Equation d'onde relativiste linéaire du second ordre pour un monopôle magnétique et ses solutions dans le cas coulombien

Claude Daviau

La Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
email : daviau.claude@wanadoo.fr
Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France

RÉSUMÉ. Une équation d'onde linéaire du second ordre est proposée pour les monopôles magnétiques. Une résolution complète par séparation des variables est effectuée dans le cas d'un pseudo-potentiel coulombien. Les niveaux d'énergie des états liés sont ceux de la formule de Sommerfeld, mais le nombre des états liés diffère de celui de l'atome d'hydrogène. Puis on discute la formule de Dirac donnant la charge des monopôles.

ABSTRACT. A second-order linear wave equation is proposed for magnetic monopoles. Separing variables, a complete resolution is made in the case of a Coulombian pseudo-potential. Energy levels of linked states are given by the Sommerfeld's formula, but the number of independent states is not the same as with the H atom. Next we discuss the Dirac's formula for magnetic charges.

1 - La théorie du monopôle de G. Lochak

G. Lochak a remarqué qu'il existait non pas une seule, mais deux invariances de jauge possibles à partir de l'équation de Dirac [1]. La première est la jauge électrique liée à la phase de l'onde. La seconde est liée à l'angle d'Yvon-Takabayasi, elle n'est complète que si le terme de masse est nul ou remplacé par un terme non linéaire. Elle a été interprétée par G. Lochak comme jauge magnétique permettant d'obtenir des équations d'onde de monopôle magnétique.

On écrira ici les équations d'onde en utilisant, non pas le formalisme initial de la théorie de Dirac, mais l'algèbre de Clifford de l'espace physique, qui a l'avantage de donner des notations nettement plus simples, et qui comporte une conjugaison liée à la transformation dite de parité.

Avec ce formalisme, l'équation de Dirac s'écrit [2]

$$\nabla\widehat{\phi}\sigma_{12} = m\phi + qA\widehat{\phi} \tag{1}$$

où $q = \frac{e}{\hbar c}$, $m = \frac{m_0 c}{\hbar}$, avec $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$ et

$$\phi = a_1 + a_2\sigma_{32} + a_3\sigma_{31} + a_4\sigma_{12} + a_5\sigma_{123} + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3 \tag{2}$$

$$\widehat{\phi} = a_1 + a_2\sigma_{32} + a_3\sigma_{31} + a_4\sigma_{12} - a_5\sigma_{123} - a_6\sigma_1 - a_7\sigma_2 - a_8\sigma_3 \tag{3}$$

$$\nabla = \partial_0 - \vec{\partial}, \qquad \vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3\,, \tag{4}$$

$$A = A^0 + \vec{A}, \qquad \vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3 \tag{5}$$

Avec ce même formalisme, les équations d'onde linéaires de monopôles s'écrivent

$$(\nabla - iqB)\xi = 0 \tag{6}$$

$$(\widehat{\nabla} + iq\widehat{B})\eta = 0 \tag{7}$$

où ξ et η sont les spineurs droit et gauche de Weyl, où $q = \frac{g}{\hbar c}$, et où

$$\widehat{\nabla} = \partial_0 + \vec{\partial} \tag{8}$$

$$\widehat{B} = B^0 - \vec{B} \tag{9}$$

Contrairement à l'équation d'onde (1) de l'électron, qui comporte un terme de masse, les équations d'onde (6) et (7) ne peuvent pas en comporter, car le terme de masse de l'équation de Dirac relie les termes en ξ et en η, qui tournent en sens contraire dans la jauge magnétique. B est, non pas un vecteur d'espace-temps comme A, mais un pseudo-vecteur, c'est-à-dire un tenseur antisymétrique de rang 3, qu'on appelle ici pseudo-potentiel magnétique. G. Lochak a mis en évidence le caractère chiral des ondes de monopôles, qui sont soit des ondes gauches η, soit des ondes droites ξ. Avec la représentation matricielle usuelle des matrices de Pauli, on a :

$$\phi_L := \phi\frac{1}{2}(1 - \sigma_3) = \sqrt{2}(0 \;\; \sigma_{13}\eta^*)\ ; \quad \widehat{\phi_L} = \sqrt{2}(\eta \;\; 0) \tag{10}$$

$$\phi_R := \phi\frac{1}{2}(1 + \sigma_3) = \sqrt{2}(\xi \;\; 0)\ ; \quad \widehat{\phi_R} = \sqrt{2}(0 \;\; \sigma_{13}\xi^*) \tag{11}$$

donc ξ est, à un facteur $\sqrt{2}$ près, la colonne de gauche de ϕ_R et η est la colonne de gauche de $\widehat{\phi_L}$, la colonne de droite étant nulle, de sorte que les équations de monopôles (6) et (7) peuvent être mises sous la forme

$$(\nabla - iqB)\phi_R = 0 \tag{12}$$

$$(\widehat{\nabla} + iq\widehat{B})\widehat{\phi_L} = 0 \tag{13}$$

2 - Equations du second ordre

Pour obtenir l'équation d'onde du second ordre qui découle de l'équation de Dirac, il est commode d'utiliser la conjugaison $\hat{}$ qui vérifie $\widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$ et nous donne :

$$\widehat{\phi} = \frac{1}{m}\widehat{\nabla}\phi\sigma_{12} - \frac{q}{m}\widehat{A}\phi \tag{14}$$

donc on obtient

$$\nabla(\frac{1}{m}\widehat{\nabla}\phi\sigma_{12} - \frac{q}{m}\widehat{A}\phi)\sigma_{12} = m\phi + qA(\frac{1}{m}\widehat{\nabla}\phi\sigma_{12} - \frac{q}{m}\widehat{A}\phi) \tag{15}$$

$$-\nabla\widehat{\nabla}\phi - q\nabla(\widehat{A}\phi)\sigma_{12} = m^2\phi + qA\widehat{\nabla}\phi\sigma_{12} - q^2A\widehat{A}\phi \tag{16}$$

Or le dalembertien est $\Box = \nabla\widehat{\nabla}$, le carré scalaire du vecteur A est $A^2 = A\widehat{A}$. En outre on a

$$\nabla(\widehat{A}\phi) = (\nabla\widehat{A})\phi + 2A^\mu\partial_\mu\phi - A\widehat{\nabla}\phi \tag{17}$$

L'équation du second ordre issue de l'équation de Dirac est donc

$$0 = (\Box + m^2 - q^2A^2)\phi + q(\nabla\widehat{A})\phi\sigma_{12} + 2qA^\mu\partial_\mu\phi\sigma_{12} \tag{18}$$

Les équations des monopôles (12) et (13) nous donnent quant à elles

$$\nabla\phi_R = iqB\phi_R \ ; \quad \widehat{\nabla}\widehat{\phi_R} = -iq\widehat{B}\widehat{\phi_R} \tag{19}$$

$$\widehat{\nabla}\widehat{\phi_L} = -iq\widehat{B}\widehat{\phi_L} \ ; \quad \nabla\phi_L = iqB\phi_L \tag{20}$$

donc on obtient au second ordre

$$\begin{aligned}\Box\phi_R &= \widehat{\nabla}\nabla\phi_R = \widehat{\nabla}(iqB\phi_R) = iq\widehat{\nabla}(B\phi_R)\\ &= iq[(\widehat{\nabla}B)\phi_R + 2B^\mu\partial_\mu\phi_R - \widehat{B}\nabla\phi_R]\\ &= iq[(\widehat{\nabla}B)\phi_R + 2B^\mu\partial_\mu\phi_R - \widehat{B}(iqB\phi_R)]\\ (\Box - q^2B^2)\phi_R &= iq(\widehat{\nabla}B)\phi_R + 2iqB^\mu\partial_\mu\phi_R \end{aligned} \tag{21}$$

tandis que pour l'onde gauche le même calcul donne

$$(\square - q^2B^2)\widehat{\phi_L} = -iq(\nabla\widehat{B})\widehat{\phi_L} - 2iqB^\mu\partial_\mu\widehat{\phi_L} \tag{22}$$

On peut voir qu'il y a une ressemblance étroite entre les équations (18), (21) et (22), ce qui ne saurait étonner puisque ces trois équations sont issues de la même équation d'onde du premier ordre.

Mais une autre remarque peut être faite sur l'équation du second ordre (18), à savoir que contrairement à l'équation du premier ordre, elle ne mixe plus des termes en ϕ avec des termes en $\widehat{\phi}$, et par conséquent cette équation peut être séparée entre une équation pour sa partie gauche ϕ_L et une équation pour sa partie droite ϕ_R. Il suffit pour cela de multiplier à droite par les projecteurs $\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)$ et l'on obtient le système suivant, équivalent à (18) :

$$\begin{aligned}(\square + m^2 - q^2A^2)\phi_L &= -q(\nabla\widehat{A})\phi_L\sigma_{12} - 2qA^\mu\partial_\mu\phi_L\sigma_{12}\\ (\square + m^2 - q^2A^2)\phi_R &= -q(\nabla\widehat{A})\phi_R\sigma_{12} - 2qA^\mu\partial_\mu\phi_R\sigma_{12}\end{aligned} \tag{23}$$

En outre on a les identités

$$\begin{aligned}&\phi_L\sigma_3 = -\phi_L \ ; \quad \phi_L\sigma_{12} = -i\phi_L\\ &\phi_R\sigma_3 = \phi_R \ ; \quad \phi_R\sigma_{12} = i\phi_R\end{aligned} \tag{24}$$

donc le système (23) est équivalent à

$$(\square + m^2 - q^2A^2)\widehat{\phi_L} = -iq(\widehat{\nabla}A)\widehat{\phi_L} - 2iqA^\mu\partial_\mu\widehat{\phi_L} \tag{25}$$

$$(\square + m^2 - q^2A^2)\phi_R = -iq(\nabla\widehat{A})\phi_R - 2iqA^\mu\partial_\mu\phi_R \tag{26}$$

La comparaison entre les équations (21) et (22) des monopôles gauches et droits, et les équations (25) et (26) qui sont les équations d'onde des parties gauches et droites de l'onde de l'électron, suggère la possibilité d'ajouter un terme de masse aux équations (21) et (22). On propose donc ici comme équation d'onde pour les monopôles :

$$(\square + m^2 - q^2B^2)\phi_R = iq(\widehat{\nabla}B)\phi_R + 2iqB^\mu\partial_\mu\phi_R \tag{27}$$

$$(\square + m^2 - q^2B^2)\widehat{\phi_L} = -iq(\nabla\widehat{B})\widehat{\phi_L} - 2iqB^\mu\partial_\mu\widehat{\phi_L} \tag{28}$$

ce qui équivaut, en utilisant les spineurs de Weyl, à

$$(\square + m^2 - q^2B^2)\xi = iq(\widehat{\nabla}B)\xi + 2iqB^\mu\partial_\mu\xi \tag{29}$$

$$(\square + m^2 - q^2B^2)\eta = -iq(\nabla\widehat{B})\eta - 2iqB^\mu\partial_\mu\eta \tag{30}$$

Ces équations d'onde du second ordre étant issues d'équations relativistes et invariantes de jauge sont également relativistes et invariantes de jauge. Il s'agit bien sûr non de la jauge électrique, mais de la jauge magnétique :

$$\begin{aligned} B &\mapsto B + \nabla a \ ; \quad \xi \mapsto e^{iqa}\xi \\ \widehat{B} &\mapsto \widehat{B} + \widehat{\nabla} a \ ; \quad \eta \mapsto e^{-iqa}\eta \end{aligned} \tag{31}$$

Comme l'équation de Dirac donne avec une excellente précision, à l'effet Lamb près, les niveaux d'énergie d'un électron tournant autour d'un proton, nous allons chercher ce que donnent nos équations avec terme de masse dans le cas similaire d'un monopôle léger de charge magnétique q tournant autour d'un monopôle lourd de charge magnétique -q. Comme les deux équations ne diffèrent que par le remplacement de $\widehat{\nabla} B$ par $\nabla \widehat{B}$ et de i par -i, il suffit de résoudre l'une des équations puis de transposer les résultats à l'autre.

3 - Résolution dans le cas coulombien

On utilise ici la méthode de séparation des variables obtenue par H. Krüger pour l'atome d'hydrogène [3]. En coordonnées sphériques

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi \ ; \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi \ ; \quad x^3 = r\cos\theta \tag{32}$$

on utilise

$$i_1 := \sigma_{23} = i\sigma_1 \ ; \quad i_2 := \sigma_{31} = i\sigma_2 \ ; \quad i_3 := \sigma_{12} = i\sigma_3 \tag{33}$$

$$\vec{r} := x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \tag{34}$$

$$S := e^{-\frac{\varphi}{2}i_3} e^{-\frac{\theta}{2}i_2} \tag{35}$$

$$\Omega := r^{-1}(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}} S \tag{36}$$

$$\vec{\partial}' := \sigma_3\partial_r + \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2\partial_\varphi \tag{37}$$

H. Krüger a obtenu :

$$\Omega^{-1}\vec{\partial} = \vec{\partial}'\Omega^{-1} \tag{38}$$

qui donne au second ordre

$$\Omega^{-1}\Box = (\partial_0\partial_0 - \vec{\partial}'\vec{\partial}')\Omega^{-1} \tag{39}$$

Par ailleurs dans le cas coulombien d'un pseudo-potentiel fixe en $\frac{1}{r}$ nous avons

$$qB_0 = -\frac{\alpha'}{r} \quad ; \quad \vec{B} = 0 \tag{40}$$

où α' est l'équivalent pour le magnétisme de la constante de structure fine α pour l'électricité. On a donc

$$\begin{aligned} q\nabla\widehat{B} &= \nabla(-\frac{\alpha'}{r}) = \alpha'\vec{\partial}(\frac{1}{r}) \\ q\widehat{\nabla}B &= \widehat{\nabla}(-\frac{\alpha'}{r}) = -\alpha'\vec{\partial}(\frac{1}{r}) \\ qB^\mu\partial_\mu &= qB^0\partial_0 = -\frac{\alpha'}{r}\partial_0 \end{aligned} \tag{41}$$

de sorte que les équations d'onde avec terme de masse (29) et (30) deviennent

$$(\Box + m^2 - \frac{\alpha'^2}{r^2})\xi = -i\alpha'\vec{\partial}(\frac{1}{r})\xi - 2i\frac{\alpha'}{r}\partial_0\xi \tag{42}$$

$$(\Box + m^2 - \frac{\alpha'^2}{r^2})\eta = -i\alpha'\vec{\partial}(\frac{1}{r})\eta + 2i\frac{\alpha'}{r}\partial_0\eta \tag{43}$$

Nous allons commencer par cette dernière équation, que nous multiplions par Ω^{-1} à gauche

$$\Omega^{-1}(\Box + m^2 - \frac{\alpha'^2}{r^2})\eta = -i\alpha'\Omega^{-1}\vec{\partial}(\frac{1}{r})\eta + 2i\frac{\alpha'}{r}\Omega^{-1}\partial_0\eta \tag{44}$$

Or on a

$$\Omega^{-1}\vec{\partial}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}\sigma_3\Omega^{-1} \tag{45}$$

L'équation (43) nous donne donc

$$[\partial_0\partial_0 - \vec{\partial}'\vec{\partial}' + m^2 - \frac{\alpha'^2}{r^2})]\Omega^{-1}\eta = i\frac{\alpha'}{r^2}\sigma_3\Omega^{-1}\eta + 2i\frac{\alpha'}{r}\partial_0\Omega^{-1}\eta \tag{46}$$

tandis que l'équation (42) donne

$$[\partial_0\partial_0 - \vec{\partial}'\vec{\partial}' + m^2 - \frac{\alpha'^2}{r^2})]\Omega^{-1}\xi = i\frac{\alpha'}{r^2}\sigma_3\Omega^{-1}\xi - 2i\frac{\alpha'}{r}\partial_0\Omega^{-1}\xi \tag{47}$$

Pour séparer les variables φ et $x^0 = ct$ des variables r et θ, on pose maintenant

$$\Omega^{-1}\eta := e^{i(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)}H \tag{48}$$

où λ, δ et E sont des constantes, et où H est fonction seulement de r et θ. On a alors

$$\partial_0(\Omega^{-1}\eta) = -iEe^{i(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)}H \tag{49}$$

$$\partial_0\partial_0(\Omega^{-1}\eta) = -E^2e^{i(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)}H \tag{50}$$

$$\partial_\varphi(\Omega^{-1}\eta) = i\lambda e^{i(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)}H \tag{51}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned}\vec{\partial}'\vec{\partial}'(\Omega^{-1}\eta) &= e^{i(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)}\Delta' H\\ \Delta' H =&\partial_r\partial_r H + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\partial_\theta H - \frac{\lambda^2}{r^2\sin^2\theta}H - \frac{1}{r^2}\sigma_{31}\partial_\theta H\\ &- i\frac{\lambda}{r^2\sin\theta}\sigma_{32}H - i\frac{\lambda}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\sigma_{12}H\end{aligned} \tag{52}$$

Donc en multipliant par $e^{-i(\lambda\varphi+\delta-Ex^0)}$ on obtient une équation en r et θ :

$$\begin{aligned}0 =&(E^2 + \frac{2\alpha' E}{r} + \frac{\alpha'^2}{r^2} - m^2)H + i\frac{\alpha'}{r^2}\sigma_3 H + \partial_r\partial_r H + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\partial_\theta H\\ &- \frac{\lambda^2}{r^2\sin^2\theta}H - \frac{1}{r^2}\sigma_{31}\partial_\theta H - i\frac{\lambda}{r^2\sin\theta}\sigma_{32}H - i\frac{\lambda}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\sigma_{12}H\end{aligned} \tag{53}$$

H étant un spineur de Weyl à deux composantes complexes, on pose :

$$H := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Or on a

$$\begin{aligned} i\sigma_3 H &= \begin{pmatrix} iz_1 \\ -iz_2 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_{31}H = \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix}\\ \sigma_{32}H &= \begin{pmatrix} -iz_2 \\ -iz_1 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_{12}H = \begin{pmatrix} iz_1 \\ -iz_2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{55}$$

donc (53) équivaut au système

$$[(E+\frac{\alpha'}{r})^2-m^2+i\frac{\alpha'}{r^2}]z_1+\partial_r\partial_r z_1+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\partial_\theta z_1-\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}z_1+\lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}z_1)$$
$$=\frac{1}{r^2}(\partial_\theta z_2+\frac{\lambda}{\sin\theta}z_2) \qquad (56)$$
$$[(E+\frac{\alpha'}{r})^2-m^2-i\frac{\alpha'}{r^2}]z_2+\partial_r\partial_r z_2+\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\partial_\theta z_2-\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}z_2-\lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}z_2)$$
$$=-\frac{1}{r^2}(\partial_\theta z_1-\frac{\lambda}{\sin\theta}z_1) \qquad (57)$$

Pour séparer la variable r de la variable θ on pose

$$z_1:=fU\ ;\quad z_2:=gV \qquad (58)$$

où f et g sont fonction de r, tandis que U et V sont fonctions de θ. Le système (56)-(57) devient :

$$[(E+\frac{\alpha'}{r})^2-m^2+i\frac{\alpha'}{r^2}]fU+f''U+\frac{f}{r^2}(U''-\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}U+\lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}U)$$
$$=\frac{g}{r^2}(V'+\frac{\lambda}{\sin\theta}V) \qquad (59)$$
$$[(E+\frac{\alpha'}{r})^2-m^2-i\frac{\alpha'}{r^2}]gV+g''V+\frac{g}{r^2}(V''-\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}V-\lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}V)$$
$$=-\frac{f}{r^2}(U'-\frac{\lambda}{\sin\theta}U) \qquad (60)$$

Soit alors κ une constante telle que

$$U'-\frac{\lambda}{\sin\theta}U=-\kappa V$$
$$V'+\frac{\lambda}{\sin\theta}V=\kappa U \qquad (61)$$

On obtient au second ordre

$$U''-\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}U+\lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}U=-\kappa^2 U$$
$$V''-\frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}V-\lambda\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}V=-\kappa^2 V \qquad (62)$$

et donc le système (59)-(60) se simplifie par U et V et l'on obtient le système radial

$$[(E+\frac{\alpha'}{r})^2-m^2+i\frac{\alpha'}{r^2}-\frac{\kappa^2}{r^2}]f+f''-\kappa\frac{g}{r^2}=0 \tag{63}$$

$$[(E+\frac{\alpha'}{r})^2-m^2-i\frac{\alpha'}{r^2}-\frac{\kappa^2}{r^2}]g+g''-\kappa\frac{f}{r^2}=0 \tag{64}$$

Résolution du système angulaire (61)

Si $\lambda>0$ on pose

$$U=\sin^{\lambda}\theta[\sin(\frac{\theta}{2})C'-(\kappa+\frac{1}{2}-\lambda)\cos(\frac{\theta}{2})C] \tag{65}$$

$$V=\sin^{\lambda}\theta[\cos(\frac{\theta}{2})C'+(\kappa+\frac{1}{2}-\lambda)\sin(\frac{\theta}{2})C] \tag{66}$$

tandis que si $\lambda<0$ on pose

$$U=\sin^{-\lambda}\theta[\cos(\frac{\theta}{2})C'+(\kappa+\frac{1}{2}+\lambda)\sin(\frac{\theta}{2})C] \tag{67}$$

$$V=\sin^{-\lambda}\theta[-\sin\frac{\theta}{2}C'+(\kappa+\frac{1}{2}+\lambda)\cos\frac{\theta}{2}C] \tag{68}$$

U et V sont solutions du système angulaire (61) si et seulement si C est solution de

$$0=C''+2|\lambda|\cot(\theta)C'+[(\kappa+\frac{1}{2})^2-\lambda^2]C \tag{69}$$

qui est l'équation différentielle des polynômes de Gegenbauer. Avec

$$(a)_0=1\ ;\ (a)_n=a(a+1)...(a+n-1) \tag{70}$$

on obtient comme seule solution intégrable

$$C(\theta)=C(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\lambda|-\kappa-\frac{1}{2})_n(|\lambda|+\kappa+\frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2}+|\lambda|)_n n!}\sin^{2n}(\frac{\theta}{2}) \tag{71}$$

L'intégrabilité suppose que la somme soit finie, donc qu'il existe un entier n tel que

$$n+|\lambda|=|\kappa+\frac{1}{2}| \tag{72}$$

ce qui suppose, pour une fonction bien définie, que κ soit un entier et λ un demi-entier. On verra dans la résolution du système radial que κ ne peut pas être nul. En considérant $j:=|\kappa|-\frac{1}{2}$, on peut voir que λ prend les valeurs $-j$, $-j+1$, ... , $j-1$, j, ce que l'on peut aussi obtenir en considérant les opérateurs de moment cinétique J_3 et J^2.

Résolution du système radial

Tout d'abord on pose

$$\rho := mr \ ; \quad \epsilon := \frac{E}{m} \ ; \quad F(\rho) := f(r) \ ; \quad G(\rho) := g(r) \tag{73}$$

et le système (63)-(64) devient

$$[(\epsilon + \frac{\alpha'}{\rho})^2 - 1 + i\frac{\alpha'}{\rho^2} - \frac{\kappa^2}{\rho^2}]F + F'' - \kappa\frac{G}{\rho^2} = 0 \tag{74}$$

$$[(\epsilon + \frac{\alpha'}{\rho})^2 - 1 - i\frac{\alpha'}{\rho^2} - \frac{\kappa^2}{\rho^2}]G + G'' - \kappa\frac{F}{\rho^2} = 0 \tag{75}$$

Puis on cherche les solutions sous forme de séries :

$$F := \rho^{s+1}e^{-\sqrt{1-\epsilon^2}\rho}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n \ ; \quad G := \rho^{s+1}e^{-\sqrt{1-\epsilon^2}\rho}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\rho^n \tag{76}$$

En égalant les coefficients de ρ^{s-1} on obtient le système

$$(\alpha'^2 - \kappa^2 + i\alpha' + s^2 + s)a_0 - \kappa b_0 = 0 \tag{77}$$

$$-\kappa a_0 + (\alpha'^2 - \kappa^2 - i\alpha' + s^2 + s)b_0 = 0 \tag{78}$$

tandis qu'en égalant les coefficients de ρ^{s+n-1} on obtient le système

$$\begin{aligned} &2[\epsilon\alpha' - \sqrt{1-\epsilon^2}(s+n)]a_{n-1} \\ &\quad + [(\alpha'^2 - \kappa^2 + i\alpha') + (s+n+1)(s+n)]a_n - \kappa b_n = 0 \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} &2[\epsilon\alpha' - \sqrt{1-\epsilon^2}(s+n)]b_{n-1} \\ &\quad + [(\alpha'^2 - \kappa^2 - i\alpha') + (s+n+1)(s+n)]b_n - \kappa a_n = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

Ce dernier système permet de calculer a_n et b_n en fonction de a_{n-1} et b_{n-1}, et ramène finalement au calcul de a_0 et b_0, donc au système (77)-(78). Celui-ci n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul, ce qui nous donne

$$(\alpha'^2 - \kappa^2 + s^2 + s)^2 = \kappa^2 - \alpha'^2 \tag{81}$$

On doit donc avoir $\kappa \neq 0$. Lorsque $|\kappa| \geqslant \alpha'$ l'égalité précédente nous donne

$$\alpha'^2 - \kappa^2 + s^2 + s = \pm\sqrt{\kappa^2 - \alpha'^2} \tag{82}$$

$$(s + \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2} \pm \sqrt{\kappa^2 - \alpha'^2})^2 \tag{83}$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{\kappa^2 - \alpha'^2} \tag{84}$$

Pour obtenir l'intégrabilité à l'origine on doit prendre

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + \sqrt{\kappa^2 - \alpha'^2} \tag{85}$$

A partir du système de récurrence (79)-(80) on obtient dans (76) des séries infinies et donc des intégrales divergentes, sauf s'il existe un entier n tel que a_n et b_n sont tous deux nuls, auquel cas le système de récurrence (79)-(80) se réduit à

$$\epsilon\alpha' = \sqrt{1 - \epsilon^2}(s + n) \tag{86}$$

donc on obtient

$$\epsilon^2 = \frac{(s + n)^2}{\alpha'^2 + (s + n)^2} \tag{87}$$

ce qui nous donne la formule des niveaux d'énergie de Sommerfeld

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha'^2}{(n + s)^2}}} \, . \tag{88}$$

Résolution pour le monopôle droit

Dans l'équation (47) on pose

$$\Omega^{-1}\xi := e^{-i(\lambda'\varphi + \delta - Ex^0)} X \tag{89}$$

car les monopôles gauches et droits tournent en sens inverse dans la jauge magnétique. Par rapport à la résolution des équations en η, cela revient seulement à changer le signe de λ car on obtient au lieu de (53)

$$\begin{aligned} 0 =&(E^2 + \frac{2\alpha' E}{r} + \frac{\alpha'^2}{r^2} - m^2)X + i\frac{\alpha'}{r^2}\sigma_3 X + \partial_r\partial_r X + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\partial_\theta X \\ &- \frac{\lambda'^2}{r^2\sin^2\theta}X - \frac{1}{r^2}\sigma_{31}\partial_\theta X + i\frac{\lambda'}{r^2\sin\theta}\sigma_{32}X + i\frac{\lambda'}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\sigma_{12}X \end{aligned} \tag{90}$$

donc le système radial est inchangé et le système angulaire est

$$U' + \frac{\lambda'}{\sin\theta}U = -\kappa V$$
$$V' - \frac{\lambda'}{\sin\theta}V = \kappa U \tag{91}$$

qui redonne le système angulaire (51) avec $\lambda = -\lambda'$. Il n'y a donc aucun changement sur les niveaux d'énergie ou sur le nombre des états. Le passage de l'onde gauche à l'onde droite s'accompagne simplement d'un changement de signe du nombre quantique λ, correspondant au passage d'un spin up à un spin down en théorie de l'électron.

Remarques de conclusion

S'il existe bien dans la nature, comme des expériences nombreuses et soignées semblent l'indiquer, des monopôles magnétiques de faible charge, ceux-ci peuvent former des atomes neutres, sur le modèle de l'atome d'hydrogène. Si ces monopôles sont régis par les équations d'onde linéaires du second ordre (29)-(30), les niveaux d'énergie d'un monopôle léger tournant autour d'un monopôle lourd de charge magnétique opposée seront analogues à ceux d'un atome d'hydrogène. Par contre le nombre des états liés ne sera pas celui de la spectroscopie de l'atome H, $2N^2$ où N est le nombre quantique principal. Rappelons que ce nombre des états liés est obtenu, en théorie de Dirac, de manière très différente de la théorie de Schrödinger, grâce à la restriction que, pour des polynômes radiaux de degré 0, le nombre κ n'a qu'un seul signe possible. Cette restriction n'a aucune raison de jouer ici et en outre, pour toute valeur de n il y a deux possibilités à cause du $\pm$ de la formule (85) donnant s. Par exemple pour le niveau d'énergie fondamental avec $N = 1$ on a comme possibilités :

$n = 0$	$s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{1^2 - \alpha'^2}$	$\kappa = \pm 1$	$j = \frac{1}{2}$	$\lambda = \pm\frac{1}{2}$	4
$n = 0$	$s = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{2^2 - \alpha'^2}$	$\kappa = \pm 2$	$j = \frac{3}{2}$	$\lambda = \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{2}$	8
$n = 1$	$s = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{1^2 - \alpha'^2}$	$\kappa = \pm 1$	$j = \frac{1}{2}$	$\lambda = \pm\frac{1}{2}$	4
					16

Soit un total de 16 états. On peut voir aussi que, pour $N = 2$, il y a au total 36 états différents. La spectroscopie magnétique serait donc notablement différente de la spectroscopie de l'atome d'hydrogène.

On a jusqu'ici pensé que les charges magnétiques des monopôles devaient être énormes, parce que Dirac a donné une formule liant la valeur des charges e et g à la constante de Planck : $eg = n\frac{\hbar}{2}c$, formule en opposition avec les résultats expérimentaux de V.F. Mikhailov [4] donnant $g = n\frac{\alpha}{6}e$, ce qui donne une constante α' très petite : $\alpha' = \frac{\alpha^3}{36} \approx 1,08 \times 10^{-8}$, donc des niveaux d'énergie extrêmement petits et en $\frac{1}{N^2}$.

Malgré la nature en principe expérimentale de la physique, on croit aujourd'hui plus en la valeur de la charge magnétique calculée par Dirac qu'aux valeurs expérimentales obtenues par Ehrenhaft puis Mikhailov. Les travaux de G. Lochak montrent bien la différence existant entre électricité et magnétisme avec la chiralité des ondes de monopôles magnétiques. Or toutes les démonstrations de la formule de Dirac ont en commun de supposer qu'une charge de l'un des types crée un potentiel de l'autre type. Ce n'est pas gênant pour ceux qui pensent que les potentiels ne sont que des outils de calcul sans signification physique. Mais si les potentiels ne sont pas seulement des outils de calcul, mais des éléments d'une physique du champ électromagnétique, les potentiels doivent posséder les mêmes éléments de symétrie que les charges qui les créent. Donc une charge électrique ne crée jamais un pseudopotentiel magnétique, et une charge magnétique ne crée jamais un potentiel électrique, ce qui rend erronée toute démonstration de la formule de Dirac. C'est aux expérimentateurs, et à eux seuls, de nous dire quelles sont les valeurs des charges magnétiques, si elles existent.

La différence entre les lois de symétrie peut aussi expliquer pourquoi nous ne voyons pas facilement les monopôles : voir, c'est utiliser la lumière, c'est-à-dire les photons émis par les particules dotées d'une charge électrique. G. Lochak [5] a montré la construction possible en théorie de la lumière d'un second photon, le photon magnétique. Notre optique a pu jusqu'ici totalement ignorer les photons magnétiques qui résulteraient des émissions des particules porteuses de charges magnétiques.

Références

[1] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$*. Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n° 4 1983 et **9** n° 1 1984

G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin $\frac{1}{2}$ magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985

G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992

[2] C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n° 1 1997.

C. Daviau : *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht,

C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 1 1998

C. Daviau : *Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 3 - 4, 1998

C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** n° 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : **25** n° 1, 2000.

C. Daviau, *Vers une mécanique quantique sans nombre complexe*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **26** n° 1-3 2001

C. Daviau : *Chiral Dirac Equation*, 6th Conference on Clifford Algebras, Tennessee Technological University, may 2002

[3] H. Krüger : *New solutions of the Dirac equation for central fields* in "The Electron" p. 49-81 (D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, Kluwer Academic Publishers 1991)

[4] V. F. Mikhailov : *Observation of the magnetic charge effect in experiments with ferromagnetic aerosols* Ann. Fond. Louis de Broglie, **12** n° 4 1987

[5] G. Lochak : *Sur la présence d'un second photon dans la théorie de la lumière de de Broglie*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** n° 1 1995

(Manuscrit reçu le 15 janvier 2004)