

Le corps noir et la loi de Dulong et Petit

XAVIER OUDET

Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France
Laboratoire de Magnétisme et d'Optique de l'Université de Versailles
C.N.R.S., 45 Avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles, France
E-mail: Xavier.Oudet@physique.uvsq.fr

RESUME. La densité d'énergie thermique du corps noir est supposée être le reflet de la répartition statistique de l'énergie thermique des atomes du solide constituant du corps noir. Son étude part de ce fait de celle de la loi de Dulong et Petit. Le calcul de la constante de Stefan-Boltzmann donne $\sigma = 5.6265 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. La différence avec l'expérience, inférieur au pour cent, est attribuée à des pertes inhérentes à l'équilibre thermique qui définit la température du solide, pertes incluant le rayonnement thermique lui-même.

ABSTRACT. The density of thermal energy of the black-body is supposed to be the reflection of the statistical repartition of the energy of the atoms of the solid constituent of the black body. As a result its study starts from that of the Dulong and Petit law. The calculation of the Stefan-Boltzmann constant gives $\sigma = 5.6265 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. The difference with the experiment, lower to one per cent, is attributed to the losses inherent to the thermal equilibriums which defines the temperature of the solid, losses including the thermal radiation itself.

1 Introduction

Planck dans l'étude théorique du rayonnement thermique du corps noir publiée en 1900 [1], a utilisé l'approche statistique des gaz introduite par Boltzmann. De ce fait il fut en mesure de rendre compte de manière satisfaisante de la distribution expérimentale de l'énergie. En utilisant la statistique des gaz dans l'étude de l'énergie de la lumière il introduisait l'hypothèse de particules dénombrables. Il y a là une des difficultés de notre physique qui n'est pas toujours clairement réalisée. En effet à notre échelle nous avons la notion de continu, c'est-à-dire de mesures susceptibles de prendre toutes les

valeurs possibles d'un segment, d'énergie par exemple. Mais le nombre des valeurs possibles sur un segment est beaucoup plus grand que ce lui des nombres entiers, qui peuvent toujours former une suite discrète de points sur un segment donné. Par suite l'utilisation d'une statistique atomique dans l'étude du corps noir fait de la lumière un phénomène lié à l'échelle atomique, donc au dénombrable. C'est ainsi que s'introduisit, plus ou moins clairement, l'hypothèse des quanta pour la lumière, bientôt clairement reprise par Einstein dans l'interprétation de l'effet photoélectrique en 1905 [2]. Ainsi au début du vingtième siècle les chercheurs prenaient lentement conscience du processus d'émission des photons par les électrons des atomes. C'est grâce à ce processus que l'interprétation de Planck donne des résultats satisfaisants. En effet les photons sont émis par les électrons externes des atomes de la paroi du solide définissant le corps noir. Par suite les poids statistiques de l'énergie qu'ils émettent doivent être liés à ceux correspondants à l'énergie de ces atomes, hypothèse que cette étude permettra de vérifier.

Cet aspect de l'étude du corps noir est important car les photons se déplaçant dans le vide tous à la même vitesse, la répartition statistique de leur énergie relève d'un mécanisme essentiellement différent de celui qui prend place avec les atomes d'un gaz. Nous nous proposons dans cette étude, d'étendre à l'étude du corps noir l'usage de la densité de probabilité déterminée précédemment pour les gaz [3], [4]. Les photons étant émis par les atomes du solide avec lequel est construit le corps noir, il est utile de commencer cette étude par celle de la chaleur spécifique des solides à haute température qui conditionne l'énergie des photons émis.

2 La chaleur spécifique des solides à haute température

Considérons le solide qui définit les parois du corps noir. D'après la loi de Dulong et Petit sa chaleur spécifique tend vers $3k$ lorsque T tend vers l'infini. Il en résulte que l'énergie emmagasinée par le solide tend vers $3kT$. L'interprétation courante de cette loi s'appuie sur la loi de Hooke, qui exprime la proportionnalité entre les petites déformations d'un solide et les forces de rappel qui s'y opposent. On suppose qu'il y a $kT/2$ pour chaque degré de liberté. L'autre $kT/2$ est supposé venir des forces de rappel c'est-à-dire du potentiel que doit vaincre l'atome pour vibrer [5] [6] et [7]. Nous pensons que cette explication n'est pas la suffisante. En effet l'atome de gaz lui aussi doit vaincre un potentiel lorsqu'il heurte la paroi du récipient qui le contient. Il devrait par suite avoir la même chaleur spécifique que les solides à haute température. Par suite si l'on veut rendre compte de la loi de Dulong et Petit il nous faut alors comprendre comment l'énergie du solide peut tendre vers $3kT$ lorsque la température croît. Nous avons déjà souligné que les ato-

mes des solides à basse température, de part leur cohésion, forment un tout [8]. La loi de Dulong et Petit peut alors s'interpréter en supposant que, lorsque la température croît, l'orientation des atomes les uns par rapport aux autres devient progressivement désordonnée. Ce sont alors les atomes en position désordonnés qui reçoivent l'énergie thermique $3kT$. En effet supposons que l'énergie thermique emmagasinée par un atome de la paroi reste inférieure à une certaine valeur E_g . La synchronisation entre les mouvements des électrons, rend maximum l'énergie de cohésion entre les atomes. De ce fait elle tend à égaliser la répartition de cette énergie thermique entre les différents atomes pour conserver le plus possible la synchronisation c'est à dire l'ordre entre les atomes. C'est ce que montre l'étude de la chaleur spécifique des solides à basse température [8].

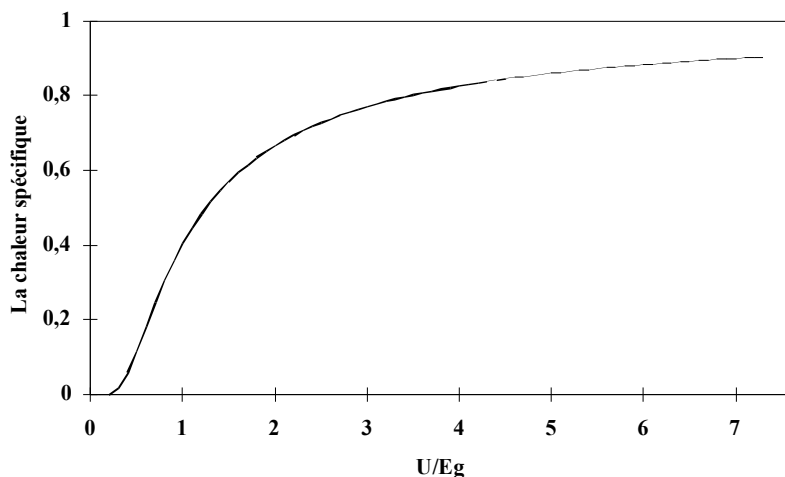


Figure 1. La fonction de probabilité donnant le caractère asymptotique de la loi Dulong et Petit pour les solides. Dans ce cas l'unité est $3k$.

Soulignons que la synchronisation est une hypothèse renforcée par l'interprétation récente de la théorie de Dirac basée sur la trajectoire de l'électron [9]. De nombreux faits d'expériences viennent la corroborer : parmi eux l'abaissement de la température d'ordre-désordre avec l'introduction d'impuretés comme la température de fusion des métaux en présence d'une faible quantité d'un autre métal. Par rapport aux électrons analogues à ceux du métal principal, ceux de l'impureté ont des périodes différentes et la syn-

chronisation disparaît entraînant une moindre cohésion et l'abaissement de la température d'ordre désordre dans ce cas la température de fusion.

Pour être en position désordonnée, un atome doit donc rompre les liaisons synchrones qu'il a avec ses voisins. L'énergie nécessaire pour rompre ces liaisons définit une barrière de potentiel E_g . Le nombre des atomes qui franchissent cette barrière est donné par la fonction de probabilité $P(E_g, U)$ calculée par ailleurs [3], [4]. Dans cette approche il faut garder présent à l'esprit que E_g décroît lorsque le nombre des atomes ordonnés décroît. Mais la fonction de probabilité $P(E_g, U)$ établie clairement le caractère asymptotique de la loi de Dulong et Petit (figure 1). Nous avons :

$$P(E_g, U) = A^{-1} \ln[1 + \exp -\alpha(E_g/U - 1)] \quad \text{avec } A = 1.7054 \text{ et } \alpha = 1.5049 \quad (2.1)$$

$$\text{Quand } U \rightarrow 0, P(E_g, U) \rightarrow 0 \quad \text{et quand } U \rightarrow \infty, P(E_g, U) \rightarrow 1 \quad (2.2)$$

Il reste maintenant à comprendre pourquoi les atomes désordonnés stockent une quantité d'énergie égale à $3kT$. A basse température les atomes d'un solide forment un tout qui les empêche de vibrer indépendamment les uns des autres. Par hypothèse lorsqu'un atome est en position désordonnée il peut vibrer, c'est-à-dire recevoir de l'énergie thermique, de manière relativement indépendante de ses voisins. Mais ce n'est pas encore un atome dans un gaz, il ne peut pas vibrer de manière égale dans toutes les directions, la présence des voisins retenus par attraction coulombienne le lui interdit. Par contre l'énergie thermique est stockée par les électrons qui tournent autour du noyau de leur atome. Un même atome peut par suite recevoir de l'énergie provenant d'une même direction mais de sens opposés. Comme l'énergie reçue dans deux directions opposées arrive nécessairement à des époques différentes cela revient à considérer que dans le solide il y a six directions ou degrés de liberté. Pour un atome de gaz au contraire il ne peut recevoir de l'énergie que dans une seule direction. Ainsi si les forces de rappel sont bien à l'origine pour les solides de leur chaleur spécifique double de celle des gaz monoatomique, cela vient de leur possibilité de recevoir de l'énergie de deux sens opposés.

3 Le photon et le désordre dans les solides

Lorsque le photon est émis, il se propage avec la vitesse $c(\nu)$. Nous supposons par hypothèse qu'il se décrit comme un paquet d'énergie, constituée de grains comme le potentiel [9] dans lequel gravitent les électrons mais de

masse équivalente beaucoup plus faible que celle de l'électron. Par ailleurs nous verrons que les photons sont en très petit nombre dans le volume du corps noir. Cet aspect du phénomène conduit à supposer qu'ils n'interagissent pas entre eux directement mais que la densité recherchée est le reflet de la répartition statistique de l'énergie thermique des atomes du solide constituant du corps noir. Puisque la loi de Dulong et Petit est indépendante de la nature du corps considéré il en sera de même pour les lois caractéristiques du corps noir. Elles ne dépendront que de la température propriété essentielle du rayonnement thermique du corps noir.

Considérons un atome qui possède une énergie thermique E supérieur à E_g . Il occupe par suite une position désordonnée qui lui permet de prendre de ce fait un mouvement périodique asynchrone par rapport à ceux des atomes voisins. La période du mouvement est définie par la relation $ET = h$ où h est la constante de Planck. Lorsque l'atome retourne à son état ordonné nous supposons par hypothèse qu'il émet un photon ayant même période que celle du mouvement de l'atome. Ce point est important car il permet le calcul de la densité d'énergie du rayonnement du corps noir. En effet pour l'atome son mouvement périodique le conduit à s'écarter ou se rapprocher de ses voisins. S'il émet le photon correspondant à E les mouvements homologues des atomes voisins seront perturbés. Nous supposons que c'est une telle perturbation qui provoque l'émission stimulée.

4 La densité d'énergie par unité de volume et de fréquence

L'étude du corps noir est celle du nombre de photons susceptibles d'être reçus sur une surface ds pendant un temps donné dt . La vitesse de la lumière étant c , pendant le temps dt les photons parcourent une distance cdt . Le nombre de photons reçus conduit par suite à définir la densité d'énergie par unité de volume. L'usage et les conditions historique de l'étude du corps noir ont conduit à définir cette densité $u(\nu)$ par unité de volume et par unité de fréquence. En sommant sur toutes les fréquences on définit u la densité totale d'énergie.

Le calcul de la densité d'énergie par unité de volume se décompose en plusieurs facteurs associés à la fréquence ν du photon. Ces facteurs sont : le poids statistique dans le voisinage d'un segment d'énergie, le volume V_c associé à l'émission d'un photon dont l'origine est discuté ci-dessous et le nombre N de photons pouvant occuper ce volume. Reste en suite à intégrer sur l'ensemble des fréquences.

Le poids statistique. Pour calculer la densité d'énergie u par unité de volume du corps noir, il nous faut partir de la fonction de distribution de l'énergie thermique pour un solide. D'après l'étude de la chaleur spécifique

des solides seuls les atomes en position désordonnée ont une énergie suffisante pour émettre des photons. Leur énergie moyenne est alors $3kT$. Ils forment en quelque sorte un ensemble d'atomes indépendants donc sans aucune propriété quantique particulière susceptible de modifier leurs propriétés statistiques comme cela est supposé pour les photons et les électrons également appelés bosons ou fermions [10]. Cet aspect montre que la distribution statistique de l'énergie thermique à utiliser est la même que celle des atomes d'un gaz. L'énergie des photons qu'ils émettent est celle qui dépasse la barrière de potentiel E_g qu'ils franchissent pour être en position désordonnée. Elle peut varier entre zéro et l'infini. Soit $D(E,U)$ la fonction de distribution de l'énergie thermique E de ces atomes indépendants, la valeur moyenne de cette énergie étant U . Ces atomes étant indépendants leur énergie obéit à la même loi de distribution que celle des atomes du gaz parfait.

Considérons alors le segment d'énergie:

$$h\nu \leq E \leq h(\nu + d\nu) \quad (4.1)$$

La probabilité pour un atome indépendant d'avoir une énergie comprise sur ce segment, soit en d'autres termes le poids statistique du segment, est donnée par [3] et [4] :

$$D(h\nu, U)h d\nu = \frac{\alpha}{AU} \frac{h d\nu}{1 + \exp\left(\frac{h\nu}{U} - 1\right)} \quad (4.2)$$

$$\text{avec } A = 1.7054 \text{ et } \alpha = 1.5049$$

La probabilité d'avoir un photon émis avec cette fréquence sur la largeur $h d\nu$ est donc proportionnelle à $D(h\nu, U)h d\nu$. Toutefois les photons pour contribuer à la densité $u(\nu)$ doivent être émis vers le volume du corps noir. Pour une direction il n'y en a qu'un sur deux. L'autre est émis vers l'intérieur du solide au lieu d'être émis vers sa surface. Par ailleurs il y a dans l'espace trois directions indépendantes, il faut donc diviser le poids statistique $D(h\nu, U)h d\nu$ par huit soit 2^3 . La probabilité d'émission correspondante $P(\nu)$ est donc

$$P(\nu) = 2^{-3} D(h\nu, U)h d\nu \quad (4.3)$$

Le volume d'émission. Considérons les interférences obtenues avec de la lumière monochromatique après avoir traversée les trous d'Young. Pour obtenir les interférences les deux trous doivent être éclairés par une source ponctuelle, les deux sources ainsi obtenues sont alors dites cohérentes, c'est-à-dire que les propriétés de phase des photons dans les deux faisceaux sont liées. Dans l'approche corpusculaire nous exprimerons cette propriété en disant que les deux sources émettent des trains de photons cohérents, c'est à dire distants de multiples entiers de la longueur d'onde λ des photons. Par ailleurs les dimensions du corps noir sont souvent de l'ordre du centimètre. Nous pouvons en déduire que chaque train de photons est constamment absorbé et émis à nouveau tout en conservant ses propriétés de cohérence. Il s'en suit pour le photon, pour chaque degré liberté de l'émission, un volume d'occupation V_c associé à l'émission, proportionnel à la sphère de rayon $R = \lambda = c\tau = c/v$ dans lequel aucun autre photon ne peut avoir été émis pour la direction d'émission considérée.

$$\text{Soit :} \quad V_c = \frac{4\pi}{3} c^3 \tau^3 \quad (4.4)$$

Les longueurs dans ce type de rayonnement sont de l'ordre du millier d'angströms devant des dimensions atomiques de l'ordre de l'angström. Il en résulte un très faible nombre de photons par unité de volume comparé à celui des atomes désordonnés du solide. La densité spectrale $u(\nu)$ est par suite inversement proportionnelles à V_c . Par ailleurs les photons émis sont le reflet de la densité d'énergie thermique des atomes en position désordonnée du solide définissant le corps noir. Comme nous l'avons vu ces atomes désordonnés ont six degrés de libertés, de ce fait si la densité totale u d'énergie est inversement proportionnelle à V_c , elle est par contre proportionnel aux six degrés de liberté. Il apparaît ainsi un facteur 6 représentant le nombre N des photons associés à V_c et à la probabilité $D(h\nu, U)h d\nu$.

La densité spectrale. Considérons maintenant le segment dont l'énergie est définie par la relation (4.1). Sur ce segment l'énergie des photons peut être prise égale à $h\nu$. L'énergie émise correspondante est $h\nu D(h\nu, U)h d\nu$. Pour la fréquence ν , compte tenu de la probabilité d'émission $P(\nu)$ donnée par (4.3), la densité d'énergie $u(\nu)$ pour une largeur en fréquence $d\nu$ est donnée par la relation :

$$u(\nu)d\nu = \frac{6}{V_c} \frac{h\nu}{8} D(h\nu, U)h d\nu = \frac{9}{2^4 \pi} \frac{\nu^4}{c^3} D(h\nu, U)h^2 d\nu \quad (4.5)$$

Il vient :

$$u(\nu)d\nu = \frac{\alpha}{AU} \frac{9}{2^4 \pi c^3} \frac{\nu^4 h^2 d\nu}{1 + \exp\alpha\left(\frac{h\nu}{U} - 1\right)} \quad (4.6)$$

Effectuons le changement de variable $h\nu = xU$ la relation (4.6) s'écrit :

$$u(\nu)d\nu = \frac{9U^4}{2^4 \pi c^3 h^3} x^4 D(x) dx \quad (4.7)$$

avec

$$D(x) = \frac{\alpha}{A} [1 + \exp\alpha(x-1)]^{-1} \quad (4.8)$$

Par intégration entre zéro et l'infini, la densité totale d'énergie u s'écrit :

$$u = \frac{9U^4}{2^4 \pi c^3 h^3} J_4 \quad (4.9)$$

Avec :

$$J_4 = \int_0^\infty x^4 D(x) dx \quad (4.10)$$

Le calcul donne :

$$J_4 = 11,17$$

Avec $U = 3kT$ il vient :

$$u = \frac{3^6 J_4}{2^4 \pi c^3 h^3} k^4 T^4 \quad (4.11)$$

5 La constante de Stefan-Boltzmann.

L'étude du corps noir conduit à mesurer le flux total d'énergie W par seconde. Il est donné par la relation $W = cu/4$. Il vient :

$$W = \frac{3^6}{2^6 \pi} J_4 \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4 \quad (5.1)$$

C'est la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\sigma = 40,486 \frac{k^4}{c^2 h^3} = 5.6265 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (5.2)$$

L'approche de Planck donne :

$$\sigma(\text{Planck}) = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} = 5.6705 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (5.3)$$

L'expérience donne $\sigma(\text{Exp}) = (5.66967 \pm 0.00076) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

La valeur de la constante de Stefan-Boltzmann calculée à partir de la relation (5.2) donne un écart de moins de 1% par rapport à l'expérience [11] et [12]. Cet écart est faible mais malgré tout important par rapport à la précision des expériences. Il nous a conduit à reprendre notre travail en statistique [3] et [4], ce que nous discutons dans le paragraphe suivant.

6 Discussion

L'étude statistique de la distribution de l'énergie thermique [3], [4], part de la remarque suivante : la somme des d'énergie des particules du système divisée par leur nombre, doit être égale à la valeur moyenne U par particule de cette énergie. La détermination actuelle, pour respecter cette condition, utilise la méthode de Boltzmann qui suppose que l'entropie du système est proportionnelle au logarithme du poids statistique W de la distribution la plus probable. Cette hypothèse est introduite sous forme différentielle avec la relation : $dS = k \ln W$, hypothèse que nous avons remplacée par la relation intégrale :

$$\int_0^\infty ED(E,U)dE = U \quad (6.1)$$

Pour résoudre le problème statistique nous avons supposé que le maximum du poids statistique $W(E)$ associé à un petit segment d'énergie autour de

la valeur E est obtenu pour la valeur moyenne U . Cette hypothèse est une approximation généralement suffisante, toutefois pour des expériences de grande précision elle s'avère insuffisante [13].

Considérons en effet un système de particules, ici les atomes du solide du corps noir qui émettent les photons. Il est en équilibre avec le thermostat qui permet de maintenir stable la température avec la précision voulue. Tout système de particules est sujet à des pertes d'énergie thermique. En particulier, parmi elles, les photons du rayonnement thermique dont l'énergie est empruntée au solide et qui participe à la distribution de celle du solide comme le montre cette étude. Pour la faible fraction qui sert à la mesure et sort de ce fait du corps noir lui-même il semble raisonnable de la considérer comme négligeable ou qu'il est possible d'évaluer.

Pour le reste du flux il est réabsorbé par le corps noir lui-même et on pourrait croire que les pertes de ce fait sont également négligeables. Ce n'est semble-t-il pas tout à fait exacte. Les photons une fois émis deviennent des sources de perturbations pour le corps noir. Lorsqu'ils sont réabsorbés ils constituent une nouvelle quantité d'énergie qui pendant un certain temps modifient les probabilités et n'obéit pas aux mêmes règles d'équilibre et d'échanges entre les atomes. En quelque sorte cette énergie est ignorée pendant une durée certes courte mais suffisante pour modifier l'équilibre thermique. De ce fait les photons émis et réabsorbés constituent des pertes pendant une certaine durée. Il en résulte un flux d'énergie depuis le thermostat vers le système de particules. Ce flux a pour effet de déplacer vers une valeur M légèrement supérieurs à U le maximum du poids statistique $W(E)$. Cette valeur M remplace U dans l'expression de $D(h\nu, U)$ donnée en (4.2). C'est par suite M qui remplace U dans les calculs qui conduisent à l'expression de la constante de Stefan-Boltzmann.

Soit alors ε un nombre positif sans dimension supposé petit, il vient $M = U(1+\varepsilon)$ et la relation (5.1) devient :

$$W = \frac{3^6}{2^6 \pi} J_4 \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4 (1+\varepsilon)^4 \quad (6.2)$$

Pour retrouver la valeur expérimental de σ il faut prendre $\varepsilon = 0.0019$.

Notons par ailleurs que les valeurs de σ publiées jusqu'ici [12], [14] et [15] sont toutes supérieures à la valeur théorique donnée par la relation (5.1), voir en particulier la figure 38 de Quinn et Martin [12] reproduite sur la fi-

Figure 2. Ce qui confirme le sens de la relation (6.2) : l'expérience ne peut donner que des valeurs supérieures à celle de la relation (5.1).

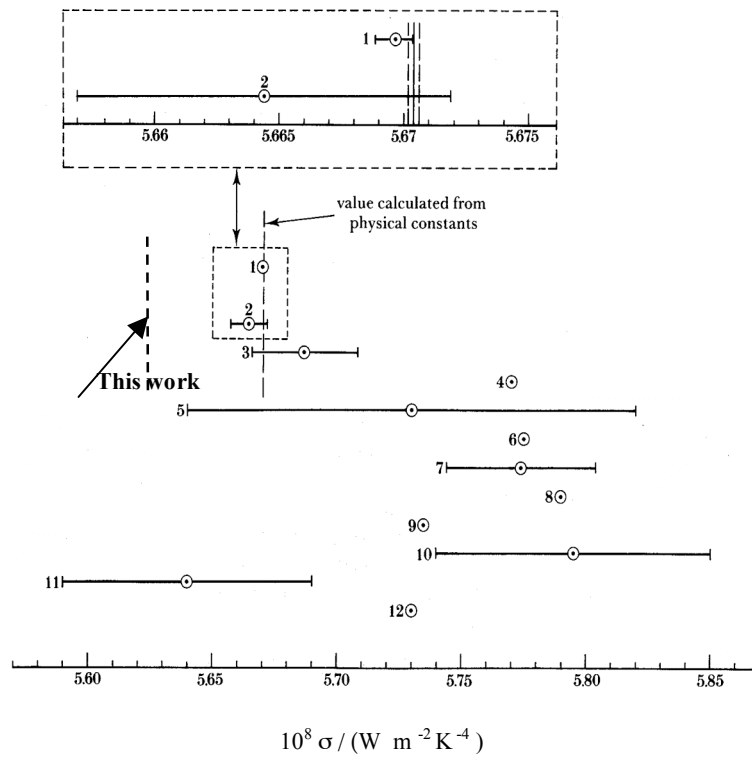


Figure 2. La figure 38 de Quinn et Martin donnant les valeurs expérimentales de la constante de Stefan-Boltzmann obtenues depuis 1921. Les barres d'erreurs correspondent aux estimations des auteurs. La flèche indiquant : value calculated from physical constants correspond à l'approche de Planck, l'autre flèche : this work donne la position de la valeur correspondant à ce travail. Pour les références des travaux effectués avant 1971, voir Blevin & Brown [15]. (1) Quinn & Martin (1988) $(5.66967 \pm 0.00076) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$; (2) Blevin & Brown (1971), $(5.6644 \pm 0.0075) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$; (3) Kendal (1968); (4) Gilham (1968); (5) Faure (1965); (6) Eppley & Karoli (1957); (7) Muller (1933); (8) Mendenhall (1929); (10) Kausmann (1924).

En conclusion nous savons que la température est une variable macroscopique qui dans des expériences précises reste une variable bien définie. Nous pouvons poser $M = 3kT_{\text{eff}}$, la température mesurée ou effective est T_{eff} . Cette température mesurée inclut le flux d'énergie nécessaire pour compenser les pertes. Elle est toujours supérieure à la température définie à partir de la loi des gaz parfaits $PV = RT$ qui permet de définir l'énergie moyenne d'un gaz monoatomique par $U = 3kT/2$ ou celle d'un solide par $U = 3kT$ valeurs utilisées pour déterminer la distribution statistique de l'énergie des ensembles correspondants.

Remerciements : Durant la préparation de ce travail j'ai discuté avec le Professeur Michel Karatchentzeff, le Docteur Michael Stock responsable des projets spéciaux au Bureau International des Poids et Mesures et le Professeur François Varret directeur du laboratoire de Magnétisme et d'Optique de l'Université de Versailles. Ils font des remarques importantes et m'ont donné des conseils précieux, je suis heureux de les en remercier.

Références

- [1] Brush S., "Statistical Physics and the Atomic Theory of Matter, From Boyle and Newton to Landau and Onsager" Princeton University Press, (1983), Library of Congress Cataloging in Publication Data.
- [2] Einstein A., Ann. Phys., Ser. 4, 17, 132-148, (1905).
- [3] Oudet X., Annales de la Fondation Louis de Broglie, 12, 11-27, (1987)
- [4] Oudet X., in "Theoretical and experimental approaches to high- T_c and conventional superconductivity", Proceedings of the T.I.F.R. Winter School (Dec. 1989- Jan. 1990), Edited by Professor L.C. Gupta, Nova Science Publishers, Inc. 87-100, (1991).
- [5] Fleury P. et Mathieux J.-P., Chaleur Thermodynamique Etat de la Matière, pages 261-262, 3^{ième} Edition, Eyrolles (1961).
- [6] Seitz F., Théorie Moderne des Solides, page 111, Masson et Cie, Editeurs (1949).
- [7] Kittel C., Introduction a la Physique de l'Etat Solide, page 117, Dunod (1958).
- [8] Oudet X., "Specific heat of the solids to low temperature" Annales de la Fondation Louis de Broglie (2001) <http://www.ensmp.fr/aflb/AFLB-261/aflb261p039-e.pdf>
- [9] Oudet X., Annales de la Fondation Louis de Broglie, 29, 493-512, (2004) <http://www.ensmp.fr/aflb/AFLB-293/table293.htm>

- [10] Bruhat G., Cours de Physique générale, Thermodynamique, cinquième édition remaniée par Kastler A. avec la collaboration de Vichienvsky, Masson & Cie, (1962).
- [11] Mohr P. J. and Taylor B. N., CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998, <http://physics.nist.gov/constants>
- [12] Quinn T.J. and Martin J.E., Philos. Trans. R. Soc. London A 316, 85-189, (1985).
- [13] Oudet X., Perturbations and Statistical Distribution of the Thermal Energy, to appear in (2005).
- [14] Rutgers G.A.W., in Encyclopedia of Physics, edited by Flügge S., pages 128-170. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (1958). See section 13 page 139-140.
- [15] Blewin W.R. and Brown W.J., Metrologia, 7, 15-29, (1971).

Reçu le 17 juin 2004, modifié le 20 octobre 2004.