Un monopôle magnétique dans le champ de Dirac*
(Etats magnétiques du champ de Majorana)

G. Lochak

Fondation Louis de Broglie
23 rue Marsoulan 75012 Paris, France

RÉSUMÉ. On se propose de montrer qu'il existe des solutions de l'équation de Dirac avec masse qui obéissent aux lois d'invariance d'un monopôle magnétique.

ABSTRACT. The aim of this paper is to find, in the massive Dirac equation, solutions that obey the chiral gauge invariance of a magnetic monopole.

1. Introduction.

Dans une série de travaux précédents, nous avons développé une théorie du monopôle magnétique à partir de l'équation spinorielle de Dirac [1], [2], [3], en utilisant le fait que l'équation de Dirac possède (tout au moins l'équation de masse nulle) une seconde invariance de jauge électromagnétique en plus de l'invariance de jauge habituelle. Nous l'avons appelée la jauge (ou la phase)chirale . Nous avons montré ensuite que, tandis que la jauge habituelle correspond, ainsi qu'il est connu, à une particule portant une charge électrique, la jauge chirale correspond à une particule portant une charge magnétique, donc à un monopôle magnétique de spin 1/2. L'équation de ce monopôle est:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\Psi = 0 \tag{1.1}$$

*Déjà paru dans les AFLB, vol 17 no 2, p. 203 (1997), cet article fait suite à celui cité en référence [4] dans la bibliographie.

et la transformation de jauge chirale s'écrit(1):

$$\Psi \to e^{i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5\phi}\Psi\ ,\ B_\mu \to B_\mu + i\partial_\mu\Phi\ ,\ \ \text{oó} : \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad (1.2)$$

oó g est la charge magnétique du monopôle et B_μ un potentiel électromagnétique qui n'est pas celui de Lorentz, mais le pseudo-potentiel de Cabibbo et Ferrari [1], [2], [3], [5]. La conservation de la charge magnétique est liée à l'invariance par rapport à la phase chirale, de même que la conservation de l'électricité est liée à l'invariance de phase ordinaire.

Cependant, il existe une différence essentielle entre ces deux invariances de jauge: tandis que l'invariance de phase ordinaire est universelle en mécanique quantique, ce qui fait que la conservation de la charge électrique est une règle de supersélection, il n'en est pas de même pour l'invariance chirale et pour la conservation de la charge magnétique qui sont loin d'être aussi strictes et sont, au contraire, facilement violées. Ceci constitue sans doute une différence fondamentale entre l'électricité et le magnétisme, dont les propriétés ne sont pas aussi semblables qu'on le dit parfois. Parmi d'autres différences, rappelons les suivantes [2] [3]: 1) Contrairement au courant électrique, le courant magnétique total n'est pas du genre temps, mais du genre espace. 2) Le courant électrique est polaire, tandis que le courant magnétique est axial, comme les champs correspondants. 3) Il semble même que les courants fondamentaux ne soient pas le courant électrique et le courant magnétique, mais les deux courants chiraux isotropes définis dans nos précédents travaux. Rappelons que la somme de ces courants chiraux, qui est du genre temps, et égale au courant électrique, tandis que leur différence, qui est du genre espace, et égale au courant magnétique. Ce cernier ne se conserve, nous l'avons dit, que si l'invariance chirale est satisfaite, mais dans ce cas, les deux courants chiraux se conservent séparément. Notons que le caractère isotrope des courants chiraux est une propriété générale, sans rapport avec la valeur de la masse du monopôle. 4) La charge magnétique est représentée, dans notre théorie, non pas par une constante de charge pseudo-scalaire, comme on le fait souvent (à notre avis, à tort), mais par un opérateur pseudo-scalaire $g\gamma_5$, oó g est une quantité scalaire comme le sont toutes les constantes physiques. Les lois de symétrie de Curie sont ainsi respectées, mais c'est parce que γ_5 est pseudo-scalaire et non pas g. 5) Le monopôle et l'antimonopôle correspondent à une même valeur de la constante de charge g, mais sont respectivement attachés aux deux valeurs propres opposées $\pm g$ de l'opérateur de charge $g\gamma_5$.

Le fait de changer le signe de la constante g dans l'équation n'est pas une opération de conjugaison de charge. Par contre, à l'approximation de l'optique géométrique, le monopôle et l'anti-monopôle correspondent à deux monopôles classiques de charges respectives $+g$ et $-g$ [1]. Le monopôle et l'antimonopôle sont d'hélicités oppposées: le monopôle est gauche et l'antimonopôle est droit, comme le sont le neutrino et l'anti-neutrino. Les fonctions d'ondes correspondantes sont des états propres de $g\gamma_5$ associées aux valeurs propres $+g$ et $-g$. Les courants chiraux correspondent respectivement au courant magnétique du monopôle et de l'antimonopôle: ces deux courants sont donc isotropes et le courant magnétique total qui est, rappelons le, axial et du genre espace, est la différence de ces deux courants. Nous avons déjà dit que le terme linéaire de masse de l'équation de Dirac, qui est invariant de jauge au sens ordinaire, n'est pas invariant de jauge chirale. Donc, tandis que l'équation de Dirac d'une particule électriquement chargée comporte un tel terme de masse et s'écrit:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu)\Psi - \frac{m_0 c}{\hbar}\Psi = 0 \tag{1.3}$$

oó A_μ est le potentiel de Lorentz, l'équation générale du monopôle linéaire , que nous venons d'écrire en (1,1) est sans masse [1], [2], [3]. Rappelons encore que le pseudo-potentiel B_μ est le dual d'un tenseur antisymétrique de rang trois, d'oó l'absence, devant B_μ, du i qui figure devant A_μ dans le cas électrique. Malgré ce qui vient d'être dit, il est possible de concevoir, dans cette théorie, un monopôle magnétique avec masse. On peut même y parvenir de deux faáons: l'une a été indiquée dans nos publications précédentes et nous allons la rappeler avec des remarques complémentaires; l'autre est l'objet du présent travail.

2. Le problème de la masse du monopôle

Le problème est d'introduire une masse sans briser l'invariance de jauge chirale qui assure la conservation du magnétisme. Pour cela, nous remarquerons d'abord que la transformation (1,2), que nous écrirons, avec une phase constante, sous la forme plus simple:

$$\Psi' = e^{i\gamma_5\theta/2}\Psi \tag{2.1}$$

est équivalente à une rotation chirale, c. à d. à une rotation dans le plan chiral dont les coordonnées sont définies par $\{\Omega_1, \Omega_2\}$, oó Ω_1 et Ω_2 sont l'invariant et le pseudo- invariant de Dirac(2):

$$\Omega_1 = \overline{\Psi}\Psi\ ,\ \Omega_2 = -i\overline{\Psi}\gamma_5\Psi \tag{2.2}$$

En effet, on trouve, en vertu de (2,1):

$$\begin{pmatrix}\Omega'_1\\ \Omega'_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

On pourra donc écrire [2]:

$$\Omega_1 = \rho\cos A\ ,\ \ \Omega_2 = \rho\sin A\ ,\ \ \rho = (\Omega_1^2+\Omega_2^2)^{1/2} \tag{2.4}$$

si bien que la transformation (1.2) ou (2.1) deviendra un simple changement d'origine dans la rotation d'angle chiral A :

$$A' = A + \theta \tag{2.5}$$

Les invariants chiraux sont les grandeurs qui ne dépendent pas de l'angle A. Parmi les 16 grandeurs tensorielles de Dirac, les seuls invariants chiraux sont (voir [2]):

$$\rho = (\Omega_1^2+\Omega_2^2)^{1/2}\ ,\ \ J_\mu = -i\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\ ,\ \ \Sigma_\mu = -i\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi \tag{2.6}$$

Mais ces grandeurs sont liées entre elles par les identités [2]:

$$-J_\mu J_\mu = \Sigma_\mu\Sigma_\mu = \Omega_1^2+\Omega_2^2 = \rho^2 \tag{2.7}$$

si bien que la forme la plus générale d'un éventuel terme de masse dans l'équation du monopôle nous est aussitôt imposée: nous devrons ajouter au lagrangien de l'équation du monopôle linéaire un terme scalaire et invariant chiral, c. à d. une fonction de la seule grandeur ρ, qui est la norme du vecteur $\{\Omega_1,\Omega_2\}$. Le lagrangien non linéaire le plus général s'écrira donc:

$$L = \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma_\mu[\partial_\mu]\Psi - \frac{g}{\hbar}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5 B_\mu\Psi + \frac{1}{4}\mathcal{M}(\rho^2)\frac{c}{\hbar} \tag{2.8}$$

oó $\mathcal{M}(\rho^2)$ est une fonction quelconque de ρ^2. L'équation s'écrira:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu\Psi - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\Psi + \frac{1}{2}\tilde{m}(\rho^2)\frac{c}{\hbar}(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)\Psi = 0 \tag{2.9}$$

oó $\tilde{m}$ est la dérivée de $\mathcal{M}$. Cette équation non linéaire a été donnée dans [1], [2], [3]. Par construction, elle est invariante dans la transformation de jauge (1,2) et elle conserve les même courants chiraux que l'équation linéaire sans terme de masse (1,1). Nous reviendrons plus loin sur cette équation avec quelques résultats supplémentaires, mais auparavant, nous allons introduire l'autre procédé grÉce auquel il est possible d'obtenir un monopôle magnétique de masse non nulle. Voici donc ce procédé. Dire que l'équation (2,9) est invariante de jauge, c'est dire que l'ensemble de toutes ses solutions est invariant dans la transformation (1,2); mais, il peut se faire également qu'une équation ne soit pas invariante chirale, mais qu'elle possède un sous-ensemble invariant de solutions. Celles-ci pourront alors correspondre à des états magnétiques. Nous allons voir sur (2,6) et (2,8) comment cela peut s'obtenir. L'invariance chirale étant l'invariance par rotation dans le plan chiral $\{\Omega_1, \Omega_2\}$, donc par rapport aux rotations d'angle A, on pourra obtenir cette invariance de deux manières: - la première manière consistera à introduire dans l'équation un terme de masse qui ne dépend que de la norme du vecteur $\{\Omega_1, \Omega_2\}$, ce que nous venons de faire; - l'autre (et c'est la seule autre) consistera à ajouter au lagrangien du monopôle linéaire un terme de masse quelconque qui n'est pas nécessairement invariant chiral, mais en ne prenant, dans l'équation ainsi obtenue, que le sous-ensemble des solutions qui sont telles que l'on ait:

$$\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2} = 0 \tag{2.10}$$

En effet, dans une solution qui correspond à une norme nulle du vecteur $\{\Omega_1, \Omega_2\}$, l'angle A sera indéterminé et nous pourrons l'absorber dans la jauge électromagnétique (la jauge chirale). Nous aurons ainsi, dans une équation qui n'est pas invariante chirale, un sous-ensemble de solu- tions invariantes correspondant à des états magnétiques Nous avons montré dans [4] que la condition (2,10) est impliquée par la condition:

$$\Psi = e^{i\theta}\gamma_2\psi^* = e^{i\theta}\psi_c \tag{2.11}$$

oó θ est une phase quelconque et ψ_c le spineur conjugué de charge. Si $\theta = 0$, on a la condition de Majorana [5] et nous verrons en effet que nous pourrons abandonner cette phase θ, mais nous ne le ferons qu'après nous en être assurés. D'autre part, nous pourrions certes imposer la condition (2,10) avec n'importe quel terme de masse, mais nous nous contenterons ici du terme linéaire de l'équation de Dirac. Nous introduirons donc dans l'équation du monopôle sans masse (1,1), le terme de masse de l'équation (1,3), mais nous devrons l'assortir de la condition (2,10) ou de son équivalent (2,11), ce que nous ferons grÉce à un multiplicateur de Lagrange. Nous aurons donc le lagrangien suivant:

$$L = \frac{1}{2}\overline{\Psi}\gamma_\mu[\partial_\mu]\Psi - \frac{g}{\hbar c}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5 B_\mu\Psi - m_0\frac{c}{\hbar}\overline{\psi}\psi + \frac{\lambda}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \tag{2.12}$$

oó λ est un paramètre indéterminé. En faisant varier $\overline{\psi}$, nous obtiendrons:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\Psi - m_0\frac{c}{\hbar}\psi + \lambda(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)\Psi = 0 \qquad (2.13)$$

qui ressemble à l'équation (2,9), mais avec un terme linéaire de masse en plus et un facteur λ constant au lieu de $\tilde{m}(\rho^2)$. Or le terme en λ disparaît car nous devons encore faire varier L par rapport à λ pour imposer la condition (2,9) et cette condition entraine la double égalité:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0 \qquad (2.14)$$

qui annule dans (2,13) le terme en λ. Il s'ensuit que le multiplicateur λ reste indéterminé, puisque qu'il ne figure pas dans les équations de Lagrange. Il en était déjà de même dans le cas électrique [4]. Introduisons donc dans (2,13) la condition (2,10), ou plutôt son équivalent (2,11). Nous obtiendrons l'équation cherchée, c. à d. l'équation de Majorana, au facteur de phase $e^{i\theta}$ près et surtout avec une interaction magnétique au lieu de l'interaction électrique que nous avions dans [4]:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\Psi - m_0\frac{c}{\hbar}e^{i\theta}\gamma_2\psi^* = 0 \qquad (2.15)$$

C'est cette équation que nous allons étudier plus loin, mais il nous sera plus commode d'utiliser pour cela la représentation de Weyl. Nous introduirons les notations:

$$\gamma_k = i\alpha_4\alpha_k \ (k = 1,2,3) \ , \ \gamma_4 = \alpha_4 \ , \ \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad (2.16)$$

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & s_k \\ s_k & 0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_4 + \gamma_5)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

Les s_k sont les matrices de Pauli et ξ et η des spineurs à deux composantes; la condition (2,11) devient maintenant:

$$\xi = e^{i\theta} i s_2 \eta^* \ , \ \eta = -e^{i\theta} i s_2 \xi^* \qquad (2.18)$$

L'équation (2,15) se scinde alors en deux équations à deux composantes qui sont séparées, mais pas indépendantes, puisqu'elles sont liées par (2,18):

$$(\pi_0^+ + \mathbf{\Pi}^+ \cdot s)\xi - i m_0 c e^{i\theta} s_2 \xi^* = 0 (\pi_0^- + \mathbf{\Pi}^- \cdot s)\eta + i m_0 c e^{i\theta} s_2 \eta^* = 0 \quad (2.19)$$

On a posé ici :

$$s = \{s_1, s_2, s_3\}\ ,\ iB_\mu = \{B, iW\} \tag{2.20}$$

$$\pi_0^+ = 1/c(i\hbar\partial/\partial t + gW)\ ,\ \mathbf{\Pi}^+ = -i\hbar\nabla + g/c\mathbf{B} \tag{2.21}$$

$$\pi_0^- = 1/c(i\hbar\partial/\partial t - gW)\ ,\ \mathbf{\Pi}^- = -i\hbar\nabla - g/c\mathbf{B} \tag{2.22}$$

Notons que, dans le cas électrique, il n'y avait qu'un seul opérateur $\{\pi_0, \mathbf{\Pi}\}$ [4], tandis qu'ici, il y en a deux: un gauche et un droit.

Avant d'en venir à l'étude des équations (2,15) et (2,19), nous allons encore nous arrêter un instant sur l'équation (2,13). Rappelons que, sans le terme d'interaction, elle a été proposée depuis longtemps par H. Weyl sous une forme équivalente [7], [2].

Contrairement à l'équation de Dirac ordinaire, cette équation a la propriété de garder la même forme en relativité générale, qu'on l'exprime sous forme métrique (avec des coefficients de connection $\Gamma_{\mu\lambda\nu}$ dépendant des $g_{\mu\nu}$) ou sous forme mixte (avec des coefficients de connection $\Gamma_{\mu\lambda\nu}$ définis indépendemment des $g_{\mu\nu}$). D'autre part, reprenons l'équation (2,13), mais sans terme d'interaction, et sans terme de masse linéaire :

$$\gamma_\mu\partial_\mu\Psi + \lambda(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)\Psi = 0 \tag{2.23}$$

C'est un cas particulier de (2,13) sans champ et avec:

$$\lambda = \tilde{m}(\rho^2) = \text{Cnte} \tag{2.24}$$

Sous une forme équivalente, (2,23) a été étudiée par Rodichev [8] et nous avons montré que le terme $(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)\psi$ correspond à une torsion de l'espace [2]. Ce terme dérive de l'invariant chiral $\rho^2 = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$ qui figure dans le lagrangien et on peut montrer que cet invariant n'est autre (à un facteur constant près) que la courbure totale de l'espace. Cette courbure est, en l'occurrence, celle d'un espace plat et ne dépend que de la torsion. On voit que, quand nous montrons que la condition de Majorana, exprimée par (2,10) est équivalente à la condition (2,11), nous montrons en réalité qu'imposer la condition de Majorana, revient à annuler la torsion de l'espace .

3. Sur des résultats récents concernant l'équation non linéaire

L'équation (1,25) appartient à une classe d'équations récemment étudiées par A. Bachelot [10]. Celui-ci a résolu le problème de Cauchy global pour l'équation (2,23), avec des conditions initiales qui ne sont pas supposées petites, mais seulement telles que l'invariant chiral soit petit. Autrement dit, la solution de Bachelot est donnée au voisinage de la condition de Majorana ou, si l'on veut: dans le cas d'une faible torsion de l'espace. Or Bachelot, pour démontrer son théorème, l'a fait précéder d'un lemme qui, à lui seul, présente un grand intérêt. Ce lemme s'énonce ainsi:

Dans l'équation de Dirac sans terme d'interaction électromagnétique, mais avec un terme de masse M dépendant éventuellement de l'espace et du temps:

$$\gamma_\mu \partial_\mu \Psi + M\psi = 0, \tag{3.1}$$

si l'invariant chiral $\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$ s'annule sur tout l'espace à un instant donné, il restera nul par la suite. Il est facile de montrer que ce lemme reste vrai, dans le cas qui nous occupe et il peut donc s'énoncer:

Si l'invariant chiral $\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$ (et donc la torsion de l'espace) s'annule à un instant donné dans l'équation avec interaction magnétique:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu \Psi - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\Psi - m_0 \frac{c}{\hbar}\psi = 0, \tag{3.2}$$

il restera nul par la suite. La démonstration est la même que celle de Bachelot et nous en profitons pour la reproduire ici. Bachelot s'appuie sur deux lois de conservation de courant:

$$\partial_\mu \overline{\psi}\gamma_\mu \psi = 0 \ , \ \partial_\mu \overline{\psi}\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu \psi = 0 \ , \ (\tilde{\psi} = \psi \text{ transposé }) \tag{3.3}$$

On reconnaît, dans la première loi, la conservation du courant de Dirac, qui se déduit aussi bien de l'équation (1,3) avec l'interaction électrique habituelle que de l'équation (3,2) avec l'interaction magnétique. La seconde loi est la conservation du courant croisé entre des états conjugués de charge. Bachelot l'a déduite de l'équation (3,1), mais elle reste vraie pour l'équation (3,2) avec l'interaction magnétique . Par contre, il faut souligner que cette seconde loi est fausse pour l'équation de Dirac habituelle (1,3) avec l'interaction électrique. On trouve, en effet, dans ce dernier cas:

$$\partial_\mu \tilde{\psi}\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu\psi + iA_\mu\tilde{\psi}\gamma_2\gamma_4\gamma_\mu\psi = 0 \tag{3.4}$$

Cela étant, quand les deux lois (3,3) sont vraies, Bachelot se sert des lois de conservation qu'elles entraînent:

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\psi|^2 dx = \text{ Cnte } \ , \ \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{\psi}\gamma_2\psi dx = \text{ Cnte} \tag{3.5}$$

pourvu, bien sñr, que les intégrales existent. Cette réserve doit être faite, parce que nous savons que, dans les interactions entre un monopôle magnétique et une charge électrique, il n'existe pas d'états liés [1], [2] et le résultat n'est donc pas général. Cette réserve étant faite, on tire de (3,5):

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\Psi - e^{i\theta}\gamma_2\psi^*|^2 dx = 2\int_{\mathbf{R}^3} \{|\Psi|^2 - \Re e^{-i\theta}\tilde{\psi}\gamma_2\psi^*\} dx = \text{Cnte} \tag{3.6}$$

Il s'ensuit que si la condition (2,10) ou les conditions équivalentes (2,11) ou (2,18), sont réalisées à un instant donné, elles le demeureront par la suite, ce qui démontre le lemme de Bachelot. On voit tout de suite que ce lemme permet, dans les cas oó il s'applique, de beaucoup affaiblir la condition que nous avons introduite dans les équations (2,15) ou (2,19) sous la forme du multiplicateur de Lagrange qui figure dans (2,12), puisqu'au lieu d'une contrainte que nous devions supposer se maintenir au cours du temps, il suffit maintenant d'une condition initiale, puisqu'il suffit que la condition de Majorana soit satisfaite à un instant donné pour qu'elle se maintienne, en vertu des équations du mouvement: les états magnétiques de Majorana sont donc simplement des solutions particulières de l'équation de Dirac avec interaction magnétique.

Comme nous le verrons, les équations (2,15) et (2,19) que nous avons obtenues représentent un couple de monopôles magnétiques et, pour que ces monopôles puissent apparaître, nous savons maintenant qu'il suffira, dans certains cas, de satisfaire une condition initiale et non plus une contrainte permanente.

Nous montrerons que les équations (2,15) et (2,19) sont invariantes par rapport à la jauge chirale (1,2), ce qui veut dire que, si l'équation (3,2) n'est certes pas invariante, les solutions qui obéissent à la condition (2,10) ou (2,11) le sont. En somme, les équations (2,15) et (2,19) représenteront des classes particulières de solutions de l'équation de Dirac (les solutions "monopôle magnétique"), que nous obtiendrons, dès qu'une action extérieure convenable créera les conditions (2,10) ou (2,11), comme nous l'avons vu, à un seul instant.

Soulignons encore qu'en raison de (3,4), ce que nous venons de dire ne concerne que l'interaction magnétique et non pas l'interaction électrique. Il semble donc que si l'on parvient à créer expérimentalement les conditions (2,10) ou (2,11), c'est l'apparition de couples de monopôles qui sera favorisée. Signalons encore un autre résultat de Bachelot qui est au moins aussi intéressant que le précédent. Remarquons d'abord que le lemme dont nous venons de parler signifie un peu plus que ce que nous avons dit: en effet, d'après (3,6) non seulement l'invariant chiral $\rho = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$ reste nul s'il l'a été à un instant donné, mais de plus, il reste petit s'il l'a été à un instant donné . La valeur $\rho = 0$ est donc stable. Or le second résultat auquel nous faisions allusion concerne le comportement asymptotique de l'invariant chiral. Bachelot montre, en effet, qu'en vertu de l'équation (3,1), c. à d. en présence du seul terme de masse non linéaire, et pour des valeurs initiales de ρ suffisamment petites, la valeur $\rho = 0$ est asymptotiquement stable [10]:

$$\int_{\mathbf{R}^3} \Omega_1 dx \to 0 \ , \ \int_{\mathbf{R}^3} \Omega_2 dx \to 0 \ , \ t \to \infty \tag{3.7}$$

Donc, toujours dans l'hypothèse oó ces intégrales existent, on aura:

$$\rho \to 0 \text{ si } t \to \infty \tag{3.8}$$

4. L'hypothèse d'une autre équation.

a) L'invariance de jauge. Introduisons les transformations (1,2) dans l'équation (2,15). L'équation devient:

$$\gamma_\mu[\partial_\mu\Psi - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5(B_\mu + i\partial_\mu\Phi)]e^{i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5\Phi}\Psi - m_0c/\hbar e^{i\theta}\gamma_2 e^{-i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5\Phi}\psi^* = 0 \tag{4.1}$$

D'oó l'on en tire, grÉce aux règles d'anticommutation des γ :

$$\gamma_\mu(\partial_\mu\Psi - \frac{g}{\hbar c}\gamma_\mu(B_\mu)\Psi - m_0c/\hbar e^{i\theta}e^{2i\frac{g}{\hbar c}\gamma_5\Phi}\gamma_2\psi^* = 0 \tag{4.2}$$

On retrouve le bon terme d'interaction avec les potentiels B_μ, mais il subsiste un facteur de phase en $e^{2ig/\hbar c\gamma_5\Phi}$. L'invariance de jauge chirale n'est donc pas manifeste, ainsi qu'il fallait s'y attendre. En effet, cette invariance serait manifeste dans des équations du type (2,9), dans lesquelles l'angle chiral A ne figure pas, mais ici, nous sommes partis, en fait, de l'équation (3,2) qui n'est pas invariante de jauge chirale et nous nous sommes contentés d'imposer l'une des conditions équivalentes (2,10), (2,11) ou (2,18) qui rend l'angle A non pas absent, mais indéterminé: il est donc naturel qu'il puisse figurer, mais sa valeur n'interviendra pas dans les calculs (puisque c'est l'angle polaire d'un vecteur nul). Par contre, on observera que, contrairement à ce qui se passait dans le cas électrique, la phase θ n'intervient pas et nous pourrons donc l'éliminer. Au lieu de (2,10) et (2,18), nous écrirons donc:

$$\Psi = \gamma_2\psi^* = \psi_c \ , \ \xi = is_2\eta^* \ , \ \eta = -is_2\xi^* \tag{4.3}$$

Et au lieu de (2,15) et (2,18) nous aurons respectivement:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \frac{g}{\hbar c}\gamma_5 B_\mu)\Psi - m_0\frac{c}{\hbar}\gamma_2\psi^* = 0 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}(\pi_0^+ + \mathbf{\Pi}^+ \cdot s)\xi - im_0cs_2\xi^* &= 0\\ (\pi_0^- + \mathbf{\Pi}^- \cdot s)\eta + im_0cs_2\eta^* &= 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

a) En tenant compte de (2,17) et (2,20), la transformation de jauge (1,2) s'écrira, en termes de ξ, η, W et B :

$$\xi \to e^{i\frac{g}{\hbar c}\Phi}\xi \ , \ \eta \to e^{i\frac{g}{\hbar c}\Phi}\eta \ , \tag{4.6}$$

$$W \to W - 1/c\partial\Phi/\partial t \ , \ \mathbf{B} \to \mathbf{B} + \nabla\Phi \tag{4.7}$$

b) L'invariance CPT est triviale: elle découle immédiatement de l'invariance du lagrangien (2,12). c) La conservation du moment cinétique dans le cas coulombien: la conservation de l'intégrale du moment cinétique de Poincaré devrait être brisée par la présence d'un terme de masse linéaire (voir [1], [2], [3]). Mais ici, on vérifie qu'elle est assurée grÉce à la condition (2,10). Il convient toutefois de remarquer que c'est l'équation (4,4) qui conserve le moment cinétique et donc, en représentation de Weyl, le système des deux équations (4,5) et non pas chacune des équations séparément. Notons au passage qu'il en était déjà de même dans le cas électrique [4], ce que nous n'avions pas signalé.

5. L'approximation de l'optique géométrique.

Jusqu'à présent, tout paraissait satisfaisant, tant qu'il ne s'agissait que de lois de conservation, mais il serait souhaitable de pouvoir vérifier les qualités de l'équation en l'intégrant dans un cas connu comme l'interaction entre un monopôle et une charge électrique. Malheureusement, le problème est radicalement plus difficile que pour le monopôle de masse nulle parce que le système (4,5) est non linéaire, comme la condition (2,10). Nous allons, pour cela, nous contenter de l'approximation classique. Considérons le système (4,5) avec $\mathbf{\Pi}^+$ et $\mathbf{\Pi}^-$ définis en (2,21) et (2,22) en prenant $W = 0$ comme dans le cas coulombien et en posant:

$$\xi = a\exp(-iS/\hbar) + b\exp(iS/\hbar) \ , \ \eta = -is_2\xi^* \tag{5.1}$$

Un calcul analogue à celui donné dans [4], donne une équation du type "Hamilton-Jacobi":

$$\Big[\big(\tfrac{\partial S}{\partial t}\big)^2\tfrac{1}{c^2}-\big(\nabla S+\tfrac{g\mathbf{B}}{c}\big)^2-m_0^2c^2\Big]\Big[\big(\tfrac{\partial S}{\partial t}\big)^2\tfrac{1}{c^2}-\big(\nabla S-\tfrac{g\mathbf{B}}{c}\big)^2-m_0^2c^2\Big] = 4m_0^2g^2B^2 \tag{5.2}$$

C'est la même équation que dans le cas électrique [4], mais la signification de B est différente. Ainsi, dans le cas coulombien, nous avons [1], [2], [3]:

$$W=0\ ,\ B_x=\frac{e}{r}\frac{yz}{x^2+y^2}\ ,\ B_x=-\frac{e}{r}\frac{xz}{x^2+y^2}\ ,\ B_z=0 \tag{5.3}$$

avec le champ électrique défini par:

$$\mathbf{E}=\mathrm{rot}\,\mathbf{B}=e\mathbf{r}/r^3 \tag{5.4}$$

Cela étant, il faut reconnaître que (5,2) n'est pas l'équation classique d'un monopôle magnétique en présence d'une charge électrique, qui s'écrirait:

soit: $$[(\partial S/\partial t)^2/c^2-(\nabla S+g\mathbf{B}/c)^2-m_0^2c^2]=0 \tag{5.5}$$
soit: $$[(\partial S/\partial t)^2/c^2-(\nabla S-g\mathbf{B}/c)^2-m_0^2c^2]=0 \tag{5.6}$$

suivant le signe de la charge magnétique. La présence simultanée, dans (5,2), des deux parenthèses $(\nabla S+g\mathbf{B}/c)$ et $(\nabla S-g\mathbf{B}/c)$, suggère que l'équation contient un couple de monopôles de signes contraires et on observera que, lorsqu'on s'éloigne du centre de la charge électrique, on a $B\to 0$ et l'équation (5,2) se sépare en ses deux composantes (5,5) et (5,6). Donc, asymptotiquement, nous avons bien un couple de monopôles classiques. C'est, en somme, l'approximation zéro. L'approximation du premier ordre (plus près du centre) pourra s'écrire:

$$[(\partial S/\partial t)^2/c^2-(\nabla S+g\mathbf{B}/c)^2-m_0^2c^2]=2m_0g|B| \tag{5,7}$$

$$[(\partial S/\partial t)^2/c^2-(\nabla S-g\mathbf{B}/c)^2-m_0^2c^2]=-2m_0g|\mathbf{B}| \tag{5,8}$$

Si nous posons, dans l'une de ces deux équations:

$$p=\nabla S=mdr/dt\ ,\ \lambda=egc/\epsilon\quad(\epsilon=\text{ énergie du système}) \tag{5,9}$$

nous obtiendrons l'équation suivante (au signe près devant g):

$$d^2r/dt^2=-\lambda/r^3\cdot dr/dt\times r-m_0g\nabla|\mathbf{B}| \tag{5,10}$$

On reconnaît bien le premier terme de (5,10) qui est celui de l'équation de Poincaré, qui représent l'interaction entre une charge électrique et une charge magnétique classiques. Rappelons que c'est cette équation que nous avions obtenue [1], à la limite de l'optique géométrique, avec l'équation du monopôle magnétique sans masse que nous avions étudiée jusqu'ici à partir de l'invariance de jauge chirale. On voit que, dans le cas présent, il apparaît un terme pour le moins étrange qui appelle à la prudence au sujet de ce "monopôle de Majorana" dont il nous a cependant paru intéressant de montrer quelques propriétés.

Il faut encore ajouter que l'équation de Poincaré ne doit pas sa valeur à la seule célébrité de son auteur, car elle est vérifiée par l'expérience. En effet, cette équation est celle du mouvement d'un faisceau de rayons cathodiques perturbé par la présence de l'un des pôles d'un aimant linéaire (donc, pratiquement, d'un monopôle!). C'est précisément pour rendre compte du phénomène ainsi obtenu expérimentalement par Birkeland, que Poincaré s'est posé le problème et à donné cette équation, qui s'accorde bien avec les faits [12]. Il n'est donc pas question de rester indifférent à un désaccord avec l'équation de Poincaré. Néanmoins, il faut tout de même remarquer que le système (4,5) étudié ici est indissociable, ce qui signifie que, s'il représente quelque chose, ce n'est pas un monopôle mais une paire et que ceci pourrait (par influence mutuelle) expliquer la différence avec notre précédente équation, à l'approximation de l'optique géométrique, d'autant plus que les choses se rétablissent en s'éloignant du centre attractif.

Références

[1] G.Lochak, A.F.L.B. **8**, 345, 1983; 9, 1, 1984.

[2] G.Lochak, I.J.T.P. **24**, 1019, 1985.

[3] G.Lochak, in *Information, Complexity and Control in Quantum Physics* (4th Seminar on Math. Theory of Dynam. Syst. & Microphysics, C.I.S.M. Udine,1985), Springer, Wien, N.Y., 1987.

[4] G.Lochak, A.F.L.B., **12**, 135, 1987.

[5] N.Cabbibo, G. Ferrari, Nuovo Cim. **23**, 1147, 1962.

[6] E. Majorana, Nuovo Cim. **14**, 171, 1937.

[7] H. Weyl, Phys. Rev. **77**, 699, 1950.

[8] V.I. Rodichev, Soviet Phys. JETP, **13**, 1029, 1961.

[9] A. Bachelot, *Global Existence of Large Amplitude Solutions to Nonlinear Wave Equations in Minkowski Space*, Preprint N¯8802 UER de Math Bordeaux I, 1988.

[10] A. Bachelot, Mémoire d'Habilitation, Université de Bordeaux I, 1988.

[11] A. Bachelot, Portugalië Mathematica, **46** (Fasc. Suppl.), 455, 1989.
[12] H. Poincaré, Comptes rendus, **123**, 530, 1896.

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1991)