Interprétation cinématique de l'onde de l'électron

Claude Daviau

La Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
email : daviau.claude@wanadoo.fr
Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris, France

RÉSUMÉ. On examine l'invariance de forme de l'équation d'onde relativiste de l'électron sous un groupe contenant les rotations de Lorentz usuelles. Ceci amène à une nouvelle interprétation de l'onde de l'électron, comme un champ de dilatateurs lorentziens faisant passer, en chaque point, de l'espace-temps tangent à la variété intrinsèque d'espace-temps liée à l'onde à l'espace-temps relatif à l'observateur. Puis on commence l'étude de cette variété intrinsèque en calculant les coefficients de connexion affine, qui permettent d'obtenir les tenseurs de torsion et de courbure de la variété.

ABSTRACT. We study first the form invariance of the electron's relativistic wave, under a group containing the usual Lorentz rotations. That induces to a new interpretation of the electron's wave, as a field of Lorentz dilators inducing a Lorentz dilation between the tangent space-time to each point of the intrinsic manifold linked to the wave and the relative space-time of the observer. Next we begin to study this intrinsic manifold, calculating the connexion which allows to get the torsion and curvature tensors.

Il y a juste 100 ans, Einstein publiait ses trois célèbres articles, dont celui sur l'électrodynamique des corps en mouvement, qui a engendré cette révolution des idées physiques qu'on a appelée la relativité. 18 ans plus tard, Louis de Broglie, un des rares physiciens de l'époque capable de penser cette relativité et d'en tirer les conséquences, découvrait l'onde associée au mouvement de l'électron. Immédiatement après, Schrödinger donnait une équation d'onde non relativiste pour cette onde, et on découvrait que les choses étaient encore plus compliquées, puisque l'électron était doté d'un spin. En 1928 Dirac donnait une équation d'onde relativiste pour cette onde, qui, à la fois, rendait compte du spin et qui fournissait, pour l'atome d'hydrogène, tous les nombres quantiques attendus par les spectroscopistes, et les bons niveaux d'énergie. Nous commencerons ici par réexaminer l'invariance relativiste de cette équation.

1 - Algèbre de Clifford d'espace et groupe de Lorentz restreint

L'invariance relativiste de l'équation de Dirac est habituellement démontrée en considérant les rotations infinitésimales, puis en utilisant l'exponentiation pour obtenir les transformations de Lorentz. Du point de vue mathématique, cela revient à travailler d'abord dans l'algèbre de Lie du groupe, puis dans le groupe lui-même. Mais le lien entre l'algèbre de Lie d'un groupe et le groupe lui-même n'est pas si simple : l'exponentielle est une application d'un voisinage du zéro de l'algèbre de Lie sur un voisinage de l'élément neutre du groupe, ce n'est habituellement pas une application de toute l'algèbre sur tout le groupe. Certes cela marche pour le groupe des rotations de l'espace, mais cela ne marche pas pour des groupes plus vastes comme le groupe de Lorentz. En conséquence nous n'utiliserons pas la méthode usuelle, et nous nous servirons de l'algèbre complète des matrices 2×2 à coefficients complexes, qui est, en tant qu'algèbre sur le corps des nombres réels, l'algèbre de Clifford de l'espace physique à trois dimensions.

Pour obtenir l'équation de Dirac dans cette algèbre, il suffit [1] d'associer à chaque onde ψ de Dirac une onde ϕ à valeur dans l'algèbre d'espace, définie par :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{matrix} \psi_1 = a_1 + ia_4 \\ \psi_2 = -a_3 - ia_2 \\ \psi_3 = a_8 + ia_5 \\ \psi_4 = a_6 + ia_7 \end{matrix} \tag{1}$$

$$\phi = a_1 + a_2\sigma_{32} + a_3\sigma_{31} + a_4\sigma_{12} + a_5\sigma_{123} + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3 \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j$$

Avec la représentation usuelle des σ_j par les matrices de Pauli

$$I = \sigma_0 = \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma_1 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\sigma_2 = -\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma_3 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et en identifiant les nombres aux matrices scalaires, ϕ prend la forme matricielle

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + a_8 + i(a_4 + a_5) = \psi_1 + \psi_3 \\ \beta &= a_3 + a_6 + i(-a_2 - a_7) = -\psi_2^* + \psi_4^* \\ \gamma &= -a_3 + a_6 + i(-a_2 + a_7) = \psi_2 + \psi_4 \\ \delta &= a_1 - a_8 + i(-a_4 + a_5) = \psi_1^* - \psi_3^* \end{aligned} \tag{5}$$

où z^* désigne le nombre complexe conjugué de z. L'algèbre d'espace utilise trois conjugaisons :

$$\overline{\phi} = a_1 - a_2\sigma_{32} - a_3\sigma_{31} - a_4\sigma_{12} + a_5\sigma_{123} - a_6\sigma_1 - a_7\sigma_2 - a_8\sigma_3 \tag{6}$$

$$\widehat{\phi} = a_1 + a_2\sigma_{32} + a_3\sigma_{31} + a_4\sigma_{12} - a_5\sigma_{123} - a_6\sigma_1 - a_7\sigma_2 - a_8\sigma_3 \tag{7}$$

$$\phi^\dagger = a_1 - a_2\sigma_{32} - a_3\sigma_{31} - a_4\sigma_{12} - a_5\sigma_{123} + a_6\sigma_1 + a_7\sigma_2 + a_8\sigma_3 \tag{8}$$

Avec (4) ceci nous donne

$$\overline{\phi} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \; ; \; \phi^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \; ; \; \widehat{\phi} = \begin{pmatrix} \delta^* & -\gamma^* \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{9}$$

Et l'on a, pour toutes matrices A, B :

$$\overline{AB} = \overline{B}\,\overline{A} \; ; \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \; ; \quad \widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B} \tag{10}$$

$$\widehat{A} = \overline{A}^\dagger \; ; \quad A^\dagger = \widehat{\overline{A}} \; ; \quad \overline{A} = \widehat{A}^\dagger \tag{11}$$

En identifiant scalaires et matrices scalaires, on a pour tout ϕ :

$$\phi\overline{\phi} = \overline{\phi}\phi = \det(\phi) = \alpha\delta - \beta\gamma \tag{12}$$

On utilisera le déterminant sous forme algébrique et sous forme trigonométrique

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \Omega_1 + i\Omega_2 = re^{i\theta} \tag{13}$$

$$\Omega_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2 - a_8^2 \tag{14}$$

$$\Omega_2 = 2(a_1a_5 + a_2a_6 - a_3a_7 - a_4a_8) \tag{15}$$

Tout événement de l'espace-temps peut être repéré par un quadruplet $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$, avec $x^0 = ct$, ou par la matrice :

$$x = x^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

L'espace-temps peut alors être considéré comme la partie de l'algèbre d'espace vérifiant

$$x^\dagger = x \ ; \quad \overline{x} = \widehat{x} = x^0 - x^1\sigma_1 - x^2\sigma_2 - x^3\sigma_3. \tag{17}$$

Si M est un élément quelconque de l'algèbre d'espace, et si on appelle R et $\overline{R}$ les applications qui à x font correspondre respectivement $x' = R(x)$ et $\boldsymbol{x}' = \overline{R}(x)$ tels que

$$x' = MxM^\dagger \ ; \quad \boldsymbol{x}' = \overline{M}x\widehat{M}. \tag{18}$$

on a :

$$\det(x') = \det(M).\det(x).\det(M^\dagger) = |\det(M)|^2 \det(x) \tag{19}$$

$$\det(\boldsymbol{x}') = \det(\overline{M}).\det(x).\det(\widehat{M}) = |\det(M)|^2 \det(x) \tag{20}$$

Par conséquent, avec

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \ ; \quad \det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma = re^{i\theta} \tag{21}$$

on obtient

$$\begin{aligned}(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 &= x'\overline{x}' = \det(x') \\ &= r^2\det(x) = r^2 x\overline{x} = r^2[(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]\end{aligned} \tag{22}$$

Et de même on obtient

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}'^0)^2 - (\boldsymbol{x}'^1)^2 - (\boldsymbol{x}'^2)^2 - (\boldsymbol{x}'^3)^2 &= \boldsymbol{x}'\overline{\boldsymbol{x}}' = \det(\boldsymbol{x}') \\ &= r^2\det(x) = r^2 x\overline{x} = r^2[(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]\end{aligned} \tag{23}$$

En particulier si $\det(M) = 1$, on obtient

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{24}$$

$$(\boldsymbol{x}'^0)^2 - (\boldsymbol{x}'^1)^2 - (\boldsymbol{x}'^2)^2 - (\boldsymbol{x}'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{25}$$

$$M\overline{M} = 1 \ ; \quad \overline{M} = M^{-1} \ ; \quad \overline{R} = R^{-1} \tag{26}$$

de sorte que R et $\overline{R}$ sont, dans ce cas, deux rotations de Lorentz réciproques l'une de l'autre. Ces transformations sont les seules utilisées par la théorie des représentations du groupe de Lorentz. Les matrices 2×2 de déterminant 1 forment un groupe multiplicatif noté $SL(2, \mathbb{C})$.

On ne restreindra pas ici l'étude à ce cas particulier et l'on étudiera ce qui se passe avec une matrice quelconque M. (22) et (23) montrent que les transformations R et $\overline{R}$ multiplient toutes les longueurs d'espace-temps par $r = |\det(M)|$, donc R et $\overline{R}$ sont le produit d'une transformation de Lorentz conservant la distance d'espace-temps par une homothétie de rapport r. On appellera une telle transformation "dilatation de Lorentz" et la matrice M sera appelée un "dilatateur de Lorentz". A la transformation R on peut associer la matrice R^μ_ν telle que

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu \tag{27}$$

Les valeurs des R^μ_ν sont donnés dans l'appendice A. En particulier on remarque que

$$R^0_0 = \sum_{i=1}^{i=8} a_i^2 \tag{28}$$

donc $R^0_0 > 0$ dès que M n'est pas la matrice nulle. Cela signifie que la transformation R conserve le sens du temps. Un autre résultat, qui n'est pas trivial, et dont on trouvera une esquisse de preuve chez Naïmark [2], est :

$$\det(R^\mu_\nu) = |\det(M)|^4 \tag{29}$$

et il en résulte

$$\det(R^\mu_\nu) \geqslant 0 \tag{30}$$

donc dès que $r = |\det(M)| \neq 0$, la dilatation de Lorentz R conserve l'orientation de l'espace-temps, et comme elle conserve le sens du temps, elle conserve aussi l'orientation de l'espace.

Soit f l'application de l'algèbre $Cl_3 = M_2(\mathbb{C})$ dans l'ensemble D des dilatations de Lorentz telle que $f(M) = R$. Soit M' une seconde matrice et $R' = f(M')$ qui transforme x' en x''. On a :

$$\begin{aligned} R : x \mapsto x' &= MxM^\dagger \\ R' : x' \mapsto x'' &= M'x'M'^\dagger \end{aligned} \tag{31}$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned} R' \circ R : x \mapsto x'' = M'(MxM^\dagger)M'^\dagger = (M'M)x(M'M)^\dagger \\ f(M') \circ f(M) = R' \circ R = f(M'M) \end{aligned} \tag{32}$$

Donc f transforme le produit des matrices en la composée des dilatations de Lorentz. Comme le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants, et comme le module d'un produit de deux nombres complexes est égal au produit des modules, les rapports d'homothétie des dilatations successives se multiplient : la composée d'une dilatation de rapport r et d'une dilatation de rapport r' est une dilatation de rapport rr'. En particulier la composée des deux dilatations R et $\overline{R}$ vérifie :

$$\overline{R} \circ R : x \mapsto x'' = (\overline{M}M)x(\overline{M}M)^\dagger = r^2 x \tag{33}$$

et est donc une homothétie de rapport r^2. Les dilatations de rapport nul ne sont pas inversibles. Par contre les dilatations de rapport non nul sont inversibles et constituent un groupe que l'on notera D^*. Si $r \neq 0$, M est inversible et la transformation réciproque de la dilatation R est la composée de $\overline{R}$ et d'une homothétie de rapport r^{-2}. La restriction de f au groupe multiplicatif G des matrices inversibles est un homomorphisme de G dans D^*. Le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des matrices M qui ont pour image l'élément neutre de D^*, donc telles que $x = R(x)$, ou $R^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, ce qui donne $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = \delta = e^{i\theta/2}$. Donc le noyau de f est

$$Ker(f) = \{M \ / \ M = e^{i\frac{\theta}{2}} I\} \approx U(1) \tag{34}$$

Si on restreint encore f en ne considérant plus que les matrices M de déterminant 1, on obtient un homomorphisme de $SL(2, \mathbb{C})$ sur le sous-groupe de D^* des dilatations de rapport 1, qui est le groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}^\uparrow_+$. Le noyau est alors réduit aux matrices $M = e^{i\theta/2} I$ telles que $\theta = 0 \mod 2\pi$ donc $M = \pm I$.

2 . Invariance relativiste de l'équation de Dirac

Soit R une dilatation de Lorentz de dilatateur M avec

$$\begin{aligned} &x' = R(x) = MxM^\dagger \ ; \quad x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu \\ &M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \ ; \quad \det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma = re^{i\theta} \end{aligned} \tag{35}$$

On utilisera

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ ; \quad \partial'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \ ; \quad \partial_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = R^\mu_\nu \partial'_\mu \tag{36}$$

L'algèbre d'espace utilise principalement deux opérateurs différentiels :

$$\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} = \partial_0 - \vec{\partial}$$

$$\vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 \tag{37}$$

$$\widehat{\nabla} = \partial_0 + \vec{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Et sous la transformation R les opérateurs différentiels vérifient

$$\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M} \; ; \quad \nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu \tag{39}$$

$$r^2\nabla' = M\nabla M^\dagger \tag{40}$$

En algèbre d'espace, l'équation de Dirac prend la forme [1] :

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} = 0 \tag{41}$$

Cette équation d'onde est invariante de forme sous la dilatation R si $\phi'(x')$ vérifie

$$\nabla'\widehat{\phi}' + qA'\widehat{\phi}'\sigma_{12} + m'\phi'\sigma_{12} = 0 \tag{42}$$

Si l'on prend

$$\phi' = M\phi \; ; \quad \widehat{\phi}' = \widehat{M}\widehat{\phi} \; ; \quad A = \overline{M}A'\widehat{M} \tag{43}$$

l'équation de Dirac (41) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{M}\nabla'\widehat{M}\widehat{\phi} + q\overline{M}A'\widehat{M}\widehat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} \\ 0 &= \overline{M}(\nabla'\widehat{\phi}' + qA'\widehat{\phi}'\sigma_{12}) + m\phi\sigma_{12} \end{aligned} \tag{44}$$

ce qui donne, en utilisant (42)

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{M}(-m'\phi'\sigma_{12}) + m\phi\sigma_{12} \\ &= (-m'\overline{M}M\phi + m\phi)\sigma_{12} = (-m're^{i\theta} + m)\phi\sigma_{12} \end{aligned} \tag{45}$$

Donc l'équation de Dirac est invariante de forme sous une dilatation de Lorentz seulement si

$$m = m're^{i\theta} = m'\det(M). \tag{46}$$

En résumé, on peut dire que l'équation de Dirac est invariante de forme sous toute dilatation de Lorentz R telle que :

$$\begin{aligned}
&x' = R(x) = MxM^\dagger \;;\quad x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu \;;\quad \partial_\nu = R^\mu_\nu \partial'_\mu \\
&\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M} \;;\quad \nabla = \sigma^\mu\partial_\mu \;;\quad \nabla' = \sigma^\mu\partial'_\mu \\
&\phi' = M\phi \;;\quad m = \det(M)m'
\end{aligned} \tag{47}$$

La théorie des représentations du groupe de Lorentz se sert seulement des matrices M de déterminant 1, pour lesquelles on a $m = m'$. Une dilatation de Lorentz modifie toutes les longueurs, et doit donc aussi modifier les masses propres qui, sont, à un facteur près, l'inverse d'une longueur de temps. Le facteur $e^{i\theta}$, est, lui, tout à fait inattendu, mais n'en reste pas moins nécessaire pour assurer l'invariance de forme de l'équation linéaire de Dirac sous une dilatation de Lorentz.

Il est possible d'éviter le facteur $e^{i\theta}$, si l'on utilise, à la place de l'équation linéaire de Dirac, une équation d'onde non linéaire. Avec

$$\det(\phi) = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta} \tag{48}$$

Ω_1 et Ω_2 sont les invariants bien connus de la théorie de Dirac et β est l'angle d'Yvon-Takabayasi. Nous avons précédemment étudié une équation non linéaire [3] qui s'écrit, en algèbre d'espace

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{12} = 0 \tag{49}$$

Mais alors $\phi' = M\phi$ implique :

$$\begin{aligned}
\rho' e^{i\beta'} &= \det(\phi') = \det(M)\det(\phi) = r\rho e^{i(\theta+\beta)} \\
\rho' &= r\rho \;;\quad \beta' = \theta + \beta.
\end{aligned} \tag{50}$$

Cette équation est invariante de forme sous une dilatation de Lorentz R de dilatateur M si elle est transformée en

$$\nabla'\widehat{\phi}' + qA'\widehat{\phi}'\sigma_{12} + m'e^{-i\beta'}\phi'\sigma_{12} = 0 \tag{51}$$

Et au lieu de (45) nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{M}(-m'e^{-i\beta'}\phi'\sigma_{12}) + me^{-i\beta}\phi\sigma_{12} \\
&= (-rm' + m)e^{-i\beta}\phi\sigma_{12}
\end{aligned} \tag{52}$$

Aussi l'équation non linéaire (49) est invariante sous les dilatations de Lorentz si $m = rm'$, Il n'y a pas de terme inattendu, et ceci semble un bon argument en faveur de l'équation non linéaire.

3 . Invariance relativiste du formalisme complexe

L'équation de Dirac a d'abord été écrite à l'aide de fonctions à valeurs complexes :

$$0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi \tag{53}$$

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \; ; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_j = -\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \; , \quad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{54}$$

Pour établir l'invariance de forme de l'équation de Dirac il est plus aisé de changer de représentation et d'introduire les spineurs de Weyl. En utilisant

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 + \gamma_5) \; ; \quad \boldsymbol{\psi} = U\psi \; ; \quad \boldsymbol{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^{-1} \tag{55}$$

on obtient

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4 \\ \psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4 \end{pmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{\gamma}^0 = \gamma_5 \; ; \quad \boldsymbol{\gamma}^j = \gamma_j, \quad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{56}$$

$$0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = U[\boldsymbol{\gamma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\boldsymbol{\psi} \tag{57}$$

Comme les deux premières lignes de la matrice de $\boldsymbol{\psi}$ sont la colonne de gauche de ϕ, tandis que les deux dernières lignes sont la colonne de gauche de $\widehat{\phi}$, (43) implique que, sous la dilatation de Lorentz R, $\boldsymbol{\psi}$ soit transformé en

$$\boldsymbol{\psi}' = N\boldsymbol{\psi} \; ; \quad N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \tag{58}$$

Avec

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{\gamma}_{0123} = \boldsymbol{\gamma}_0\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \tag{59}$$

on obtient

$$\tilde{N}N = \begin{pmatrix} \overline{M}M & 0 \\ 0 & M^\dagger\widehat{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re^{i\theta}I & 0 \\ 0 & re^{-i\theta}I \end{pmatrix} = re^{\theta\boldsymbol{\gamma}_{0123}} \tag{60}$$

Un autre résultat essentiel est :

$$\tilde{N}\boldsymbol{\gamma}^\mu N = R^\mu_\nu \boldsymbol{\gamma}^\nu \tag{61}$$

L'équation linéaire de Dirac (53) est invariante sous la dilatation de Lorentz R si nous obtenons

$$0 = [\boldsymbol{\gamma}^\mu(\partial'_\mu + iqA'_\mu) + im']\boldsymbol{\psi}' \tag{62}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
0 &= [\boldsymbol{\gamma}^\nu(\partial_\nu + iqA_\nu) + im]\boldsymbol{\psi} \\
&= \boldsymbol{\gamma}^\nu R^\mu_\nu(\partial'_\mu + iqA'_\mu)\boldsymbol{\psi} + im\boldsymbol{\psi} \\
&= \tilde{N}\boldsymbol{\gamma}^\mu N(\partial'_\mu + iqA'_\mu)\boldsymbol{\psi} + im\boldsymbol{\psi} \\
&= \tilde{N}[\boldsymbol{\gamma}^\mu(\partial'_\mu + iqA'_\mu)\boldsymbol{\psi}'] + im\boldsymbol{\psi} \\
&= \tilde{N}(-im'\boldsymbol{\psi}') + im\boldsymbol{\psi} = (-im'\tilde{N}N + im)\boldsymbol{\psi} \\
&= i(m - m're^{\theta\boldsymbol{\gamma}_{0123}})\boldsymbol{\psi}
\end{aligned} \tag{63}$$

Par conséquent, si

$$\boldsymbol{\psi}' = N\boldsymbol{\psi}\ ; \quad m = re^{\theta\boldsymbol{\gamma}_{0123}}m' \tag{64}$$

on obtient

$$0 = [\boldsymbol{\gamma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\boldsymbol{\psi} = \tilde{N}[\boldsymbol{\gamma}'^\mu(\partial'_\mu + iqA'_\mu) + im']\boldsymbol{\psi}' \tag{65}$$

Bien entendu, si l'on restreint l'étude au cas particulier des rotations de Lorentz orthochrones, avec $\det(M) = 1$, on n'a pas de problème avec le terme de masse, car $m = m'$. En (64) comme en (46), il y a, en plus du facteur r qui est attendu, un facteur tout à fait inattendu dans le terme de masse. Qui plus est, les formules (64) et (46) ne sont pas identiques, ce qui implique que si l'une est bonne, l'autre est fausse, et que les deux formalismes ne sont pas totalement équivalents en ce qui concerne l'invariance relativiste. Ce problème disparaît si l'on utilise, à la place de l'équation de Dirac linéaire, l'équation non linéaire, pour laquelle on a simplement $m = rm'$.

4 . Interprétation cinématique de l'onde de l'électron

Il n'y a aucune différence entre la structure d'une matrice M, dilatateur d'une dilatation de Lorentz R, et la matrice ϕ de l'onde de l'électron.

L'onde ϕ est une fonction de l'espace-temps à valeur dans l'ensemble des dilatateurs lorentziens.

Il n'y a aucune différence entre le produit $M'M$ de (32), qui donne la composition des dilatations de Lorentz, et le produit $M\phi$ de (43) qui donne la transformation de l'onde sous une dilatation de Lorentz. Par conséquent on peut penser l'onde ϕ comme un champ de dilatateurs lorentziens effectuant, en chaque point de l'espace-temps, une dilatation de Lorentz. Comme cette dilatation est variable dans l'espace et le temps, cette dilatation doit être vue non pas comme une dilatation affectant tout l'espace-temps, mais comme agissant sur un voisinage infinitésimal de l'espace-temps sur l'espace-temps relatif à l'observateur, c'est-à-dire une transformation de l'espace-temps tangent en un point à l'espace-temps de l'observateur. On appellera D cette dilatation, y l'élément général de l'espace-temps tangent :

$$
\begin{aligned}
y = y^\mu \sigma_\mu \ ; \quad x = x^\mu \sigma_\mu = D(y) = \phi y \phi^\dagger \\
x^\mu = D^\mu_\nu y^\nu \ ; \quad \boldsymbol{\partial}_\nu = \frac{\partial}{\partial y^\nu} = D^\mu_\nu \partial_\mu
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Et alors on peut écrire

$$x = \phi(y^\mu \sigma_\mu)\phi^\dagger = y^\mu \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \tag{67}$$

On appellera D_μ les quatre vecteurs d'espace-temps

$$D_\mu = \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \tag{68}$$

qui vérifient

$$x = x^\mu \sigma_\mu = D^\mu_\nu y^\nu \sigma_\mu = \phi y \phi^\dagger = y^\nu \phi \sigma_\nu \phi^\dagger = y^\nu D_\nu \tag{69}$$

$$D_\nu = D^\mu_\nu \sigma_\mu \tag{70}$$

Sous une dilatation de Lorentz R de dilatateur M, vérifiant (47), on obtient

$$
\begin{aligned}
x' &= MxM^\dagger = M(\phi y \phi^\dagger)M^\dagger \\
&= (M\phi)y(M\phi)^\dagger = \phi' y \phi'^\dagger
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Ainsi nous avons $x = D(y)$ et $x' = D'(y)$ avec $D' = R \circ D$, pour le même y. Cela signifie que y ne change pas, qu'il soit vu par l'observateur de x ou l'observateur de x'. Donc y est intrinsèque à l'onde et indépendant de l'observateur. L'onde de l'électron peut être considérée comme l'objet cinématique effectuant une dilatation de Lorentz partant de l' espace tangent en chaque point d'une variété intrinsèque d'espace-temps liée à l'onde, vers l'espace-temps relatif à chaque observateur.

Avec

$$\det(\phi) = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta} \tag{72}$$

Ω_1 et Ω_2 sont les invariants

$$\Omega_1 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 - {a_5}^2 - {a_6}^2 - {a_7}^2 - {a_8}^2 = \overline{\psi}\psi \tag{73}$$

$$\Omega_2 = 2(a_1a_5 + a_2a_6 - a_3a_7 - a_4a_8) = -i\overline{\psi}\gamma_5\psi \; ; \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \tag{74}$$

et β est l'angle d'Yvon-Takabayasi. Si ρ n'est pas nul on peut poser

$$\phi = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}X \tag{75}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \overline{\phi} &= \sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}\overline{X} \\ \rho e^{i\beta} &= \det(\phi) = \overline{\phi}\phi = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}\overline{X}\sqrt{\rho}e^{i\frac{\beta}{2}}X = \rho e^{i\beta}\overline{X}X \\ \overline{X}X &= 1 \; ; \quad \overline{X} = X^{-1} \end{aligned} \tag{76}$$

Donc X est à valeur dans $SL(2,\mathbb{C})$. La forme (75), pour l'onde de l'électron, a d'abord été obtenue, sous une forme différente mais équivalente, par Jakobi et Lochak [4], puis par Hestenes [5] et Boudet [6]. Mais le facteur X seul était reconnu comme de nature cinématique, X étant un dilatateur d'une dilatation de Lorentz de déterminant 1, c'est-à-dire d'une rotation de Lorentz. Le facteur ρ était interprété en [4] comme la densité invariante du fluide, dans le cadre d'une interprétation hydrodynamique de l'onde de Dirac. ρ était interprété en [5] comme la densité de probabilité dans le système propre lié à l'onde. On propose ici de considérer ρ comme le rapport de dilatation d'une dilatation de Lorentz.

Les résultats du premier paragraphe, obtenus pour M, sont aisés à transposer pour ϕ. La dilatation R devient D. (28) devient

$$D_0^0 = \sum_{i=1}^{i=8} {a_i}^2 = \sum_{i=1}^{i=4} |\psi_i|^2 \tag{77}$$

et (29) devient

$$\det(D^\mu_\nu) = |\det(\phi)|^4 = \rho^4 \tag{78}$$

(77) entraîne que la dilatation D préserve le sens du temps, et (78) indique que D conserve aussi l'orientation de l'espace-temps, et comme le sens du temps est conservé, l'orientation de l'espace physique l'est aussi.

Depuis l'origine de l'équation de Dirac D^0_0 a été interprété comme donnant la probabilité de trouver l'électron à l'endroit donné. Mais cette interprétation ne peut être que théorique. Il n'existe aucune expérience permettant de mesurer une probabilité avec un électron unique, à un endroit et à un instant unique. Or l'équation de Dirac s'occupe d'un seul électron, pas d'un nuage d'électrons, et une densité de probabilité ne peut être testée expérimentalement que par une statistique portant sur un très grand nombre d'électrons, ou un très grand nombre d'instants. Il ne semble donc pas y avoir d'objection expérimentale à considérer que $D^0_0 > 0$ indique que chaque espace-temps tangent a son temps orienté dans le même sens, partout et toujours.

5 . Connexion affine de la variété intrinsèque

Deux des quatre vecteurs D_μ sont bien connus : D_0 est le vecteur conservatif

$$D^\mu_0 = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \ ; \quad \partial_\mu D^\mu_0 = 0. \tag{79}$$

Le vecteur D_3 est également bien connu car on a

$$D^\mu_3 = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{80}$$

Il n'est pas conservatif avec l'équation de Dirac linéaire, mais il l'est avec l'équation non linéaire (49). Les deux autres vecteurs, D_1 et D_2, sont inconnus du formalisme complexe. Leurs composantes font parties des 20 densités tensorielles supplémentaires qu'introduit l'écriture de l'équation de Dirac en algèbre d'espace. Ils ne sont pas invariants de jauge électrique, un changement de jauge se traduisant par une rotation dans le plan de ces deux vecteurs.

Les quatre vecteurs D_μ constituent une base orthogonale mobile de l'espace-temps, car nous avons :

$$\begin{aligned} 2D_\mu \cdot D_\nu &= D_\mu \widehat{D}_\nu + D_\nu \widehat{D}_\mu \\ &= \phi\sigma_\mu\phi^\dagger\widehat{\phi}\widehat{\sigma}_\nu\overline{\phi} + \phi\sigma_\nu\phi^\dagger\widehat{\phi}\widehat{\sigma}_\mu\overline{\phi} \\ &= \rho e^{-i\beta}\phi(\sigma_\mu\widehat{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\widehat{\sigma}_\mu)\overline{\phi} \end{aligned} \tag{81}$$

Comme le terme $\sigma_\mu\widehat{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\widehat{\sigma}_\mu$ vaut 0 si $\mu \neq \nu$, 2 si $\mu = \nu = 0$, et -2 si $\mu = \nu = 1,\ 2,\ 3$, avec

$$g_{\mu\nu} = D_\mu \cdot D_\nu \tag{82}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= 0 \ si \ \mu \neq \nu \\ g_{00} &= \rho^2 \\ g_{jj} &= -\rho^2 \ si \ j = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned} \tag{83}$$

Pour calculer les coefficients de connexion affine de la variété intrinsèque d'espace-temps, on utilisera la base mobile formée par les quatre vecteurs D_μ. On pose

$$dx = dy^\nu D_\nu \tag{84}$$

$$dD_\mu = \Gamma^\beta_{\mu\nu} dy^\nu D_\beta \tag{85}$$

Avec (66) on obtient, si $\rho \neq 0$:

$$\begin{aligned} dx = dx^\mu\sigma_\mu = D^\mu_\nu\sigma_\mu dy^\nu = D_\nu dy^\nu \\ D_\nu = \phi\sigma_\nu\phi^\dagger = D^\mu_\nu\sigma_\mu \ ; \quad \sigma_\mu = (D^{-1})^\beta_\mu D_\beta \end{aligned} \tag{86}$$

Si l'on utilise la dilatation $\overline{D}$ définie par

$$\overline{D}(x) = \overline{\phi}x\widehat{\phi} \tag{87}$$

on a

$$D^{-1}(x) = \rho^{-2}\overline{D}(x) \tag{88}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} dD_\mu = \boldsymbol{\partial}_\nu(D_\mu)dy^\nu = \boldsymbol{\partial}_\nu(D^\xi_\mu\sigma_\xi)dy^\nu = \boldsymbol{\partial}_\nu(D^\xi_\mu)\sigma_\xi dy^\nu \\ = \boldsymbol{\partial}_\nu(D^\xi_\mu)(D^{-1})^\beta_\xi D_\beta dy^\nu = \Gamma^\beta_{\mu\nu} D_\beta dy^\nu \end{aligned} \tag{89}$$

Donc les coefficients de connexions affines sont :

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \boldsymbol{\partial}_\nu(D^\xi_\mu)(D^{-1})^\beta_\xi \ ; \quad \boldsymbol{\partial}_\nu = D^\tau_\nu\partial_\tau \tag{90}$$

En utilisant la dilatation $\overline{D}$ on obtient

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \rho^{-2}\boldsymbol{\partial}_\nu(D^\xi_\mu)\overline{D}^\beta_\xi \ ; \quad \boldsymbol{\partial}_\nu = D^\tau_\nu\partial_\tau \tag{91}$$

Comme $\overline{D}_0^0 = D_0^0$ et $\overline{D}_j^0 = -D_0^j$, on a

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \boldsymbol{\partial}_\nu[\ln(\rho)] = D^\mu_\nu \partial_\mu[\ln(\rho)] \tag{92}$$

Comme $\overline{D}_0^j = -D_j^0$ et $\overline{D}_j^k = D_k^j$, on a

$$\Gamma^j_{0\nu} = \Gamma^0_{j\nu} \ , \quad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{93}$$

$$\Gamma^j_{k\nu} = -\Gamma^k_{j\nu} \ , \quad j = 1,\ 2,\ 3 \ , \quad k = 1,\ 2,\ 3, \quad k \neq j. \tag{94}$$

On a besoin, pour le calcul complet des coefficients de connexion affine, des grandeurs suivantes

$$S_{(k)} = \phi\sigma_k\overline{\phi} \tag{95}$$

$$\mathcal{S}_{(k)} = \frac{\widehat{\nabla} S_{(k)}}{\det(\phi)} \tag{96}$$

$$\mathcal{A}_{(k)} = \frac{\widehat{A} S_{(k)}}{\det(\phi)} \tag{97}$$

$$\tau = \frac{1}{2}[(\widehat{\nabla}\phi)\overline{\phi} - \dot{\widehat{\nabla}}\phi\dot{\overline{\phi}}] \tag{98}$$

$$\mathcal{T} = \frac{\tau}{\det(\phi)} \tag{99}$$

En utilisant l'équation de Dirac linéaire (41) on obtient

$$\Gamma^0_{1\nu} + i\Gamma^2_{3\nu} = -D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(1)} - 2q\mathcal{A}_{(2)}) + 2m\rho\delta^2_\nu e^{-i\beta}] \tag{100}$$

$$\Gamma^0_{2\nu} + i\Gamma^3_{1\nu} = -D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(2)} + 2q\mathcal{A}_{(1)}) - 2m\rho\delta^1_\nu e^{-i\beta}] \tag{101}$$

$$\Gamma^0_{3\nu} + i\Gamma^0_{2\nu} = -D_\nu \cdot \mathcal{S}_{(3)} - 2iqD_\nu \cdot A - 2im\delta^3_\nu\Omega_2 \tag{102}$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = -D_\nu \cdot [\mathcal{T} + iq\mathcal{A}_{(3)} + (\mathcal{T} + iq\mathcal{A}_{(3)})^\dagger] - 2m\delta^3_\nu\Omega_2 \tag{103}$$

Les résultats que l'on obtient avec l'équation non linéaire (49) ne diffèrent que par les termes de masse, qui sont nettement plus simples :

$$\Gamma^0_{1\nu} + i\Gamma^2_{3\nu} = -D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(1)} - 2q\mathcal{A}_{(2)}) + 2m\rho\delta^2_\nu \tag{104}$$

$$\Gamma^0_{2\nu} + i\Gamma^3_{1\nu} = -D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(2)} + 2q\mathcal{A}_{(1)}) - 2m\rho\delta^1_\nu \tag{105}$$

$$\Gamma^0_{3\nu} + i\Gamma^0_{2\nu} = -D_\nu \cdot \mathcal{S}_{(3)} - 2iqD_\nu \cdot A \tag{106}$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = -D_\nu \cdot [\mathcal{T} + iq\mathcal{A}_{(3)} + (\mathcal{T} + iq\mathcal{A}_{(3)})^\dagger] \tag{107}$$

Remarques de conclusion

Comme les coefficients de connexion affine ne sont pas symétriques, la variété d'espace-temps intrinsèque est dotée d'une torsion. Elle est aussi dotée d'un tenseur de courbure. La présence de termes de masse dans les coefficients de connexion affine implique que des termes de masse sont présents dans le tenseur de torsion, et pas seulement dans le tenseur de courbure. Le tenseur de torsion comporte aussi des termes contenant le vecteur d'espace-temps A, potentiel électromagnétique extérieur. Donc le tenseur de courbure comporte des termes avec les dérivées de ces potentiels, qui constituent le champ électromagnétique.

Les calculs précédents sont partis de l'équation d'onde de l'électron. Nous avons utilisé de manière essentielle la dilatation de Lorentz D. Mais il existe en fait deux dilatations de Lorentz, correspondant aux deux représentations non équivalentes du groupe de Lorentz, D et $\overline{D}$. Cette situation est très vraisemblablement la cause de la conjugaison de charge qui associe à toute particule une antiparticule.

La variété intrinsèque n'est pas isotrope, l'axe numéro trois joue un rôle priviégié. Ce fait a été remarqué très tôt par Louis de Broglie [7]. Il implique que nous pouvons écrire trois équations d'onde similaires, chacune privilégiant une des trois directions d'espace. Cette situation est très vraisemblablement l'origine de l'existence des trois générations de particules [8].

Le terme de masse de l'équation d'onde non linéaire (49) a été emprunté à la théorie du monopôle magnétique de Georges Lochak [9]. Il en résulte que la plupart des résultats précédents doivent pouvoir se transposer au cas d'un monopôle, il suffit de remplacer le potentiel A par le pseudo-potentiel B qui y décrit l'interaction avec un tel monopôle magnétique. L'angle d'Yvon-Takabayasi, qui est l'angle de la jauge magnétique de Georges Lochak, est l'argument du déterminant de ϕ. On a vu dans le premier paragraphe que les facteurs $M = e^{i\theta}$ constituent le noyau de l'homomorphisme qui associe à la matrice M sa dilatation R. Le facteur de phase n'a donc pas de résultat sur la cinématique, et c'est pourquoi il est entièrement disponible pour autre chose, en l'occurence le magnétisme libre. Comme l'équation d'onde (49), contrairement à l'équation linéaire de Dirac, est invariante de jauge magnétique, les résultats obtenus à partir de cette équation sont plus simples, en ce qui concerne les coefficients de connexion affine. L'équation d'onde linéaire donne artificiellement un statut géométrique à l'angle de phase magnétique.

Les travaux d'Einstein visant à trouver un cadre unique pour la gravitation, l'électromagnétisme et les phénomènes quantiques ont utilisé des variétés d'espace-temps dotées de courbure et de torsion. C'est aussi le cas de la variété d'espace-temps intrinsèque à l'onde de l'électron, dont on a ici commencé l'étude. En interprétant différemment l'onde de l'électron, on se rapproche beaucoup des théories unitaires qu'Einstein a cherché inlassablement à développer pour pouvoir décrire la totalité de la réalité physique, dans un cadre complètement relativiste. Ce qui vibre n'est pas l'espace-temps lui-même, come pour les ondes gravitationnelles, mais quelque chose qui agit directement sur cette géométrie d'espace-temps. Un autre point essentiel d'accord avec les idées d'Einstein est que tout ceci n'a rien à voir avec le hasard, qui s'introduit avec les statistiques.

Annexe 1 : Valeur des D^μ_ν.

$$D^0_0 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + {a_5}^2 + {a_6}^2 + {a_7}^2 + {a_8}^2 = \overline{D}^0_0 \quad (108)$$

$$D^1_0 = 2(a_1a_6 - a_2a_5 - a_3a_8 + a_4a_7) = -\overline{D}^0_1 \quad (109)$$

$$D^2_0 = 2(a_1a_7 - a_2a_8 + a_3a_5 - a_4a_6) = -\overline{D}^0_2 \quad (110)$$

$$D^3_0 = 2(a_1a_8 + a_2a_7 + a_3a_6 + a_4a_5) = -\overline{D}^0_3 \quad (111)$$

$$D^0_1 = 2(a_1a_6 - a_2a_5 + a_3a_8 - a_4a_7) = -\overline{D}^1_0 \quad (112)$$

$$D^1_1 = {a_1}^2 + {a_2}^2 - {a_3}^2 - {a_4}^2 + {a_5}^2 + {a_6}^2 - {a_7}^2 - {a_8}^2 = \overline{D}^1_1 \quad (113)$$

$$D^2_1 = 2(-a_1a_4 - a_2a_3 + a_5a_8 + a_6a_7) = \overline{D}^1_2 \quad (114)$$

$$D^3_1 = 2(a_1a_3 - a_2a_4 - a_5a_7 + a_6a_8) = \overline{D}^1_3 \quad (115)$$

$$D^0_2 = 2(a_1a_7 + a_2a_8 + a_3a_5 + a_4a_6) = -\overline{D}^2_0 \quad (116)$$

$$D^1_2 = 2(a_1a_4 - a_2a_3 - a_5a_8 + a_6a_7) = \overline{D}^2_1 \quad (117)$$

$$D^2_2 = {a_1}^2 - {a_2}^2 + {a_3}^2 - {a_4}^2 + {a_5}^2 - {a_6}^2 + {a_7}^2 - {a_8}^2 = \overline{D}^2_2 \quad (118)$$

$$D^3_2 = 2(a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + a_7a_8) = \overline{D}^2_3 \quad (119)$$

$$D_3^0 = 2(a_1a_8 - a_2a_7 - a_3a_6 + a_4a_5) = -\overline{D}_0^3 \tag{120}$$

$$D_3^1 = 2(-a_1a_3 - a_2a_4 + a_5a_7 + a_6a_8) = \overline{D}_1^3 \tag{121}$$

$$D_3^2 = 2(-a_1a_2 + a_3a_4 - a_5a_6 + a_7a_8) = \overline{D}_2^3 \tag{122}$$

$$D_3^3 = {a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 + {a_4}^2 + {a_5}^2 - {a_6}^2 - {a_7}^2 + {a_8}^2 = \overline{D}_3^3 \tag{123}$$

Références

[1] C. Daviau : *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, in Clifford Algebras and their Application in Mathematical Physics, Aachen 1996, Kluwer, Dordrecht,

C. Daviau : *Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **22** n° 1 1997.

C. Daviau : *Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 1 1998

C. Daviau : *Application à la théorie de la lumière de Louis de Broglie d'une réécriture de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **23** n° 3 - 4, 1998

C. Daviau : *Equations de Dirac et fermions fondamentaux*, première partie : Ann. Fond. Louis de Broglie, **24** n° 1 - 4, 1999 ; deuxième partie : **25** n° 1, 2000.

C. Daviau : *Chiral Dirac Equation*, in Clifford Algebras, Applications to Mathematics, Physics and Engineering, Rafal Ablamowicz Editor, Birkhäuser Boston 2004, p. 431-450

[2] M.A. Naïmark, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, p. 101-103, Dunod, Paris 1962.

[3] C. Daviau : *Equation de Dirac non linéaire*, (Thèse de doctorat, Université de Nantes), 1993

C. Daviau : *Linear and Nonlinear Dirac Equation*, Found. of Phys., **23** n° 11, 1993

C. Daviau : *Remarques sur une équation de Dirac non linéaire*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **19** n° 4, 1994

C. Daviau : *Sur la résolution de l'équation de Dirac pour l'atome d'hydrogène*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **20** n° 1, 1995

C. Daviau : *Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equations for the Hydrogen Atom,* Int. Conference on the Theory of the Electron, Mexico 1995

[4] G. Jakobi et G. Lochak, *Introduction des paramètres relativistes de Cayley-Klein dans la représentation hydrodynamique de l'équation de Dirac*, C.R.A.S. t243, p. 234-237, 16 juillet 1956

[5] D. Hestenes : *Space-Time Algebra* (Gordon & Breach, New York 1966, 1987, 1992).

D. Hestenes : *Real Spinor Fields.* J. Math. Phys., **8** n°4 1967

D. Hestenes : *Local observables in the Dirac theory.* J. Math. Phys, **14** n°7 1973)

D. Hestenes : *Proper particle mechanics.* J. Math. Phys., **15** n°10 1974)

D. Hestenes : *Proper dynamics of a rigid point particle.* J. Math. Phys., **15** n°10 1974)

D. Hestenes : *Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory* J. Math. Phys., **16** n°3 1975

D. Hestenes : *A unified language for Mathematics and Physics* in *Clifford algebras and their applications in Mathematics and Physics* JSR Chisholm & AK Common eds, (Reidel, Dordrecht, 1986)

[6] R. Boudet : *La géométrie des particules du groupe SU(2) et l'algèbre réelle d'espace-temps.* Ann. Fond. Louis de Broglie, **13** n°1 1988.

R. Boudet : *The role of the duality rotation in the Dirac theory. Comparison between the Darwin and the Krüger solutions for the central potential problem.* in The Electron D. Hestenes and A. Weingartshofer eds, 1991 Kluwer, Dordrecht

R. Boudet : *The Takabayasi moving Frame, from A Potential to the Z Boson*, in "The Present Status of the Quantum Theory of the Light", S. Jeffers and J.P. Vigier eds., Kluwer Dordrecht 1995

R. Boudet : *The Glashow-Salam-Weinberg Electroweak Theory in the Real Algebra of Spacetime*, Advances in Applied Clifford Algebras 7 (S) 321-336, 1997

[7] Louis de Broglie, *L'électron magnétique*, Hermann, Paris 1934 page 138.

[8] C. Daviau, *Vers une mécanique quantique sans nombre complexe*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **26** n° 1-3 2001

C. Daviau, *Relativistic wave equations, Clifford algebras and Orthogonal gauge Groups*, to be published

[9] G. Lochak : *Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$.* Ann. Fond. Louis de Broglie, **8** n° 4 1983 et **9** n° 1 1984

G. Lochak : *The symmetry between electricity and magnetism and the wave equation of a spin $\frac{1}{2}$ magnetic monopole.* Proceedings of the 4-th International Seminar on the Mathematical Theory of dynamical systems and Microphysics. CISM 1985

G. Lochak : *Wave equation for a magnetic monopole.* Int. J. of Th. Phys. **24** n°10 1985, p. 1019

G. Lochak : *Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac (Etats magnétiques du champ de Majorana)* Ann. Fond. Louis de Broglie, **17** n°2 1992

G. Lochak : *L'équation de Dirac sur le cône de lumière : Électrons de Majorana et monopôles magnétiques*, Ann. Fond. Louis de Broglie, **28** n° 3-4, 2003.

G. Lochak : *Théorie des monopôles légers, avec un aperçu de leurs effets physiques, chimiques, biologiques et nucléaires (interactions faibles)*, à paraître.

(Manuscrit reçu le 2 mars 2005)