'apparente pauvreté en monopôles. Il voyait l'explication dans la dissymétrie des charges, pensant qu'elle entraîne une dissymétrie de l'énergie de création des particules. Mais je pense que les équations (9) contiennent une explication de ce phénomène, sans faire appel à l'énergie. En effet, bien qu'issues de l'équation de l'électron de Dirac, ces équations en diffèrent radicalement par les lois de symétrie, puisqu'elles retrouvent ([5] – [8]) les lois de symétrie de Curie pour le magnétisme. Cette différence apparaît notamment dans les opérateurs de charge.

En effet, l'opérateur de charge d'un électron est l'opérateur unité, qui a donc deux valeurs propres égales avec, en facteur, une certaine constante de charge e. L'anti-électron (le positron) est un électron qui remonte le cours du temps, il a un opérateur de charge unité avec, en facteur, une constante de charge opposée $-e$; la possibilité de création et d'annihilation de paires électron-positron, donc de paires de charges opposées, crée une polarisation du vide, qui est limitée par l'énergie mise en jeu. Si la masse propre était nulle, la polarisation serait infinie.

Au contraire, l'opérateur de charge d'un monopôle a une constante de charge bien déterminée g, mais l'opérateur a deux valeurs propres de signes contraires $+g$ et $-g$, associées à deux états distincts : un état monopôle, associé à l'une de ces valeurs propres (disons $+g$), qui sera gauche avec une charge nord, et un état anti-monopôle avec la même valeur de la constante de charge mais la valeur propre $-g$, qui sera un monopôle droit avec une charge sud. Ces deux monopôles sont l'image l'un de l'autre dans un miroir mais ils voient, tous deux, le temps s'écouler dans le même sens. Le sens de l'écoulement du temps étant lié au signe de l'énergie, il n'y aura pas, ici, d'énergie mise en jeu, ni de phénomène de création ou d'annihilation de paires avec polarisation du vide, comme c'était le cas pour des charges électriques.

Ces lois s'expriment dans le fait que le passage du monopôle à l'anti-monopôle échange entre elles les équations (9). L'apparent changement de signe de la charge, entre ces deux équations, ne correspond pas à un changement de signe de la constante g mais seulement au passage de l'une des valeurs propres à une autre de l'opérateur de charge ([5] – [8]). Il faut noter, toutefois, qu'à un monopôle ayant une constante de charge g, il correspond un autre monopôle avec la constante opposée $-g$, *mais ils ne forment pas une paire* monopôle-antimonopôle. Ils correspondent simplement à deux valeurs différentes $+m'$ et $-m'$ dans la relation (13), autrement dit, à deux d'angles Θ et $\pi-\Theta$ de l'axe des deux charges e et g par rapport au moment cinétique. Aucun opérateur quantique ne fait passer de l'un de ces états à un autre. En fait, ce sont deux particules différentes.

Ne pouvant pas (comme pour l'électron) créer ou annihiler des paires de monopôles de charges contraires, la masse nulle (ou très petite) des monopôles ne provoquera pas de polarisation infinie du vide et nous pouvons même concevoir un éther constitué de tels monopôles des deux signes [7]. Et comme nous avons montré que ces monopôles sont des états excités du neutrino nous pouvons concevoir un éther de neutrinos dans lequel certains états excités seront magnétiquement chargés, mais en nombre égal, d'où la difficulté de les mettre en évidence. Mais ce n'est pas l'énergie qui constitue la difficulté : les expériences d'Urutskoiev ont peut-être déjà montré comment mettre de tels monopôles en évidence [20]. Surtout, fait remarquable, les expériences Mössbauer qu'il a réalisées semblent montrer que les monopôles nord et sud sont en nombre égal. Il se peut donc qu'on n'ait pas à créer de monopôles, mais qu'il suffit de mettre en évidence ceux qui nous entourent.

L'idée d'un éther omniprésent de monopôles trouve une sorte de confirmation dans le fait que j'ai pu montrer, il y a quelques années, que la théorie de champ unitaire de Marie-Antoinette Tonnelat [21], [22] basée sur la théorie neutrinienne de la lumière de de Broglie, réunit en un même système, non pas la gravitation et l'électromagnétisme habituel, comme elle l'avait cru, mais la gravitation et *le photon magnétique* [23], [24]. Ce photon d'un type nouveau est une sorte de symétrique du photon habituel (le *photon électrique*) et j'ai montré qu'il se trouvait déjà dans la théorie de la lumière de de Broglie, comme une autre option possible de la théorie. Le fait qu'il s'ensuive que le compagnon naturel du graviton est le photon magnétique (et non pas le photon électrique) s'accorde bien avec l'idée d'un éther de monopôles car c'est sous cette forme que les monopôles « voient » la lumière (la formule (2) : $\mathbf{E} = rot\,\mathbf{B}$ fait partie de cette théorie mais elle avait déjà été écrite par de Broglie en I940 [25]).

Cela étant, en revenant un instant aux expériences sur les aérosols, un mystère demeure : la valeur qu'elles ont fournie pour la charge magnétique a-t-elle une signification universelle ou est-elle liée à ce type d'expérience (c'est-à-dire à l'apparition de monopôles lors de l'irradiation d'un aérosol ferromagnétique – fer, nickel, cobalt – par un faisceau laser chez Mikhailov ou sous un éclairage à arc chez ses prédécesseurs) ? Ou peut-on encore affirmer que la formule (1) de Dirac fixe la charge d'un monopôle magnétique ? Pour ce qui est de la seconde hypothèse, la réponse semble être non. Quant à la première, il n'y a pas de réponse, puisque cette mesure de la charge est la seule que nous possédions.

En réalité, un monopôle n'est pas une particule comme les autres, non pas tant en raison des sa charge, qu'en raison de sa chiralité (dont les équations (9) sont les seules à rendre compte). C'est la chiralité du magnétisme et la non-chiralité de l'électricité qui est responsable de ce que le monopôle est la seule particule dont l'un des paramètres essentiels, sa *charge*, possède la double propriété contradictoire de se conserver, en vertu des équations du mouvement (9), et de dépendre des interactions. En effet, tantôt la charge g est une constante ordinaire, définie par l'expérience sans condition restrictive quand le monopôle interagit avec un champ magnétique, ou un champ électrique continu, tantôt cette même charge est liée à la charge électrique par les conditions (1) ou (13), pour des raisons de symétrie, quand le monopôle interagit avec une charge électrique ponctuelle : *la charge magnétique devient alors un nombre quantique*.

Ajoutons encore une question. Si nous abandonnons, pour les raisons exposées plus haut, l'idée que la rencontre d'un monopôle avec une charge électrique fixe la valeur de sa charge magnétique, que dirons-nous si le monopôle, après cette première rencontre, s'éloigne en gardant la même charge, puisqu'elle se conserve, et rencontre ensuite un autre centre coulombien loin du premier ? Je ne vois guère que trois possibilités :

1- Soit le monopôle conserve sa charge, mais alors il ne respectera plus la condition de continuité de l'onde.

2- Soit la charge subit un saut quantique vers une autre valeur, avec un changement brusque de la phase de l'onde et du moment cinétique.

3- Soit enfin, il faut résoudre un nouveau problème global, celui des la rencontre de plusieurs charges électriques successives, ce que nous réservons à un prochain travail.

Références

[1] P.A.M. Dirac, Quantised singularities in the Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc., **A 133**, 1931, p. 60.

[2] P.A.M. Dirac, The Theory of Magnetic Poles, Phys. Rev., **74**, 1948, p. 817.

[3] P.A.M. Dirac, The Monopole Concept, **17**, N°4, 1978, p. 235.

[4] P.A.M. Dirac, Directions in Physics, John Wiley & Sons, N.Y., London, Sidney, Toronto, 1978.

[5] G. Lochak, Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac, et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin 1/2, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **8**, 1983, p. 345 (I). **9**, 1984, p. 5 (II).

[6] G. Lochak, Wave equation for a magnetic monopole, IJTP, **24**, 1985, p. 1019.

[7] [G. Lochak, The Symmetry between Electricity and Magnetism and the Problem of the Existence of a Magnetic Monopole, contribution au recueil : Advanced Electromagnetism, Ed. T.W. Barrett, D.M. Grimes, World Scientific, Singapore, 1995, p. 105-148.

[8] G. Lochak, Un lepton magnétique capable d'intervenir dans les interactions faibles, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **27**, 2002, p. 727. Publié en russe dans : Prikladnaia Fisika, **3**, 2003, p. 10.

[9] F. Ehrenhaft, Phys. Zs. **31**, 1930, p. 478.

[10] J. A. Schedling, Acta Physica Austriaca, **4**, I950, p. 98.

[11] J.A. Ferber, Acta Physica Austriaca, **4**, I950, p. 133.

[12] V. F. Mikhailov, Phys. Letters, **130B**, 1983, p. 331.

[13] V. F. Mikhailov, J. Phys.A, Math. Gen., **18**, 1985, p. 903.

[14] [14] V. F. Mikhailov, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **12**, 1987, p. 491.

[15] V. F. Mikhailov, L. I. . Mikhailova, J. Phys.A, Math. Gen., **23**, 1990, p. 53.

[16] V. F. Mikhailov, , J. Phys.A, Math. Gen., **24**, 1991, p. 53.

[17] V.F. Mikhailov, Light, microparticles and magnetic charge phenomenon, in *Courants, Amers, Ecueils en Microphysique*, p. 279, Ed. Fondation Louis de Broglie, Paris, 1993.

[18] V.F. Mikhailov, Detection of a discriminating magnetic charge response to light of various polarizations, in : Advanced Electromagnetism, Ed. T.W. Barrett, D.M. Grimes, World Scientific, Singapore, 1995, p. 602-605.

[19] V. F. Mikhailov, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **23**, 1998, p. 98.

[20] L. I. Urutskoiev, V. I. Liksonov, V.G. Tsinoiev, Journal de Radio-Electronique, N°3, 2000 (Moscou) ; traduit dans : Annales de la Fondation Louis de Broglie, Observation of transformation of chemical elements during an electric discharge **27**, 2002, p.699.

[21] M.A. Tonnelat, Une nouvelle forme de théorie unitaire : étude de la particule de spin 2, Annales de Physique, **17**, 1942, p. 158.

[22] L. de Broglie, Théorie générale des particules à spin, Gauthier-Villars, Paris, 1943.

[23] G. Lochak, Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de de Broglie, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **20**, 1995, p. 111.

[24] Th. Borne, G. Lochak, H. Stumpf, Nonperturbative Quantum Field Theory and the Structure of Matter, Kluwer, Dordrecht, 2001.

[25] L. de Broglie, Une nouvelle théorie de la lumière, Hermann, Paris, I-1940, II-1942.

Manuscrit reçu le 14 octobre 2003.