Pourquoi l'espace dans lequel nous vivons a trois dimensions et ne peut en avoir davantage ?

Jean Dayantis

12, rue de l'Olivette, 34570 Pignan, France

RÉSUMÉ. Vu que le mouvement brownien a une dimension fractale égale à deux, dans l'espace physique usuel à trois dimensions, deux molécules obéissant à ce mouvement brownien finiront toujours par ce rencontrer, pour former le cas échéant une nouvelle molécule composée. Ce n'est plus le cas à quatre dimensions ou plus de l'espace, car alors ces deux molécules vont toujours s'ignorer, de sorte que les composés usuels de la chimie ne pourront jamais se former et la vie ne pourra pas exister.

ABSTRACT. The fractal dimension of brownian motion is two. This means that in usual three dimensional space two independent molecules experiencing such a motion will always finally meet, thus possibly forming a new compound molecule. However, in four-dimensional space or beyond, these two molecules will never meet. As a consequence, the usual chemical reactions shall never take place, and the birth of life would be impossible.

Précisons d'abord ce que nous voulons signifier par le titre de l'article: ce qui suit est sans relations avec l'espace-temps quadri-dimensionnel de la relativité introduit par Minkowski. Cela n'a non plus rien à voir avec les dimensions « cachées » introduites par les théories actuelles des cordes. Cela concerne uniquement l'espace physique tridimensionnel « sensible » dans lequel nous vivons.

A la base de la vie sur terre (et éventuellement, dans l'univers) il y a d'abord les réactions chimiques primaires de la chimie minérale puis organique. Sans ces réactions primaires, pas de biochimie, donc pas de vie sur terre. Or, ces réactions primaires se produise essentiellement en milieu liquide, parfois gazeux, rarement solide. On peut, sans réduire sensiblement la portée du problème, se limiter aux réactions en milieu liquide. Celles-ci se produisent en raison du mouvement brownien [1-3]. Sans mouvement brownien, conséquence de l'agitation thermique, les réactions chimiques ne pourraient pas avoir lieu.

Ce mouvement brownien, suivi au cours du temps, jusqu'au moment où la réaction a lieu, forme une « marche au hasard », (anglais : random-flight), qui forme une « chaîne » stochastique. C'est une chaîne de Markov [3,4], dans le sens que le mouvement ne garde pas la mémoire de ses étapes précédentes. Si la chaîne jusqu'à la « trappe » (=survenue de la réaction) comporte N pas, l'espace parcouru est en moyenne proportionnel à $N_m^{1/2}$, où N_m est la longueur moyenne des pas (pour N_m suffisamment grand).

Pour notre propos, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que tous les pas sont de même longueur N_0. Ceci permet de relier le problème de la marche aux hasard à celui des polymères. Un polymère est une longue chaîne de N_0 monomères (ou unités chimiques, pas nécessairement toutes de même constitution chimique), lesquels monomères sont reliés entre eux par des liaisons chimiques, formant ainsi une « macromolécule » unique. Or, en solution, et sous certaines conditions (pour les spécialistes, ce sont les conditions « théta » de Flory[5]), la distance bout à bout moyenne de cette chaîne polymère en solution, en perpétuelle modification et évolution de sa conformation en raison de l'agitation thermique, et que l'on peut noter par r_m, est aussi proportionnelle à $N_0^{1/2}$; en d'autres termes, les dimensions moyennes de la macromolécules sont celles d'une marche au hasard de N_0 pas : la chaîne, ne « sent » pas l'existence du volume géométrique des autres monomères composant la chaîne ; plus précisément, il y a compensation entre la tendance du solvant, lorsqu'il est médiocre, à contracter la chaîne par rapport aux dimensions normales d'une marche au hasard, et le volume géométrique des unités de la chaîne, qui ont un effet inverse. Sous d'autres conditions (les spécialistes parlerons d'une chaîne polymère dissoute dans un « bon solvant »), la distance bout à bout moyenne r_m de la chaîne est proportionnelle à $N_0^{3/5}$ et non plus à $N_0^{1/2}$; en d'autres termes, dans ce cas, un monomère donné dans la chaîne, « sent » l'existence du volume géométrique des autres monomères constituant la chaîne polymère, l'impossibilité de l'interpénétration. Ce qui fait que toutes choses égales par ailleurs, la distance bout à bout augmente, la chaîne gonfle. On appelle ces dernières chaînes polymère « chaînes à volume exclu ».

Maintenant, les dimensions fractales(6) d'un objet quelconque sont données par le rapport de deux logarithmes : le logarithme de l'augmentation du nombre des unités de mesure qui permettent de couvrir toute la figure après renormalisation, par le logarithme de la division de la longueur (plus généralement : du volume) de l'unité de mesure, après la dite renormalisation. C'est la mesure fractale de Hausdorff [7] en mathématiques, étendue à la physique et popularisée par Benoit Mandelbrot et d'autres [6]. Ainsi on sait donner une dimension fractale au dessin d'une côte : lorsque la côte est très plate, sans anses ou autres irrégularités, sa dimension fractale est proche de un, la dimension de la ligne droite ; en revanche, lorsque le dessin de cette côte est très compliquée, sa dimension fractale est nettement supérieure à un, sans toutefois atteindre la valeur 2, qui correspondrait à une surface. (Note : la courbe de Peano couvre bien tout un plan, et a donc la dimension 2 d'une surface, mais on n'imagine pas qu'une côte ayant frontière la mer puisse être décrite par une courbe de Peano !) Le contour de « l'île » de Koch, est l'exemple d'un objet fractal (voir la figure). En physique, l'utilité de la notion d'objet fractal couvre les domaines les plus divers, tels l'agrégation de molécules, la floculation, la turbulence en hydrodynamique, la percolation, la croissance des branches sur un arbre, etc.

Dans le cas présent, la dimension fractale du mouvement brownien ou de la chaîne en solvant « théta » est $\ln N / \ln N^{1/2} = 2$ $(N \to \infty)$. En d'autres termes, le mouvement brownien et la chaîne polymère dissoute en solvant « théta », à la limite de $N \to \infty$, a la même dimension géométrique qu'une surface. Concrètement, cela veut dire que le mouvement brownien infini (qui est supposé se produire dans l'espace tridimensionnel), ou la chaîne « théta » infinie, couvriront en projection toute la surface d'un plan tracé dans l'espace tridimensionnel. En revanche, la dimension fractale d'une chaîne polymère dissoute dans un bon solvant, toujours dans la limite de $N \to \infty$, n'est que de $5/3$, et donc sa dimension fractale est inférieure à celle d'une surface. Concrètement, cela signifie que la projection de cette chaîne « avec volume exclu » sur un plan, ne couvrira pas tout le plan, mais laissera des trous.

On peut maintenant introduire la dimension D de l'espace que nous considérons et où se passent les phénomènes physiques. A une, deux et trois dimensions de l'espace, les valeurs ν de l'exposant dans la relation $r_m \sim N^\nu$ pour les chaînes à volumes exclu ont respectivement les valeurs $1, 3/4$ et $3/5$ [8]. Dans les mêmes conditions, la valeur de ν pour les chaînes sans volume exclu (marche au hasard) reste constante et égale à

1/2. Admettons, à la suite de Wilson et Kogut [9] , que l'espace physique où se passent les événements de la physique et de la chimie ne peut avoir de dimensions autres qu'entières. On passe alors directement de la dimension trois usuelle aux dimensions supérieures quatre, cinq, etc. On prouve alors théoriquement à partir du groupe de renormalisation [8] et on vérifie par des simulations Monte Carlo qu'à partir de la dimension quatre, l'exposant ν a toujours la valeur 1/2, en d'autres termes que même avec volume exclu, les chaînes polymère se comportent comme des chaînes sans volume exclu, elles sont assimilables à une pure marche au hasard sans obstacles. (Signalons cependant que dans le cas limite $D = 4$, il faut prendre en considération des corrections logarithmiques). Pour voir clairement ce que cela signifie, nous allons reprendre un argument simple d'abord exposé par des Cloizeaux et Jannink [10].

Soit D la dimension de l'espace dans lequel se trouvent deux objets simplement connexes de dimensions respectives d_1 et d_2. Si $d_1 + d_2 < D$ alors, la probabilité pour que ces objets aient une partie commune est de mesure nulle. Par exemple si ces deux objets sont des droites infinies dans l'espace infini à trois dimensions, auquel cas $d_1 + d_2 = 2$, leur probabilité de rencontre est de mesure nulle. En revanche, dans les mêmes conditions, deux plans vont toujours se rencontrer selon une droite de dimension 1, car dans ce cas $d_1 + d_2 = 4 > 3$. Le cas limite est celui d'un plan et d'une droite, auquel cas $d_1 + d_2 = 3 = D$. La droite rencontrera toujours le plan, mais en un seul point de dimension 0. (On ne tient pas compte du cas exceptionnel où droite et plan sont parallèles. Du reste, dans ce cas, on peut dire que droite et plan se rencontrent en un point à l'infini.)

D'après ce qui précède, en dimension d'espace 4, deux parcours browniens, ou encore deux chaînes polymère en croissance continue, avec ou sans volume exclu et initiés en des points différents de l'espace, ne vont jamais se rencontrer. Car alors $d_1 + d_2 = 4 = D$. En revanche, elles vont toujours finir par se rencontrer dans l'espace usuel à trois dimensions.

Du point de vue pratique, ceci montre qu'à quatre dimensions, les réactions chimiques les plus élémentaires ne pourraient avoir lieu. Une molécule d'oxygène et deux molécules d'hydrogène ne pourront jamais se rencontrer pour donner de l'eau. Les biopolymères, nécessaires à la vie, sont aussi des chaînes polymère. En dimension quatre ou supérieure, elles ne pourraient jamais se former. La physique que nous connaissons ainsi que la vie deviennent choses impossibles en dimension quatre de l'espace ou supérieure.

L'argument qui précède n'est plus valable en dimension deux, voire à une dimension. Si notre espace géométrique dans lequel se produisent les phénomènes physiques ne peut avoir plus de trois dimensions, pour les raisons exposées ci-dessus, pourquoi n'aurait-t-il pas deux dimensions, ou même une seule. On peut seulement avancer des arguments qualitatifs, non déterminants : la physique est beaucoup plus « riche » à trois dimensions qu'à deux, elle comporte des tas d'autres possibilités, et de toute façon l'espace tridimensionnel contient la physique à deux dimensions, celle des films, des membranes etc. Peut-être existe-t-il des arguments plus déterminants excluant des univers à espace physique à deux ou une dimension.

Références

[1] A. Einstein, Ann.d. Physik, 17,549(1905).

[2] M. von Smoluchowski, Ann.d. Physik, 21,756(1906).

[3] S. Chandrasekhar, Stochastic Problems in Physics and in Astronomy, Review Modern Physics, 15,1(1943).

[4] A.A. Markov, Wahrscheinlischkeitsrechnung, Leipzig, 1912.

[5] a) P.J. Flory, Principles of Polymer Chemistry, Cornell University Press, 1955.
b) P.-G. de Gennes, Scaling Concepts in Polymer Physics, Cornell University Press, 1979.

[6] a) B. Mandelbrot, Les Objets Fractals, forme, hasard et dimension, Flammarion, Paris 1975; du même, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, N.Y. 1983.
b) J. Feder, Fractals, Plenum Press, N.Y. 1988.
c) R. Jullien and R. Botet, Aggregation and Fractal Aggregates, World Scientific, Singapour.

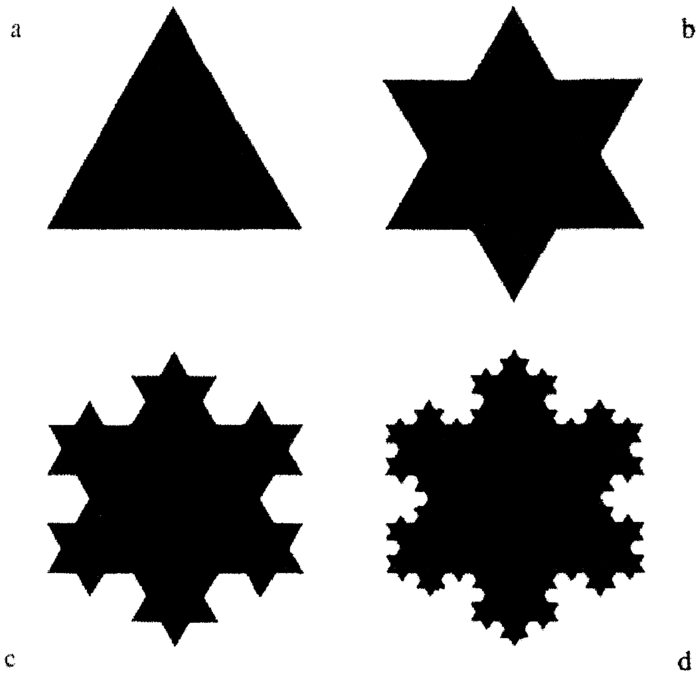
[7] F. Hausdorff, Mathematische Annalen, 79,157(1919).

[8] J. des Cloizeaux et G. Jannink, Les Polymères en Solution, Les Editions de Physique, Les Ulis 1987.

[9] K.G. Wilson and J. Kogut, The Renormalization Group and the ? Expansion, Physics Reports, 12,75(1974), North-Holland, Amsterdam.

[10] Réf. 9 p. 79

(Manuscrit reçu le 28 septembre 2007)



Le contour de l'île de Koch. En *a* on part d'un triangle équilatère, puis en *b*, au milieu de chaque côté on forme un triangle équilatère de côté un tiers de la valeur précédente, ce qui donne une étoile de David ; en *c* et *d* on continue le processus sur chacun des nouveaux côtés générés, et on continu ainsi à l'infini. On arrive ainsi à une courbe continue et sans tangente, dont la dimension fractale est $\log 4/\log 3 \approx 1.2618$, comprise entre un et deux, comme c'est toujours le cas lorsque l'on part d'une figure formée de lignes de dimension un, qu'ensuite on complique de façon à former un objet fractal. Schéma tiré de la référence [6a].